Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020
Αναλυτικές Υποδείξεις.

(**1**) (i) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-1,2]$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε εάν $|x-y| < \delta$, $x, y \in [-1,2]$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|t_n| < \delta$ για $n > n_0$. Για αυτά τα n και για $x \in [0,1]$ έχουμε $|x + t_n - x| < \delta$ και $x + t_n \in [-1,2]$, οπότε $|f(x+t_n) - f(x)| < \varepsilon$.

(ii) Από τον ισοδύναμο ακολουθιακό ορισμό του ορίου, αρκεί να δείξουμε ότι εάν $t_n \to 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f(x+t_n) - f(x)|\, dx = 0$. Αυτό προκύπτει από το (i) και γνωστό θεώρημα.

(**2**) Δεδομένου $n \in \mathbb{N}$, από το θεώρημα *Weierstrass* υπάρχει πολυώνυμο p_n τέτοιο ώστε $\|f - p_n\|_{[-n,n]} \leq \frac{1}{n}$. Τότε για κάθε φραγμένο διάστημα $[a,b]$ για $n \geq \max\{|a|, |b|\}$ έχουμε $\|f - p_n\|_{[a,b]} \leq \|f - p_n\|_{[-n,n]} \leq \frac{1}{n}$. Επομένως, $\|f - p_n\|_{[a,b]} \to 0$.

(**3**) Από το θεώρημα *Weierstrass* υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $q_n \to f'$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Θέτουμε $p_n(x) = \int_a^x q_n(t)\, dt + f(a)$, $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Από το ΘΘΙΙ έχουμε $\int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$, επομένως

$$|p_n(x) - f(x)| = \left| \int_a^x (q_n(t) - f'(t))\, dt \right| \leq \|f' - q_n\|_{[a,b]} (b-a).$$

Αφού $\|f' - q_n\|_{[a,b]} \to 0$, έχουμε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Επίσης από το ΘΘΙ έχουμε $p_n' = q_n \to f'$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

(**4**) Εάν $g(x) = f(x) - x^{2018}$, έχουμε $\int_0^1 x^n g(x)\, dx = 0$ για $n = 0, 1, \ldots$. Από γνωστό αποτέλεσμα (που αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Weierstass*) έχουμε $g(x) = 0$. Άρα $f(x) = x^{2018}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(**5**) Από το θεώρημα *Weierstrass* υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $q_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Θέτουμε $p_n(x) = q_n(x) + f(a) - q_n(a)$. Παρατηρήστε ότι $p_n(a) = f(a)$, $n \in \mathbb{N}$. Αφού $q_n(a) \to f(a)$, έχουμε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

Για το τελευταίο ερώτημα, θέτουμε

$$p_n(x) = q_n(x) + f(a) - q_n(a) + \frac{x-a}{b-a}(f(b) - q_n(b) - f(a) + q_n(a)).$$

Παρατηρήστε ότι $p_n(a) = f(a)$, $p_n(b) = f(b)$, $n \in \mathbb{N}$. Αφού $q_n(a) \to f(a)$ και $q_n(b) \to f(b)$, έχουμε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

(**6**) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο q με ρητούς συντελεστές ώστε $\|f - q\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το θεώρημα $Weierstrass$ υπάρχει πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$ ώστε $\|f - p\|_{[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Αφού οι ρητοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς, για $k = 0, \ldots, n$ υπάρχουν $r_k \in \mathbb{Q}$ ώστε $|a_k - r_k| \leq \frac{\varepsilon}{2(d+1)c^k}$ όπου $c = \max\{|a|, |b|\}$. Θέτουμε $q(x) = \sum_{k=0}^{d} r_k x^k$ και έχουμε

$$\|f - q\|_{[a,b]} \leq \|f - p\|_{[a,b]} + \|p - q\|_{[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sum_{k=0}^{d} |a_k - r_k| c^d \leq \varepsilon.$$

Τα πολυώνυμα δεν μπορούν να έχουν πάντα ακέραιους συντελεστές. Για παράδειγμα εάν $f = \frac{1}{2}$, τότε $\|f - p\|_{[0,1]} \geq |\frac{1}{2} - p(0)| \geq \frac{1}{2}$ για κάθε πολυώνυμο p με ακέραιους συντελεστές.

(**7**)* Υπόδειξη αργότερα. Αν κάποια/κάποιος την λύσει μπορεί να μου δώσει τη λύση της/του γραπτώς για να την/τον συγχαρώ.