Απειροστικός Λογισμός

Πραγματικές Συναρτήσεις
Μιας Πραγματικής Μεταβλητής

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Προκαταρκτικά 1

1. Οι σημειώσεις αυτές ασχολούνται με τον **απειροστικό λογισμό**, δηλαδή τον λογισμό των απειροστών μεγεθών, δηλαδή τον λογισμό των ορίων. Περιορίζονται στο πλαίσιο των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής με πραγματικές τιμές. Αφού αναφερθούν οι κυριότερες ιδιότητες των (πραγματικών) αριθμών, εισάγονται οι έννοιες του ορίου ακολουθίας και του ορίου συνάρτησης καθώς και η συγγενική έννοια της συνεχούς συνάρτησης. Κατόπιν, ο απειροστικός λογισμός χωρίζεται στον λογισμό των παραγώγων – τον **διαφορικό λογισμό** – και στον λογισμό των ολοκληρωμάτων – τον **ολοκληρωτικό λογισμό**. Τους δυο αυτούς λογισμούς ενώνει το Θεμελιώδες Θεώρημα του απειροστικού λογισμού. Οι σημειώσεις τελειώνουν με μερικά απλοϊκά ζητήματα προσεγγιστικών υπολογισμών και με τις σειρές αριθμών.

2. Στο πρόγραμμα σπουδών του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης υπάρχουν δυο μαθήματα σχετικά με τα παραπάνω θέματα. Το ένα είναι το μάθημα πρώτου εξαμήνου Απειροστικός Λογισμός Ι, ένα «υπολογιστικό» μάθημα με έμφαση στον χειρισμό των ορίων, των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων, και το άλλο είναι το μάθημα τρίτου εξαμήνου Εισαγωγή στην Ανάλυση Ι, ένα «θεωρητικό» μάθημα με έμφαση στη θεμελίωση των εννοιών και στις θεωρητικές αποδείξεις. Οι σημειώσεις αυτές απευθύνονται στους φοιτητές του πρώτου μαθήματος. Αυτός ο χωρισμός – με τον οποίο *δεν* αισθάνομαι τόσο άνετα – καθορίζει και το επίπεδο αυτών των σημειώσεων. Πιο συγκεκριμένα:

Το επίπεδο των σημειώσεων είναι στοιχειώδες. Δηλαδή δεν ασχολούνται με τη βαθύτερη ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, τη λεγόμενη Ιδιότητα Συνέχειας, οπότε και δεν αποδεικνύουν κανένα από τα αποτελέσματα που στηρίζονται στην ιδιότητα αυτή. Για παράδειγμα, δεν αποδεικνύεται η ύπαρξη ριζών των θετικών αριθμών ούτε τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις ούτε η ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων. Επίσης, δεν αναφέρονται καν διάφορα μη στοιχειώδη αποτελέσματα, όπως το θεώρημα των Bolzano - Weierstrass για ακολουθίες.

Η Ιδιότητα Συνέχειας δεν αναφέρεται καν εκτός σε ελάχιστα σημεία – και πάλι, όχι ως τέτοια – και μόνο για να στηριχτούν στοιχειωδώς οι ανάλογες περιγραφές. Μάλιστα, η Ιδιότητα Συνέχειας αναφέρεται όχι με τη λιγότερο εύληπτη διατύπωσή της με το ελάχιστο άνω φράγμα αλλά με την εξής απλούστερη – και ισοδύναμη – μορφή της: *αν έχουμε δυο μη κενά υποσύνολα της πραγματικής ευθείας και το ένα βρίσκεται αριστερά του άλλου, τότε υπάρχει σημείο της ευθείας που βρίσκεται ανάμεσα στα δυο αυτά σύνολα.*

3. Μια προειδοποίηση. Το επίπεδο των σημειώσεων αυτών είναι στοιχειώδες αλλά *όχι εύκολο*· οι σημειώσεις είναι αρκετά πυκνογραμμένες και απαιτούν συγκέντρωση, επιμονή και, κυρίως, γρήγορη προσαρμογή των φοιτητών του πρώτου εξαμήνου σε τρόπο εργασίας αρκετά διαφορετικό από αυτόν που έμαθαν στο λύκειο.

4. Οι σημειώσεις δίνουν μεγάλη έμφαση στην έννοια του ορίου – ακολουθίας και συνάρτησης. Αναλύονται διεξοδικά οι ορισμοί των ορίων σε όλες τις περιπτώσεις

και υπάρχουν πάρα πολλά παραδείγματα υπολογισμού του n_0 και του δ από τον ϵ. Οι φοιτητές πρέπει να εξασκηθούν αρκετά με τέτοιους υπολογισμούς *ακριβώς σε ένα «υπολογιστικό» μάθημα*, πριν αντιμετωπίσουν πιο θεωρητικές καταστάσεις σε κατοπινότερα μαθήματα. Είναι αρκετοί οι φοιτητές που αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση του ρόλου των ποσοτήτων δ και ϵ (και των ανάλογων ποσοτήτων στις άλλες περιπτώσεις) αλλά υπάρχουν και πάρα πολλοί άλλοι οι οποίοι, με κάποια εξάσκηση, ξεπερνούν σχετικά εύκολα τις όποιες αρχικές δυσκολίες.

