Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020
Αναλυτικές Υποδείξεις.

(**1**) (*i*) Έχουμε $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και $\|f_n - 0\|_{[0,1]} = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Έχουμε $\|f_n - 0\|_{\mathbb{R}} = 1$, άρα η ακολουθία f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

(*ii*) Έχουμε $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και με χρήση παραγώγων βρίσκουμε $\|f_n - 0\|_{[0,1]} = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to 0$, άρα $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

(*iii*) Παρατηρήστε ότι για κάθε $x > 0$ εάν $n > x$ έχουμε $\left[\frac{x}{n}\right] = 0$. Επομένως, $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $[1,+\infty)$. Έχουμε $\|f_n - 0\|_{[1,+\infty)} \geq f_n(n) = n \to \infty$, άρα η ακολουθία f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[1,+\infty)$.

(**2**) Έχουμε $f_n(x) \to e^x$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$ και για $0 \leq a < b$

$$\|f_n - e^x\|_{[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{x^2 e^x}{n^2 + x^2}\right| \leq \frac{b^2 e^b}{n^2} \to 0.$$

Επομένως, $f_n(x) \to e^x$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Οπότε, από γνωστό θεώρημα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^2 e^x}{n^2 + x^2}\, dx = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1.$$

(**3**) (*i*) Έστω $f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $f_n \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Για $x > 0$ έχουμε $f_n'(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$. Άρα η f_n είναι αύξουσα στο $[0,1]$, από το οποίο προκύπτει ότι $\|f_n - 0\|_{[0,1]} = f_n(1) = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 0$. Άρα $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Έχουμε $\|f_n\|_{[0,+\infty)} = +\infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η ακολουθία f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$. Επομένως και η ακολουθία $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,+\infty)$.

(*ii*) Από το (*i*) έχουμε ότι $\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n \to e^{x^2}$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Επομένως, από γνωστό θεώρημα, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^{x^2}\, dx.$$

(**4**) (*i*) Η ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα *Cauchy*, άρα για $\varepsilon = 1$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για $n \geq n_0$ ισχύει $\|P_n - P_{n_0}\|_{\mathbb{R}} \leq 1$. Όμως τα μόνα φραγμένα πολυώνυμα είναι τα σταθερά, άρα για $n \geq n_0$ υπάρχουν σταθερές $c_n \in \mathbb{R}$ ώστε $P_n = P_{n_0} + c_n$. Η ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει διότι η ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει.

(*ii*) Έστω P και $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπως στο (*i*) και $c_n \to c$. Τότε $P_n \to P + c$.

(**5**) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε εάν $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε για $n > n_0$ έχουμε $|x + \frac{1}{n} - x| < \delta$, οπότε $|f(x + \frac{1}{n}) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**6**) ($\Rightarrow$) Έστω $x_n \to x$ με $x_n, x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{[a,b]} + |f(x_n) - f(x)| \to 0$$

αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$ και f συνεχής στο x.

($\Leftarrow$) Έστω ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$, $n_k \to \infty$, και $x_{n_k} \in [a, b]$, $k \in \mathbb{N}$, ώστε

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Από το θεώρημα *Bolzano-Weierstrass* υπάρχει υποακολουθία $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ της $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και $x_0 \in [a, b]$ ώστε $x_{m_k} \to x_0$. Αφού f συνεχής στο x_0 έχουμε $f(x_{m_k}) \to f(x_0)$. Θέτουμε $x_n = x_0$ για $n \notin \{m_1, m_2, \ldots\}$. Τότε $x_n \to x_0$ και η (1) δίνει $f_n(x_n) \not\to f(x_0)$.

(**7**)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.
