ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Διάλεξη 2. Ομοιόμορφη σύγκλιση.

Γ. Κωστάκης.

Θυμίζουμε ότι με I θα συμβολίζουμε πάντοτε ένα διάστημα του $\mathbb{R}$.

Στη **Διάλεξη 1** δείξαμε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) σ'ενα διάστημα I ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο I και η f δεν είναι συνεχής στο I. Με άλλα λόγια, το κατά σημείο όριο συνεχών συναρτήσεων δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι η κατά σημείο σύγκλιση είναι αρκετά ασθενής για να εξασφαλίσει τη συνέχεια της οριακής συνάρτησης. Οπότε προκύπτει το ερώτημα αν υπάρχει μια πιο ισχυρή έννοια σύγκλισης που να έχει ως συνέπεια τη συνέχεια της οριακής συνάρτησης. Αυτή η πιο ισχυρή έννοια σύγκλισης είναι η ομοιόμορφη σύγκλιση και ο ορισμός της είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 1 *Λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ορισμένη σ'ενα διάστημα I συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$* **ομοιόμορφα** *στο I αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\epsilon)$ (που εξαρτάται από το ϵ) ώστε*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \text{ για κάθε } x \in I \ \text{ και για κάθε } n \geq n_0.$$

Τότε γράφουμε συνοπτικά: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I.

Πολλές φορές αντί να πούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ορισμένη σ'ενα διάστημα I συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ **ομοιόμορφα** στο I λέμε απλά ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει **ομοιόμορφα** στο I. Σε αντιδιαστολή με την κατά σημείο σύγκλιση παρατηρήστε ότι, στην ομοιόμορφη σύγκλιση η επιλογή του n_0 είναι η ίδια για **όλα** τα x και εξαρτάται μόνον από το ϵ. Ακολουθούν δύο βασικές παρατηρήσεις εκ των οποίων η πρώτη είναι τελείως προφανής.

Βασική Παρατήρηση 1 *Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I τότε $f_n \to f$ κατά σημείο στο I.*

Το αντίστροφο της **Βασικής Παρατήρησης 1** δεν ισχύει, δηλαδή η κατά σημείο σύγκλιση δεν συνεπάγεται την ομοιόμορφη σύγκλιση: δείτε π.χ. το Παράδειγμα 1 παρακάτω ή φτιάξτε το δικό σας παράδειγμα.

Βασική Παρατήρηση 2 *$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I αν και μόνον αν* $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$.

Απόδειξη. Για τη μία κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I. Θα δείξουμε ότι $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. Έστω $\epsilon > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει n_0 θετικός ακέραιος ώστε $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Από την υπόθεση, υπάρχει n_0 θετικός ακέραιος ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/2$ για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n \geq n_0$. Άρα,

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Η άλλη κατεύθυνση αφήνεται στον αναγνώστη ως (τετριμμένη) άσκηση.

Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$ είναι ένας αριθμός (ή $+\infty$) που εξαρτάται από το n (δηλαδή την f_n) καθώς και από τη συνάρτηση f αλλά και το διάστημα I. Βέβαια αυτό που εδώ έχει σημασία είναι η εξάρτηση από το n γιατί αυτό είναι που μεταβάλλεται, $n = 1, 2, \ldots$. Ας δούμε κάποια παραδείγματα (τα πρώτα 3 είναι τα αντίστοιχα Παραδείγματα της **1ης Διάλεξης**).

Παραδείγματα.

1. Αν $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$ τότε $f_n(x) = x^n \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$ και $f_n(1) = 1 \to 1$. Άρα $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, 1]$, όπου $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in [0, 1)$ και $f(1) = 1$. Ας εξετάσουμε αν η κατά σημείο σύγκλιση ισχυροποιείται σε ομοιόμορφη. Παρατηρήστε ότι αν η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0, 1]$ τότε αυτή η συνάρτηση θα είναι αναγκαστικά η f. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και έχουμε:

   $$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} |x^n| = 1,$$

   όπου η πρώτη ισότητα στα αριστερά είναι συνέπεια της σχέσης $f_n(1) - f(1) = 1 - 1 = 0$. Άρα από την **Βασική Παρατήρηση 2** η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

   Από την άλλη μεριά, για κάθε $a \in [0, 1)$ ισχύει ότι:

   $$f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [0, a].$$

   Πράγματι, αν $a \in [0, 1)$ παρατηρούμε ότι

   $$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,a]} |x^n| = a^n \to 0$$

   και από την **Βασική Παρατήρηση 2** έπεται το ζητούμενο.