5. Από πολύ νωρίς – από το πρώτο μόλις κεφάλαιο – δίνονται κάποιοι μη τετριμμένοι ορισμοί: ο ορισμός της ρίζας θετικού αριθμού και ο συνακόλουθος ορισμός της δύναμης με ρητό εκθέτη, ο ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη, ο ορισμός του λογαρίθμου και οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών και των αντιστρόφων τους.

Οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών είναι γεωμετρικοί και βασίζονται στον τριγωνομετρικό κύκλο. Αυτό κρίνεται απαραίτητο διότι αφ΄ ενός μεν οι αναλυτικοί ορισμοί μπορούν να δοθούν μόνο σε πολύ κατοπινότερο στάδιο αφ΄ ετέρου δε οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι τόσο βασικές ώστε δεν είναι – και παιδαγωγικά – σωστό να μαθαίνει κάποιος τις έννοιες του απειροστικού λογισμού χωρίς ταυτόχρονα να τις εφαρμόζει στις συναρτήσεις αυτές.

Οι άλλοι τρεις ορισμοί είναι αναλυτικοί ορισμοί – δηλαδή, βασίζονται μόνο στις ιδιότητες των αριθμών – χωρίς, όμως, πλήρη αιτιολόγηση, αφού αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε την Ιδιότητα Συνέχειας. Ίσως υπάρξει κάποια ένσταση διότι σε διάφορα βιβλία επιλέγεται διαφορετική σειρά παρουσίασης αυτών των ορισμών. Για παράδειγμα, ο ορισμός της ρίζας προκύπτει ως εφαρμογή του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής στη συνάρτηση $y = x^n$, ο ορισμός του λογαρίθμου γίνεται με το ολοκλήρωμα $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ και ο ορισμός της δύναμης με άρρητο εκθέτη γίνεται μέσω της εκθετικής συνάρτησης η οποία ορίζεται ως αντίστροφη της λογαριθμικής. Η παρουσίαση αυτή, παρά το ότι είναι πολύ βολική, μάλλον δεν είναι «φυσιολογική» εννοιολογικά.

Πάντως, εκτός από τους ορισμούς στο πρώτο κεφάλαιο, περιγράφονται αναλυτικά και μερικοί άλλοι ευρέως χρησιμοποιούμενοι ορισμοί των δυνάμεων με άρρητο εκθέτη, των λογαρίθμων και των τριγωνομετρικών αριθμών. Οι ορισμοί αυτοί δεν εντάσσονται στο κυρίως κείμενο. Συγκεκριμένα, περιγράφονται: (i) ο ορισμός της λογαριθμικής συνάρτησης μέσω ολοκληρώματος (του $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$) και ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης ως αντίστροφης της λογαριθμικής στο όγδοο κεφάλαιο, (ii) ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης μέσω σειράς (της εκθετικής δυναμοσειράς) καθώς και μέσω ακολουθιών (με ρητές προσεγγίσεις των άρρητων εκθετών) – και οι αντίστοιχοι ορισμοί της λογαριθμικής συνάρτησης – στο δέκατο κεφάλαιο, (iii) ο ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω ολοκληρώματος (του $\arctan x = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$) στο όγδοο κεφάλαιο και (iv) ο ορισμός των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μέσω σειρών (των δυναμοσειρών του συνημιτόνου και του ημιτόνου) στο δέκατο κεφάλαιο. Επίσης, μετά από κάθε ορισμό περιγράφεται συνοπτικά και η συνεπαγώμενη ανάπτυξη των ιδιοτήτων της αντίστοιχης ορισθείσας συνάρτησης.

6. Ο ορισμός του ολοκληρώματος βασίζεται στα αθροίσματα Riemann και όχι στα

αθροίσματα Darboux. Ο λόγος είναι διπλός. Αφ΄ ενός μεν ο ορισμός του ολοκληρώματος μέσω των αθροισμάτων Darboux απαιτεί μεγαλύτερη προετοιμασία αλλά και την έννοια του ελάχιστου άνω φράγματος – δηλαδή την Ιδιότητα της Συνέχειας – αφ΄ ετέρου δε τα αθροίσματα Riemann συνδέονται πιο άμεσα και φυσιολογικά με τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων.

