Ανάλυση Ι (Τμήμα Α)

Τελικό Διαγώνισμα, Ιανουάριος 2020
Διάρκεια 2.5 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.[1]
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) (*i*) Έστω (x_n) ακολουθία ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ και $y_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

(*ii*) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

(**2**) (2 μονάδες) (*i*) Έστω (x_n) ακολουθία ώστε $x_n = 1$ για n άρτιο και $x_n = 2^n$ για n περιττό. Υπολογίστε τα $\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$.

(*ii*) Υπολογίστε (με απόδειξη) την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ για την οποία η παρακάτω σειρά συγκλίνει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{a}{n}\Big).$$

(**3**) (2 μονάδες) Έστω

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(*i*) Βρείτε τα σημεία συνέχειας της f.

(*ii*) Είναι η f παραγωγίσιμη στο 0;

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

(*i*) Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

(*ii*) Εάν επιπλέον $f(0) = -1$, δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.

(**5**) (1.5 μονάδες) (Θεωρία) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.

(**6**) (2 μονάδες) (*i*) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $\limsup_{x\to+\infty} |f'(x)| < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} (f(\sqrt{x+1}) - f(\sqrt{x})) = 0.$$

(*ii*) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)) = 0.$$

---

[1] Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση **αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής** επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο **αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα** του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.