   Από εδώ και πέρα, συχνά θα χρησιμοποιούμε την
   Βασική Παρατήρηση 2 *χωρίς να την επικαλούμαστε.*

2. Αν $f_n(x) = nx^n$, $x \in [0, 1)$, $n = 1, 2, \ldots$ τότε $f_n(x) = nx^n \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1)$. Άρα η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά σημείο στο $[0, 1)$. Όμως η (f_n) δεν συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0, 1)$. Ας δούμε γιατί:

   $$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x)| \geq f_n(1 - \frac{1}{n}) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to +\infty,$$

αφού $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$.

Από την άλλη μεριά, η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,a]$ για κάθε $a \in [0,1)$ και αυτό συμβαίνει γιατί

$$\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = na^n \to 0 \text{ για κάθε } a \in [0,1).$$

3. Έστω $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $x \in [0,+\infty)$, $n = 1,2,\ldots$. Αυτό είναι το Παράδειγμα 3 της **1ης Διάλεξης**. Εκεί δείξαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$, όπου $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad x \in [0,1) \\ 1/2 & \text{αν} \quad x = 1 \\ 1 & \text{αν} \quad x \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε τώρα αν η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Εφόσον $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,+\infty)$, η (f_n) θα συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$ αν και μόνον αν $\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \to 0$. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και ας μελετήσουμε τη συνάρτηση $f_n - f$ στο διάστημα $[0,1)$. Φυσικά αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η ποσότητα $\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)|$. Παρατηρούμε ότι:

$$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} \left| \frac{x^n}{1+x^n} - 0 \right| = \sup_{x\in[0,1)} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f_n είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0,1]$ και άρα

$$\sup_{x\in[0,1)} f_n(x) = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(1) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} f_n(x) = \frac{1}{2},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

4. Για $n = 1,2,\ldots$ ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n(x) = nx(1-x)^n$, $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, δηλαδή η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση κατά σημείο στο $[0,1]$. Ας εξετάσουμε τώρα αν η (f_n) συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

1ος τρόπος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι:

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) \geq f_n(\frac{1}{n}) = n\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

και αφού $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to 1/e$ συμπεραίνουμε ότι **άπειροι όροι** της ακολουθίας αριθμών $(\sup_{x\in[0,1]} f_n(x))$ είναι μεγαλύτεροι από $\frac{1}{2e}$. Επομένως η ακολουθία (αριθμών) $(\sup_{x\in[0,1]} f_n(x))$ δεν συγκλίνει στο 0 και άρα η ακολουθία (συναρτήσεων) (f_n) δεν συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Αν δεν είμαστε αρκετά παρατηρητικοί ώστε να δούμε ότι η τιμή της f_n στο $1/n$ (για κάθε n) οδηγεί στη επίλυση του προβλήματος, δεν πειράζει! Υπάρχει μια χρήσιμη (όχι όμως πάντοτε: δείτε την Άσκηση 4) και κλασική μέθοδος: η *μελέτη συνάρτησης*. Αυτή θα παρουσιάσουμε τώρα.

2ος τρόπος. Σταθεροποιούμε $n\in\mathbb{N}$. Αφού η f_n είναι συνεχής στο $[0,1]$ έχει μέγιστο στο $[0,1]$. Δηλαδή, υπάρχει το $\max_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Τότε έχουμε $\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \max_{x\in[0,1]} f_n(x)$. Για να βρούμε το μέγιστο της f_n στο $[0,1]$ ας υπολογίσουμε αρχικά την παράγωγο της f_n. Έχουμε

$$f_n'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x),\ \ x\in[0,1]$$

και άρα το σημείο $1/(n+1)$, το μοναδικό σημείο στο οποίο μηδενίζεται η f_n', είναι πιθανό σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της f_n στο $[0,1]$. Όμως,

$$\text{η } f_n \text{ είναι αύξουσα στο } \left[0,\frac{1}{n+1}\right] \text{ και φθίνουσα στο } \left[\frac{1}{n+1},1\right]$$