7. Οι αποδείξεις που περιέχονται στις σημειώσεις αυτές είναι πολλές. Όλες σχεδόν οι αποδείξεις παρουσιάζονται με μικρά τυπογραφικά στοιχεία ώστε κατά την πρώτη ανάγνωση οι φοιτητές να επικεντρώσουν την προσοχή τους στις διατυπώσεις των αποτελεσμάτων, στα παραδείγματα και **κυρίως στις ασκήσεις**. Ας αποφασίσει ο εκάστοτε διδάσκων ποιες από αυτές τις αποδείξεις θα παρουσιάσει στον πίνακα· η πίεση χρόνου δεν αφήνει πολλά περιθώρια!

Οι φοιτητές από τη μεριά τους καλά θα κάνουν να προσπαθήσουν – με την καθοδήγηση, ίσως, και του διδάσκοντος ως προς την επιλογή – να δοκιμάσουν τις δυνάμεις τους μελετώντας κάποιες τουλάχιστον από τις αποδείξεις· όσο περισσότερες τόσο το καλύτερο.

8. Η μεγαλύτερη ωφέλεια για τους φοιτητές θα προκύψει από την επίλυση όσο το δυνατό περισσότερων ασκήσεων. Στις σημειώσεις αυτές δεν υπάρχουν – συνειδητά, τουλάχιστον – πολύ δύσκολες ασκήσεις. Η επιλογή των ασκήσεων έγινε όχι για να δυσκολευτεί ο εξαιρετικός φοιτητής αλλά μάλλον για να ανεβάσει το επίπεδό του ο επιμελής μέτριος φοιτητής. Γι αυτό σε πάρα πολλές ασκήσεις δίνονται υποδείξεις. Μερικές ασκήσεις είναι λίγο πιο δύσκολες από τις άλλες· αυτές σημειώνονται με $^{(*)}$ ή $^{(**)}$.

9. Οι σημειώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν σε μια πρώτη μορφή το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2007 - 08 με τους φοιτητές του Τμήματος Επιστήμης Υπολογιστών και σε μια δεύτερη βελτιωμένη μορφή το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2008 - 09 με τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών. Η παρούσα μορφή είναι διαφορετική από τις δυο πρώτες σε πάρα πολλά σημεία· ελπίζω προς το καλύτερο.

Πρέπει να πω ότι αυτή η τελική μορφή των σημειώσεων οφείλει πολλά στους πρωτοετείς φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών – όσο κι αν αυτοί δεν το συνειδητοποίησαν – του χειμερινού εξαμήνου που μόλις τέλειωσε: σε όλους και, ειδικώτερα, σε μερικούς πραγματικά εξαιρετικούς φοιτητές. Πολλές από τις αλλαγές οφείλονται σε ερωτήσεις, παρατηρήσεις και παρεμβάσεις τους.

Τέλος, επειδή είναι σαφές ότι κι αυτή η μορφή απέχει αρκετά από το να είναι βέλτιστη, είναι απείρως ευπρόσδεκτες οποιεσδήποτε επισημάνσεις λαθών αλλά και παρατηρήσεις ως προς το στυλ παρουσίασης ή την επιλογή των θεμάτων αυτών των σημειώσεων.

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης

Φεβρουάριος 2009.

Προκαταρκτικά 2

Αυτή είναι η τέταρτη μορφή των σημειώσεων. Έχουν διορθωθεί αρκετά λάθη (πολλά επουσιώδη αλλά και μερικά σημαντικά) και έχουν γίνει αρκετές αλλαγές στο στυλ παρουσίασης. Μερικές από αυτές είναι οι εξής (σε αύξουσα σειρά σπουδαιότητας). Οι πλάγιες ασύμπτωτες μεταφέρθηκαν από το έκτο στο τέταρτο κεφάλαιο. Το σύμβολο $\lim_{x\to\xi\,(x\neq\xi)}$, στο οποίο είναι *εμφανές* το ότι η μεταβλητή x δεν είναι ίση με το όριό της ξ, γράφεται τώρα με το παραδοσιακό σύμβολο $\lim_{x\to\xi}$, στο οποίο *υπονοείται* το ότι η μεταβλητή x δεν είναι ίση με το όριό της ξ. Υπάρχουν περισσότερα παραδείγματα υπολογισμού ολοκληρωμάτων ρητών συναρτήσεων. Παραλείπονται οι έννοιες της γενικής αντιπαραγώγου και του γενικού αόριστου ολοκληρώματος και μιλάμε μόνο για αντιπαραγώγους και αόριστα ολοκληρώματα. Η ουσιαστικότερη αλλαγή είναι στον τρόπο παρουσίασης της έννοιας του ορίου ακολουθίας και συνάρτησης.

Μιχάλης Παπαδημητράκης

Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης

Ιανουάριος 2010.

Βιβλιογραφία

Calculus ή, σε μετάφραση, *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, T. Apostol.

Differential and Integral Calculus, R. Courant.

Introduction to Calculus and Analysis, R. Courant - F. John.

A Course of Pure Mathematics, G. Hardy.

A Course of Higher Mathematics, V. Smirnov.

Advanced Calculus (Schaum's Outline Series), M. Spiegel.

