Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιουλίου 2020
Διάρκεια 2 ώρες. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα.
Παρακαλώ αφήστε τα θέματα και το πρόχειρο. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) Έστω $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Εξετάστε εαν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ και στο $[0,+\infty)$.

(ii) Εξετάστε εαν η g είναι ομοιόμορφα συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(**2**) (2 μονάδες) (i) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[0,1]$ τέτοια ώστε $U(f,P) = L(f,P)$. Δείξτε ότι η f είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Υπάρχει τέτοια διαμέριση όταν $f(x) = x^2$;

(ii) Έστω $f, g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις ώστε $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία διαμερήσεων $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $[a,b]$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} (U(h,P_n) - L(g,P_n)) = 0.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(**3**) (2 μονάδες) (i) Έστω $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ στη συνάρτηση f. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(ii) Εξετάστε εάν η συνάρτηση $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n^2}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ και στο $\mathbb{R}$.

(**4**) (3 μονάδες) (i) Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n!}}{n!}.$$

(ii) Έστω f όπως στο (i), δείξτε ότι $f(x) \leq e^x - 1$ για κάθε $x \in [0,1]$ και ότι $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$.

(iii) Μπορεί να προσεγγιστεί η f ομοιόμορφα από πολυώνυμα στο $[0,1]$;

(**5**) (3 μονάδες) (i) Έστω $d(x,y) = |e^{-x} - e^{-y}|$, $x, y \in \mathbb{R}$. Εξετάστε εάν με τη μετρική d η ακολουθία $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι *Cauchy* και αν συγκλίνει. Είναι ο χώρος $(\mathbb{R}, d)$ πλήρης;

(ii) Εξετάστε αν τα παρακάτω είναι κλειστά ή συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$ (με τη συνηθισμένη μετρική)

$$A = \{(n, 1/n), n \in \mathbb{N}\}, \qquad B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon |x| + |y| + |z| \leq 2 \text{ και } x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}.$$
