Ανάλυση ΙΙ (Τμήμα Α)

9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2020

(**1**) Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω είναι κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ με την Ευκλείδια και τη διακριτή μετρική, και αν δεν είναι βρείτε την κλειστότητά τους.

(*i*) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^{2019} + y^{2019} \leq 1\}$

(*ii*) $B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \colon m, n \in \mathbb{N}\}$.

(**2**) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η κλειστότητα $\overline{A}$ ενός υποσυνόλου A του X είναι κλειστό σύνολο. Συμπεράνετε ότι για κάθε $A \subset X$ ισχύει $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

(**3**) Έστω $x_n = (\frac{1}{n+k} + \frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $x_n \in \ell_2(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, και ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει με τη μετρική του $\ell_2(\mathbb{N})$.

(**4**) (*i*) Έστω $p \in [1, +\infty]$. Για ποιά $a > 0$ ισχύει ότι $(\frac{1}{k^a})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$;

(*ii*) Δείξτε ότι αν $1 \leq p < q \leq +\infty$, τότε $\ell_p(\mathbb{N}) \subset \ell_q(\mathbb{N})$ και ότι ο εγκλεισμός είναι γνήσιος.

(*iii*) Βρείτε ακολουθία $x_n \in \ell_1(\mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, και $x_0 \in \ell_1(\mathbb{N})$ ώστε $x_n \to^{d_\infty} x_0$ όμως $x_n \not\to^{d_1} x_0$.

(**5**) Στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε $d(m, n) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$, $m, n \in \mathbb{N}$.

(*i*) Δείξτε ότι η d είναι μετρική.

(*ii*) Περιγράψτε όλες τις συγκλίνουσες ακολουθίες και τα κλειστά σύνολα στον $(\mathbb{N}, d)$.

(**6**) Δύο μετρικές d, d' σε χώρο X λέγονται ισοδύναμες εάν υπάρχουν θετικές σταθερές C_1, C_2 ώστε

$$C_1 d'(x, y) \leq d(x, y) \leq C_2 d'(x, y), \qquad x, y \in X.$$

(*i*) Εάν οι μετρικές d, d' στον χώρο X είναι ισοδύναμες, δείξτε ότι οι μετρικοί χώροι (X, d) και (X, d') έχουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες και τα ίδια κλειστά σύνολα.

(*ii*) Δείξτε ότι στον $\mathbb{R}^d$ οι μετρικές d_p, $p \in [1, +\infty]$, που έχουμε ορίσει στο μάθημα, είναι όλες ισοδύναμες.

(**7**)* Δείξτε ότι κάθε υπεραριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών (με τη συνηθισμένη μετρική) έχει σημείο συσσώρευσης το οποίο είναι στοιχείο του συνόλου.