The Calculus – A Genetic Approach, O. Toeplitz.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Οι πραγματικοί αριθμοί.

Οι αριθμοί και η γεωμετρική τους αναπαράσταση. Η Αρχιμήδεια Ιδιότητα. Ακέραιο μέρος. Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες, ρίζες, δυνάμεις με ρητούς εκθέτες, δυνάμεις με άρρητους εκθέτες. Λογάριθμοι. Τριγωνομετρικοί και αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

1.1 Η πραγματική ευθεία.

Όλοι έχουμε στοιχειώδη γνώση των **πραγματικών αριθμών** και των ιδιοτήτων τους. Τους πραγματικούς αριθμούς θα τους λέμε, απλώς, *αριθμούς*.

Το άθροισμα $x+y$, η διαφορά $x-y$, το γινόμενο xy και ο λόγος $\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ αριθμών x, y είναι αριθμοί. Οι ιδιότητες των πράξεων (αντιμεταθετικότητα, προσεταιριστικότητα κλπ.) είναι γνωστές από το γυμνάσιο.

Α. Φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι.

Οι απλούστεροι αριθμοί είναι οι **φυσικοί** $1, 2, 3, \ldots$, οι **ακέραιοι** $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$ και οι **ρητοί**, δηλαδή οι λόγοι $\frac{m}{n}$, όπου m, n είναι ακέραιοι και $n \neq 0$. Κάθε ρητός γράφεται *με άπειρους τρόπους* ως λόγος ακεραίων: όλοι οι λόγοι $\frac{\pm m}{\pm n}$, $\frac{\pm 2m}{\pm 2n}$, $\frac{\pm 3m}{\pm 3n}$, $\ldots$ είναι μεταξύ τους ίσοι. Κάθε ρητός μπορεί να γραφτεί ως λόγος $\frac{m}{n}$ έτσι ώστε ο m να είναι ακέραιος και ο n *φυσικός*, δηλαδή θετικός ακέραιος. Για παράδειγμα, ο $\frac{4}{-3}$ μπορεί να γραφτεί $\frac{-4}{3}$ και ο $\frac{-4}{-3}$ μπορεί να γραφτεί $\frac{4}{3}$.

Είναι φανερό ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι υποσύνολο του συνόλου των ακεραίων και, επειδή κάθε ακέραιος m είναι ίσος με τον ρητό $\frac{m}{1}$, το σύνολο των ακεραίων είναι υποσύνολο του συνόλου των ρητών.

Το άθροισμα και το γινόμενο φυσικών είναι φυσικοί. Το άθροισμα, το γινόμενο και η διαφορά ακεραίων είναι ακέραιοι. Τέλος, το άθροισμα, το γινόμενο, η διαφορά και ο λόγος ρητών είναι ρητοί.

Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί χαρακτηρίζονται **άρρητοι**. Τέτοιοι αριθμοί ήταν γνωστοί από την αρχαιότητα· για παράδειγμα, ο λόγος του μήκους της διαγωνίου προς το μήκος της πλευράς οποιουδήποτε τετραγώνου.

Με το σύμβολο $\mathbf{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των αριθμών. Επίσης, με τα σύμβολα $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ και $\mathbf{Q}$ συμβολίζουμε τα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών, αντιστοίχως. Προσέξτε: μερικά βιβλία θεωρούν φυσικό και τον 0, οπότε με $\mathbf{N}$ συμβολίζουν το σύνολο των $0, 1, 2, \dots$ και με $\mathbf{N}^*$ το σύνολο των $1, 2, \dots$.

Β. Ανισότητες, απόλυτες τιμές.

Οι ιδιότητες των ανισοτήτων είναι γνωστές. Να οι πιο βασικές.

Πρόταση 1.1 (1) *Αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$. Αν μια τουλάχιστον από τις δυο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια, τότε και η τελική είναι γνήσια ανισότητα.*
(2) *Αν $x \leq y$, τότε $x + z \leq y + z$ και $x - z \leq y - z$.*
(3) *Αν $x \leq y$ και $z \leq w$, τότε $x + z \leq y + w$. Αν μια τουλάχιστον από τις δυο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια, τότε και η τελική είναι γνήσια ανισότητα.*
(4) *Αν $x \leq y$ και $z > 0$, τότε $xz \leq yz$ και $\frac{x}{z} \leq \frac{y}{z}$.*
(5) *Αν $x \leq y$ και $z < 0$, τότε $xz \geq yz$ και $\frac{x}{z} \geq \frac{y}{z}$.*
(6) *Αν $0 < x \leq y$ και $0 < z \leq w$, τότε $0 < xz \leq yw$. Αν μια τουλάχιστον από τις δυο αρχικές ανισότητες είναι γνήσια, τότε και η τελική είναι γνήσια ανισότητα.*

