

Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Β)

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(1) Δείξτε ότι η $f(x) = \begin{cases} (-1)^{1/x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και υπολογίστε το $\int_0^1 f(x) dx$.

(2) Βρείτε όλες τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν $f(x) = \int_0^x f(t) dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(3) Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $[0, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L > 0$. Δείξτε ότι

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = +\infty$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} = L$. (Μπορείτε να υποθέσετε ότι η f είναι συνεχής.)

(4) Έστω $f: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$f(x) \leq \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(5) Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο και $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

(6) Έστω $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ συνεχής και $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

(7)* Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχουν $g, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες, αύξουσες, και θετικές συναρτήσεις, ώστε $f = g - h$.