

---

10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

---

(1) Για καθένα από τα παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ , με τη συνηθισμένη μετρική, εξετάστε αν είναι ανοιχτά, κλειστά, και βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, και το σύνορό τους.

(i)  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ .

(ii)  $B = [0, 1] \setminus \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ .

(iii)  $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n + \frac{1}{n}]$ .

---

(2) Για καθένα από τα παρακάτω υποσύνολα του  $\mathbb{R}^2$  με τη συνηθισμένη μετρική εξετάστε αν είναι ανοιχτά, κλειστά, και βρείτε το εσωτερικό, την κλειστότητα, και το σύνορό τους.

(i)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^{2019} + |y|^{2019} < 1\}$ .

(ii)  $B = \{(x, y) \in A : x, y \in \mathbb{Q}\}$ .

(iii)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ .

---

(3) Δείξτε ότι οι αύξουσες φραγμένες ακολουθίες είναι κλειστό υποσύνολο του χώρου  $l_{\infty}(\mathbb{N})$ . Είναι οι γνησίως αύξουσες φραγμένες ακολουθίες ανοιχτό υποσύνολο του χώρου  $l_{\infty}(\mathbb{N})$ ;

---

(4) Έστω  $A_n, n \in \mathbb{N}$ , κλειστά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  με τη συνηθισμένη μετρική. Εάν  $A_n \subset [n, +\infty)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δείξτε ότι και το σύνολο  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  είναι κλειστό.

---

(5) Έστω  $A$  μη κενό σύνολο σε μετρικό χώρο  $(X, d)$ . Δείξτε ότι η συνάρτηση  $f: X \rightarrow [0, +\infty)$  με τύπο  $f(x) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$  είναι συνεχής και  $f(x) = 0$  αν και μόνο αν  $x \in \overline{A}$ .

---

(6) Δείξτε ότι κάθε κλειστό σύνολο σε μετρικό χώρο  $(X, d)$  μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων και κάθε ανοιχτό μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών.

(Υπόδειξη: Αν  $A$  κλειστό, θεωρήστε τα σύνολα  $A_n = \{x \in X : f_A(x) < \frac{1}{n}\}$  όπου  $f_A$  η συνάρτηση της Άσκησης 5.)

---

(7)\* Έστω  $A, B$  ξένα κλειστά σύνολα σε μετρικό χώρο  $(X, d)$ . Δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανοιχτά σύνολα  $U, V$  ώστε  $A \subset U$  και  $B \subset V$ .

---