Η **απόλυτη τιμή** ενός αριθμού x συμβολίζεται $|x|$ και ορίζεται να είναι

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0, \\ -x, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

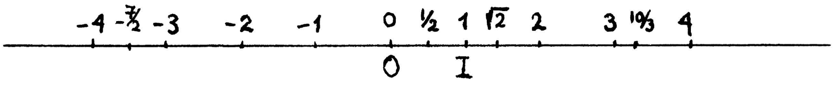
Προφανώς, η απόλυτη τιμή κάθε αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

Πρόταση 1.2 (1) $|xy| = |x||y|$.
(2) ***Τριγωνική ανισότητα.*** $\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.
(3) *Αν $y \neq 0$, τότε $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.*
(4) *$|x| \leq a$ αν και μόνο αν $-a \leq x \leq a$.*
(5) *$|x| < a$ αν και μόνο αν $-a < x < a$.*

Ο μεγαλύτερος από δυο αριθμούς x, y συμβολίζεται $\max\{x, y\}$ και ο μικρότερος $\min\{x, y\}$. Τα σύμβολα αυτά χρησιμοποιούνται και για περισσότερους από δυο αριθμούς: $\max\{x_1, \dots, x_n\}$ και $\min\{x_1, \dots, x_n\}$. Αν ένα υποσύνολο A του $\mathbf{R}$ έχει **μέγιστο στοιχείο**, δηλαδή στοιχείο του A μεγαλύτερο από κάθε άλλο στοιχείο του A, τότε το στοιχείο αυτό ονομάζεται και **maximum** του A και συμβολίζεται $\max A$. Επίσης, αν το A έχει **ελάχιστο στοιχείο**, τότε αυτό ονομάζεται και **minimum** του A και συμβολίζεται $\min A$.

Γ. Η γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathbf{R}$.

Γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί αναπαρίστανται από σημεία ευθείας ως εξής. Θεωρούμε αυθαίρετη ευθεία γραμμή και ξεχωρίζουμε αυθαίρετο σημείο της O, το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 0, και δεύτερο αυθαίρετο σημείο I, το οποίο αναπαριστά τον αριθμό 1. Η απόσταση του I από το O παίζει τον ρόλο της *μονάδας μέτρησης αποστάσεων* πάνω στην ευθεία. Τώρα, κάθε άλλος αριθμός x αναπαρίσταται από το αντίστοιχο σημείο X της ευθείας το οποίο βρίσκεται στην ίδια μεριά του O στην οποία βρίσκεται και το I, αν $x > 0$, και στην αντίθετη μεριά του O, αν $x < 0$, και του οποίου η απόσταση από το O είναι ίση με $|x|$. Επομένως, κάθε σημείο της ευθείας αναπαριστά ακριβώς έναν αριθμό και κάθε αριθμός αναπαρίσταται από ακριβώς ένα σημείο της ευθείας. Άρα τα σημεία της ευθείας είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τους αριθμούς.



Σχήμα 1.1: Η πραγματική ευθεία.

Κάθε ευθεία που χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς την ονομάζουμε **πραγματική ευθεία** και στο εξής δε θα κάνουμε διάκριση ανάμεσα στο οποιοδήποτε σημείο X μιας πραγματικής ευθείας και στον αριθμό x που αναπαρίσταται από το σημείο αυτό. Θα λέμε «το σημείο x» καθώς και «ο αριθμός x». Επίσης, θα λέμε «ρητά σημεία» και «ακέραια σημεία» της πραγματικής ευθείας.

Είναι φανερό από τον κανόνα αντιστοίχισης αριθμών και σημείων ότι η απόσταση κάθε σημείου x της πραγματικής ευθείας από το σημείο 0 είναι ίση με $|x|$. Επίσης, γενικότερα, γνωρίζουμε ότι η απόσταση οποιωνδήποτε σημείων x, y της πραγματικής ευθείας είναι ίση με $|x - y|$.

Τέλος, γνωρίζουμε τη σχέση των ανισοτήτων ανάμεσα σε αριθμούς με τη διάταξη των αντίστοιχων σημείων της πραγματικής ευθείας: είναι $x < y$ αν και μόνο αν τα σημεία x, y έχουν την ίδια διάταξη με τα σημεία $0, 1$, αντιστοίχως. Δηλαδή, αν η ευθεία είναι οριζόντια και το σημείο 1 είναι δεξιά του σημείου 0, τότε: είναι $x < y$ αν και μόνο αν το σημείο y είναι δεξιά του σημείου x. Αν η ευθεία είναι κατακόρυφη και το σημείο 1 είναι πάνω από το σημείο 0, τότε: είναι $x < y$ αν και μόνο αν το σημείο y είναι πάνω από το σημείο x.

