

Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Β)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2019 Αναλυτικές Υποδείξεις.

(1) Δες σημειώσεις Μήτση Άσκηση 7.2 σελίδα 110.

(2) Έστω $P = \{x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$ διαμέριση του $[0, 1]$. Χρησιμοποιώντας ότι υπάρχουν άρρητοι σε κάθε διάστημα, έχουμε $L(f, P) = 0$. Άρα $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Θα δείξουμε ότι $U(f, P) \geq \frac{1}{4}$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\frac{1}{2} \in P$, τότε $x_{k_0} = \frac{1}{2}$ για κάποιο $k_0 \in \{1, \dots, n-1\}$. Χρησιμοποιώντας ότι υπάρχουν ρητοί σε κάθε διάστημα, έχουμε $M_k \geq \frac{1}{2}$ για κάθε $k \in \{k_0, \dots, n-1\}$. Άρα

$$U(f, P) \geq \sum_{k=k_0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=k_0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{4}$$

Γενικά μπορεί να μην έχουμε ότι $\frac{1}{2} \in P$, όμως αφού η $P \cup \frac{1}{2}$ είναι εκλέπτυνση της P , έχουμε $U(f, P) \geq U(f, P \cup \frac{1}{2}) \geq \frac{1}{4}$. Επομένως, $\int_0^1 f(x) dx \geq \frac{1}{4}$.

Αφού $\int_0^1 f(x) dx \neq \overline{\int_0^1 f(x) dx}$, η f δεν είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(3) 1η Απόδειξη: Δες σημειώσεις Μήτση Άσκηση 7.8 σελίδα 112.

2η Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που η συνάρτηση $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ διαφέρει από την f σε μία τιμή, έστω στο $x_0 \in [0, 1]$. Έστω M ένα άνω φράγμα των $|f|$ και $|g|$. Αφού η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ υπάρχουν διαμερίσεις P_n , $n \in \mathbb{N}$, του $[0, 1]$ με πλάτος $d_n \rightarrow 0$, ώστε $U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το x_0 ανήκει το πολύ σε δύο από τα υποδιαστήματα της P_n και στα υπόλοιπα υποδιαστήματα οι f και g ταυτίζονται. Συνεπώς $|U(f, P_n) - U(g, P_n)| \leq 2Md_n$ και $|L(f, P_n) - L(g, P_n)| \leq 2Md_n$. Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα παίρνουμε ότι

$$0 \leq U(g, P_n) - L(g, P_n) \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) + 4Md_n \rightarrow 0.$$

Άρα η g είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$. Επίσης έχουμε

$$\int_0^1 g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U(g, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \int_0^1 f(x) dx.$$

(4) (i) Δες σημειώσεις Μήτση Άσκηση 7.7 σελίδα 112.

(ii) 1η Απόδειξη: Από το (i) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $a > 0$ έχουμε $\int_a^1 f(x) dx = 0$. Όμως στο $[a, 1]$ η f διαφέρει από την ταυτοτικά 0 συνάρτηση μόνο σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία, άρα από την Άσκηση 3 έχουμε $\int_a^1 f(x) dx = 0$.

2η Απόδειξη: Για $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την διαμέριση P_n που περιλαμβάνει τα σημεία $0, \frac{1}{n}$, καθώς και n^2 σημεία τα οποία διαμερίζουν ομοιόμορφα το διάστημα $[\frac{1}{n}, 1]$. Είναι εύκολο να δείξετε ότι $L(f, P_n) = 0$ και $U(f, P_n) \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$. Επομένως $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = 0$ και το ζητούμενο έπεται άμεσα.

(5) (i) Από υπόθεση υπάρχουν διαμερίσεις $P_n, n \in \mathbb{N}$ του $[a, b]$ ώστε $U(f, P_n) - L(f, P_n) \rightarrow 0$. Προσθέτοντας τα σημεία c, d στις P_n παίρνουμε εκλεπτύνσεις \tilde{P}_n των P_n που επίσης ικανοποιούν $U(f, \tilde{P}_n) - L(f, \tilde{P}_n) \rightarrow 0$. Θεωρώντας μόνο τα σημεία των \tilde{P}_n που ανήκουν στο $[c, d]$ παίρνουμε διαμερίσεις Q_n του $[c, d]$ και είναι άμεσο ότι $U(f, Q_n) - L(f, Q_n) \leq U(f, \tilde{P}_n) - L(f, \tilde{P}_n)$. Επομένως έχουμε $U(f, Q_n) - L(f, Q_n) \rightarrow 0$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) Έστω ότι $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in [a, b]$ και υποθέτουμε πως $f(x_0) > g(x_0)$ (η άλλη περίπτωση είναι παρόμοια). Χρησιμοποιώντας την συνέχεια των f, g δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$ ώστε $f(x) \geq g(x) + \varepsilon$ για κάθε $x \in [c, d]$. Από αυτό συμπεραίνουμε εύκολα ότι για κάθε διαμέριση P του $[c, d]$ έχουμε $U(h, P) \geq L(h, P) + \varepsilon(d - c)$. Επομένως $\int_c^d h(x) dx \geq \int_c^d h(x) dx + \varepsilon(d - c)$, από το οποίο έπεται ότι η h δεν είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεσή μας και το (i).

(6) Δες σημειώσεις Μήτση Άσκηση 7.4 σελίδα 111.

(7) (i) Δες σημειώσεις Μήτση Άσκηση 7.3 σελίδα 110. Θα το αποδείξουμε και στην τάξη.

(ii)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