αφού $f_n'(x)\geq 0$ για $x\in[0,\frac{1}{n+1}]$ και $f_n'(x)\leq 0$ για $x\in[\frac{1}{n+1},1]$. Συμπεραίνουμε ότι το $1/(n+1)$ είναι σημείο μεγίστου για την f_n και

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}.$$

Άρα η ακολουθία (f_n) δεν συγκλίνει στη μηδενική συνάρτηση ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Ας θυμηθούμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n) συγκλίνει αν και μόνον αν είναι $Cauchy$, το οποίο σημαίνει ότι δοθέντος $\epsilon>0$ από κάποιο n και μετά οι όροι της ακολουθίας απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη του ϵ. Ουσιαστικά, ο προηγούμενος χαρακτηρισμός μεταφέρεται και στο πλαίσιο της ομοιόμορφης σύγκλισης. Ακριβώς αυτό είναι το περιεχόμενο της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 1 (**Κριτήριο** *Cauchy*). *Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο I αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε*

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon \ \text{ γιά κάθε } x\in I,\ \text{ γιά κάθε } n\geq n_0 \text{ και γιά κάθε } m\geq n_0.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο I και έστω $\epsilon>0$. Τότε η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στο I και επομένως ορίζεται η συνάρτηση

$f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$, $x \in I$. Από την υπόθεση προκύπτει ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I και από την **Βασική Παρατήρηση 2**,

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Επομένως υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ γιά κάθε } n \geq n_0$$

και άρα για $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ και για (οποιοδήποτε) $x \in I$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \sup_{s\in I} |f_n(s) - f(s)| + \sup_{s\in I} |f_m(s) - f(s)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Η άλλη συνεπαγωγή αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Ασκήσεις.

1. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο I είναι σωστό ότι
   - $f_n + g_n \to f + g$ ομοιόμορφα στο I; Απάντηση: **Ν**ΑΙ,
   - $\lambda f_n \to \lambda f$ ομοιόμορφα στο I για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$; Απάντηση: **Ν**ΑΙ,
   - $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα στο I; Απάντηση: **Ο**ΧΙ πάντοτε.
2. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1+x^2}{1+x^n}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Βρείτε όλα τα διαστήματα της μορφής $[a, b]$ (δηλαδή, κλειστά και φραγμένα) στα οποία η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα.
3. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Εξετάστε αν η (f_n) συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$, $[2, +\infty)$.
4. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n(x) = \frac{1+nx}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι η (f_n): (i) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1. + \infty)$, (ii) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $(0, a)$ για κάθε $a > 0$.
5. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $[0, 1]$ ώστε κάθε f_n να είναι συνεχής στο $[0, 1]$, η (f_n) να συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, b]$ για οποιαδήποτε a, b με $0 < a < b < 1$ και η (f_n) να μη συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.
6. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $[0, 1]$ ώστε κάθε f_n να είναι συνεχής στο $[0, 1]$, η (f_n) να συγκλίνει σε κάποια συνεχή συνάρτηση κατά σημείο στο $[0, 1]$ και η (f_n) να μη συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

7. Αν $f_n(x) = x^n e^{nx} + x^{2n} e^{nx^2}$, $x \in [0, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$ δείξτε ότι:

   - υπάρχει $\xi \in (0, +\infty)$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0, \xi]$ για κάποια συνάρτηση $f : [0, \xi] \to \mathbb{R}$,
   - $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $a \in (0, \xi)$,
   - η (f_n) δεν συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στο $[0, \xi]$.

8. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και ορίζουμε $f_n(x) := f(x^n)$, $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$.

   - Δείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $a \in (0, 1)$.
   - Υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(0) = f(1)$. Είναι σωστό ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$;

   (Υπόδειξη: η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$).

9. Ορίζουμε $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $x \in [1, +\infty)$, $n = 1, 2, \ldots$. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο *Cauchy* για να δείξετε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1, +\infty)$.