Εμείς θα ακολουθούμε τη συνήθη πρακτική: για τη γεωμετρική αναπαράσταση των αριθμών θα χρησιμοποιούμε *οριζόντια ευθεία με το σημείο* 1 *δεξιά του σημείου* 0. Εναλλακτικά, όταν χρειαζόμαστε και δεύτερη ευθεία (για παράδειγμα, όταν σχεδιάζουμε γραφήματα συναρτήσεων) θα χρησιμοποιούμε και *κατακόρυφη ευθεία με το σημείο* 1 *πάνω από το σημείο* 0.

Δ. Διαστήματα και τα σύμβολα $\pm\infty$.

Τα **διαστήματα** είναι χαρακτηριστικά υποσύνολα του $\mathbf{R}$. Αν $a < b$, ορίζουμε $(a, b) = \{x : a < x < b\}$, $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ και $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$. Αν $a \leq b$, ορίζουμε $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$. Όλα αυτά χαρακτηρίζονται **φραγμένα** διαστήματα με άκρα a, b. Από αυτά το (a, b) χαρακτηρίζεται **ανοικτό** διάστημα και το $[a, b]$ **κλειστό** διάστημα. Κατόπιν ορίζουμε $(a, +\infty) = \{x : x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x : x < b\}$, $[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$ και $(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$. Αυτά χαρακτηρίζονται **μη φραγμένα** διαστήματα (ή *ημιευθείες*) και τα δυο πρώτα χαρακτηρίζονται **ανοικτά** διαστήματα (ή *ανοικτές* ημιευθείες) ενώ τα δυο τελευταία **κλειστά** διαστήματα (ή *κλειστές* ημιευθείες). Φυσικά, ορίζεται και το μη φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$, δηλαδή ολόκληρη η πραγματική ευθεία.

Πρέπει να τονίσουμε ότι τα σύμβολα $+\infty, -\infty$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά *σκέτα σύμβολα*· τα $\pm\infty$ δεν είναι αριθμοί. Μπορούμε να *σκεφτόμαστε* το $+\infty$ ως ένα «σημείο» που είναι δεξιά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μια «ποσότητα» που είναι μεγαλύτερη από κάθε αριθμό και το $-\infty$ ως ένα «σημείο» που είναι αριστερά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μια «ποσότητα» που είναι μικρότερη από κάθε αριθμό. Αυτός είναι ο λόγος που επεκτείνουμε τη χρήση των συμβόλων $<$ και $>$ των ανισοτήτων, γράφοντας για κάθε αριθμό x

$$-\infty < x, \qquad x < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Είναι, ίσως, περιττό να αναφέρουμε ότι τα «σημεία» ή «ποσότητες» $+\infty$ και $-\infty$ δεν έχουν υλική υπόσταση και ότι είναι δημιουργήματα της φαντασίας – πολύ φυσιολογικά και χρήσιμα.

Θα ξαναδούμε τα σύμβολα $\pm\infty$ όταν θα μελετήσουμε την έννοια του *ορίου*.

Ε. Η Αρχιμήδεια Ιδιότητα.

Αν έχουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη 1 και b, τότε, αν πάρουμε έναν *αρκετά μεγάλο* αριθμό αντιγράφων του πρώτου και τα κολλήσουμε το ένα μετά το άλλο πάνω στην ίδια ευθεία, το ευθ. τμήμα που θα προκύψει θα έχει μήκος μεγαλύτερο από το μήκος του δεύτερου ευθ. τμήματος. Το *πόσο μεγάλο* αριθμό αντιγράφων χρειαζόμαστε εξαρτάται, φυσικά, από το μέγεθος του δεύτερου ευθ. τμήματος (σε σχέση με τη μονάδα μέτρησης αποστάσεων). Η μαθηματική έκφραση αυτής της εμπειρικά προφανούς ιδιότητας είναι: *για κάθε $b > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε να είναι $n \cdot 1 > b$.* Είναι φανερό ότι αυτό ισχύει και για $b \leq 0$ και, επομένως:

Σχήμα 1.2: Υπάρχει κάποιος φυσικός $n > b$.

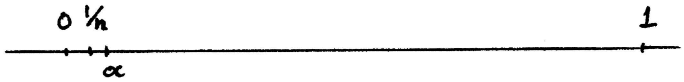
Θεώρημα 1.1 *Για κάθε b υπάρχει φυσικός $n > b$.*

Το Θεώρημα 1.1 συμπληρώνεται ως εξής. Αφού υπάρχει κάποιος φυσικός n μεγαλύτερος από τον b, τότε *και όλοι οι επόμενοι φυσικοί* $n+1, n+2, n+3, \ldots$ *είναι μεγαλύτεροι από τον b.* Δηλαδή:

Όσο μεγάλος κι αν είναι ένας αριθμός, είναι μεγαλύτεροί του όλοι οι φυσικοί από κάποιον και πέρα.

