Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(1) Έστω $f(x)=e^x$ για $x\in[0,1]$ και $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,1\right\}$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty}L(f,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(f,P_n)=e-1$.

Συμπεράνετε ότι η e^x είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και $\int_0^1 e^x\,dx=e-1$.

---

(2) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1],\\ 0 & x\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap[0,1]\end{cases}$ δεν είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

---

(3) Έστω ότι η $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι αν αλλάξουμε τις τιμές της f σε πεπερασμένο το πλήθος σημείων, τότε η f παραμένει *Riemann*-ολοκληρώσιμη και η τιμή του $\int_0^1 f(x)\,dx$ δεν αλλάζει.

---

(4) *(i)* Έστω $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση η οποία είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[a,1]$ για κάθε $a\in(0,1)$. Δείξτε ότι η f είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και $\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{a\to0^+}\int_a^1 f(x)\,dx$.

(ii) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\right\},\\ 0 & \text{αλλιώς}\end{cases}$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και υπολογίστε το $\int_0^1 f(x)\,dx$.

---

(5) *(i)* Εάν η $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι η f είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα του $[a,b]$.

(ii) Έστω $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & x\in\mathbb{Q},\\ g(x) & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Δείξτε ότι εάν η συνάρτηση h είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα $[a,b]$, τότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$.

---

(6) Εάν η συνάρτηση $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι και οι συναρτήσεις $|f|$ και f^2 είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$.

---

(7) *(i)* Εάν η $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα, δείξτε ότι είναι *Riemann*-ολοκληρώσιμη.

(ii)* Έστω $f,g\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ αύξουσες και φραγμένες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\geq\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx.$$