Ανάλυση Ι (Τμήμα Α)

Πρόοδος 2019

Διάρκεια 2 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Δεν επιτρέπεται να έχετε ηλεκτρονικές συσκευές δίπλα σας ή πάνω σας.[1]
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (3 μονάδες) (*i*) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}}{n!}.$$

(*ii*) Εξετάστε για ποια $a > 0$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}.$$

(**2**) (3 μονάδες) (*i*) Έστω $\{r_1, r_2, \ldots,\}$ μία αρίθμηση των ρητών του συνόλου $\{0\} \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. Υπολογίστε (με απόδειξη) τα $\liminf r_n$ και $\limsup r_n$.

(*ii*) Έστω (x_n) ακολουθία ώστε $\liminf x_n = 0$ και $\limsup x_n = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $k, l \in \mathbb{N}$ με $k < l$ τέτοια ώστε $1 - \varepsilon \leq x_l - x_k \leq 1 + \varepsilon$.

(**3**) (3 μονάδες) (*i*) (Θεωρία) Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_n) είναι *Cauchy* και έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει.

(*ii*) Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία. Δείξτε ότι υπάρχει υποακολουθία (x_{n_k}) και $x \in \mathbb{R}$ ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} |x_{n_k} - x| < +\infty$.

(**4**) (3 μονάδες) Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει. Ποια από τα παρακάτω είναι σωστά;

(*i*) Εάν $x_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{2019} < +\infty$.

(*ii*) Εάν η ακολουθία (y_n) παίρνει μόνο δύο τιμές, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ συγκλίνει.

(*iii*) Εάν η ακολουθία (y_n) φθίνει στο 1, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ συγκλίνει.

(Σε κάθε υποερώτημα πρέπει να δώσετε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.)

---

[1] Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση **αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής** επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο **αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα** του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.