Αν πάρουμε $b = \frac{1}{a}$, όπου $a > 0$, τότε από το Θεώρημα 1.1 συνεπάγεται:

Πρόταση 1.3 ***Αρχιμήδεια Ιδιότητα.*** *Για κάθε $a > 0$ υπάρχει φυσικός n ώστε να είναι $\frac{1}{n} < a$.*



Σχήμα 1.3: Υπάρχει φυσικός n ώστε $\frac{1}{n} < a$.

Παρατηρούμε πάλι ότι, αφού υπάρχει κάποιος $\frac{1}{n}$ μικρότερος από τον a, συνεπάγεται ότι *και όλοι οι επόμενοι αριθμοί* $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+3}$, ... *είναι μικρότεροι από τον* a. Άρα η Αρχιμήδεια Ιδιότητα συμπληρώνεται ως εξής.

Όσο μικρός κι αν είναι ένας θετικός αριθμός, όλοι οι αντίστροφοι φυσικών από κάποιον και πέρα είναι μικρότεροί του.

Το Θεώρημα 1.1 και η ισοδύναμη Αρχιμήδεια Ιδιότητα θα παίξουν σημαντικό ρόλο αργότερα στη μελέτη της έννοιας του ορίου ακολουθίας.

Πρόταση 1.4 *Για κάθε x υπάρχει μοναδικός ακέραιος k ώστε $k \leq x < k+1$.*

Το αποτέλεσμα αυτό λέει με άλλα λόγια ότι *κάθε* αριθμός x ανήκει σε *ένα ακριβώς* διάστημα $[k, k+1)$, όπου ο k είναι ακέραιος. Αυτό σημαίνει ότι τα διαδοχικά διαστήματα ..., $[-3,-2)$, $[-2,-1)$, $[-1,0)$, $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, ... είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους ισούται με ολόκληρη την πραγματική ευθεία $(-\infty, +\infty)$.

Ο ακέραιος k με την ιδιότητα $k \leq x < k+1$ ονομάζεται **ακέραιο μέρος** του x και συμβολίζεται $[x]$.

Παράδειγμα: $[3] = 3$, $[-4] = -4$, $[\frac{8}{5}] = 1$, $[\frac{2}{3}] = 0$, $[-\frac{8}{5}] = -2$.

Το Θεώρημα 1.1 και οι Προτάσεις 1.3 και 1.4 δε θα αποδειχθούν σ' αυτές τις σημειώσεις.

Ασκήσεις.

A. Ρητοί, άρρητοι.

1. Αν ο r είναι ρητός και ο a είναι άρρητος, αποδείξτε ότι ο $r + a$ είναι άρρητος. Αν ο r είναι ρητός $\neq 0$ και ο a είναι άρρητος, αποδείξτε ότι ο ra είναι άρρητος.
2. Αν ο a είναι άρρητος, οι p, q, r, s είναι ρητοί και $p + qa = r + sa$, αποδείξτε ότι $p = r$ και $q = s$.

B. Ανισότητες, απόλυτες τιμές.

1. Αν $x \leq y < 0$ και $z \leq w < 0$, αποδείξτε ότι $0 < yw \leq xz$.

2. Αν $x \le y$, $z \le w$, $t \le s$ και $x+z+t = y+w+s$, αποδείξτε ότι $x = y$, $z = w$ και $t = s$.

   Αν $0 < x \le y$, $0 < z \le w$, $0 < t \le s$ και $xzt = yws$, αποδείξτε ότι $x = y$, $z = w$ και $t = s$.

3. Αποδείξτε ότι $|x+y| = |x| + |y|$ αν και μόνο αν $x, y \ge 0$ ή $x, y \le 0$.

   Αποδείξτε ότι $|x+y+z| \le |x|+|y|+|z|$. Επίσης, αποδείξτε ότι $|x+y+z| = |x|+|y|+|z|$ αν και μόνο αν $x, y, z \ge 0$ ή $x, y, z \le 0$.

4. Αποδείξτε ότι $t \le x$ και $t \le y$ αν και μόνο αν $t \le \min\{x, y\}$.

   Αποδείξτε ότι $t \ge x$ και $t \ge y$ αν και μόνο αν $t \ge \max\{x, y\}$.

5. Αποδείξτε ότι $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ και $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

6. Ποια από τα παρακάτω σύνολα έχουν μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο;

$$[a, b], \quad (a, b), \quad [a, b), \quad \mathbf{N}, \quad \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Q}, \quad \Big\{\frac{1}{n} : n \text{ είναι φυσικός}\Big\}.$$

Γ. Η γεωμετρική αναπαράσταση.

1. Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο των πρώτων δυο ιδιοτήτων στην Πρόταση 1.1 καθώς και των τελευταίων δυο ιδιοτήτων στην Πρόταση 1.2;

2. Μέσω της γεωμετρικής αναπαράστασης αιτιολογήστε την εξής πρόταση.

   Αν $a \le x \le b$ και $a \le y \le b$, τότε $|x-y| \le b-a$.

   Κατόπιν αποδείξτε την με μαθηματικό τρόπο.

