ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Εξεταστική Σεπτέμβρη 2016
Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 Μονάδες) Έστω (x_n) ακολουθία με τύπο

$$x_n = (-1)^n \cdot n + \frac{\sin(n^2)}{n}.$$

(*i*) Υπολογίστε (με αιτιολόγηση) τα $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_{2n}$.

(*ii*) Είναι η ακολουθία (x_n) *Cauchy*; Έχει συγλίνουσα υποακολουθία;

(**2**) (2.5 μονάδες) (*i*) **(Θεωρία)** Δείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι *Cauchy*.

(*ii*) Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί

$$x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{n} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

(**3**) (2 μονάδες) (*i*) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^a \cdot \log n}.$$

(*ii*) Έστω (x_n) ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n \cdot x_{n+1}}$ συγκλίνει.

(**4**) (2.5 μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, \\ g(x) & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Εάν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δείξτε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \notin \mathbb{Q}$.

(*ii*) Έστω ότι η συνεχής συνάρτηση $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty.$$

Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(0,1)$.

(**5**) (2 μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot (-1)^{[\frac{1}{x}]} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Εξετάστε (με αιτιολόγηση) εάν η f είναι *παραγωγίσιμη* στο 0.

(*ii*) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leq 1$ και $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$|e^{f(x)} - e^{f(y)}| \leq e\,|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
