ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Τελικό Διαγώνισμα-Σεπτέμβρης 2011-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια τρεις ώρες με κλειστές όλες τις σημειώσεις.

(**1**) (2 Μονάδες) (**i**) Είναι η συνάρτηση $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$; Στο $(1,+\infty)$; Απαντήστε και δώστε απόδειξη.

(**ii**) Είναι η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$ ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$; Στο $(1,+\infty)$; Απαντήστε και δώστε απόδειξη.

(**2**) (3 Μονάδες) (**i**) Έστω $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $f(r) = 0$ για κάθε $r \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

(**ii**) Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

(**3**) (2 Μονάδες) Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων με τύπο

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot e^{-n^2x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(**i**) Δείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

(**ii**) Δείξτε ότι $f_n' \to 0$ ομοιόμορφα στο $[1,+\infty)$.

(**iii**) Συγκλίνει η ακολουθία συναρτήσεων (f_n') ομοιόμορφα στο $(0,1)$;

(**4**) (3 Μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,+\infty)$.

(**ii**) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ότι $f'(x) = e^{-x}/(e^{-x}-1)$.

(**iii**) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά c ώστε $f(x) = -\ln(1-e^{-x}) + c$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. (+1 μονάδα εάν δείξετε ότι $c = 0$).

(**5**) (2 Μονάδες) (**i**) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log n}.$$

(**ii**) Βρείτε το ανάπτυγμα *Taylor* της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2}$ και εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{x^2} dx$ ως σειρά.

Καλή επιτυχία !!