3. Αν γνωρίζουμε τα σημεία Χ, Υ της πραγματικής ευθείας που αναπαριστούν τους x, y, περιγράψτε γεωμετρικές κατασκευές οι οποίες καταλήγουν στην εύρεση των σημείων που αναπαριστούν τους $x+y, x-y, xy$ και $\frac{x}{y}$.

   (Υπόδειξη για το xy: Έστω $x, y > 0$. Φτιάξτε δεύτερη πραγματική ευθεία ώστε οι δυο ευθείες να έχουν την ίδια μονάδα μέτρησης και το σημείο τομής τους Ο να αναπαριστά τον 0 και στις δυο τους. Έστω Ι′, Υ′ τα σημεία της δεύτερης ευθείας που αναπαριστούν τους $1, y$, αντιστοίχως. Από το Υ′ φέρτε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα Ι′, Χ. Αν αυτή τέμνει την πρώτη πραγματική ευθεία στο Κ, τότε ποιον αριθμό αναπαριστά το Κ;)

Δ. Διαστήματα.

1. Για καθεμιά από τις παρακάτω ανισότητες γράψτε σε μορφή διαστήματος ή ένωσης διαστημάτων το σύνολο των x για τους οποίους είναι αληθής.

$$|x+1| > 2, \quad |x-1| < |x+1|, \quad \frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}, \quad (x-2)^2 \ge 4,$$

$$|x^2 - 7x| > x^2 - 7x, \quad \frac{(x-1)(x+4)}{(x-7)(x+5)} > 0, \quad \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \le 0.$$

2. Για καθένα από τα επόμενα σύνολα βρείτε *μία* ανισότητα με μεταβλητή x ώστε το σύνολο αυτό να είναι το σύνολο των x για τους οποίους η ανισότητα είναι αληθής.

$$(-\infty, 3], \quad (2, +\infty), \quad (3, 7), \quad (-\infty, -2) \cup (1, 4) \cup (7, +\infty),$$
$$[-2, 4] \cup [6, +\infty), \quad [-1, 4) \cup (4, 8], \quad (-\infty, -2] \cup [1, 4) \cup [7, +\infty).$$

Ε. Ακέραιο μέρος.

1. Για ποιους x ισχύει $[-x] = -[x]$;

2. Αν ο k είναι ακέραιος, αποδείξτε ότι $[x+k] = [x] + k$.

   (Υπόδειξη: Το να αποδείξουμε ότι $[y] = m$ ισοδυναμεί με το να αποδείξουμε ότι ο m είναι ακέραιος και ότι $m \leq y < m+1$.)

3. Αποδείξτε ότι $[x+y] = [x]+[y]$ ή $[x+y] = [x]+[y]+1$ και βρείτε παραδείγματα και για τις δυο περιπτώσεις.

   Αποδείξτε ανάλογο συμπέρασμα για το $[x+y+z]$.

4. Αποδείξτε ότι, αν $0 < x \leq 1$, τότε υπάρχει μοναδικός φυσικός n ώστε να είναι $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ και γράψτε τύπο για τον n συναρτήσει του x.

5. Γνωρίζουμε ότι για κάθε b υπάρχει φυσικός $n > b$. Πώς θα εκφράσετε τον *ελάχιστο* τέτοιο φυσικό n συναρτήσει του b;

   Πώς θα εκφράσετε συναρτήσει του b τον *ελάχιστο* φυσικό $n \geq b$;

   Έστω $a > 0$. Η Αρχιμήδεια Ιδιότητα λέει ότι υπάρχει φυσικός n ώστε να είναι $\frac{1}{n} < a$. Πώς θα εκφράσετε τον *ελάχιστο* τέτοιο φυσικό n συναρτήσει του a;

6. Αποδείξτε ότι $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$, $[x] + [x + \frac{1}{3}] + [x + \frac{2}{3}] = [3x]$ και, γενικότερα, $[x] + [x + \frac{1}{n}] + \cdots + [x + \frac{n-2}{n}] + [x + \frac{n-1}{n}] = [nx]$ για κάθε φυσικό $n \geq 2$.

1.2 Δυνάμεις και ρίζες.

Α. Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες.

Η δύναμη a^n με *θετικό ακέραιο* (δηλαδή *φυσικό*) εκθέτη n ορίζεται με τον τύπο

$$a^n = \underbrace{a \cdots a}_{n},$$

δηλαδή το γινόμενο n αριθμών ίσων με a. Αν $a \neq 0$, τότε ορίζεται η δύναμη a^0 καθώς και η δύναμη a^n με *αρνητικό ακέραιο* εκθέτη n με τους τύπους

$$a^0 = 1, \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdots a}_{-n}} \qquad (a \neq 0).$$

Από τον γνωστό κανόνα πολλαπλασιασμού προσήμων εύκολα προκύπτει ότι $(-a)^n = a^n$, αν ο n είναι άρτιος ακέραιος, και $(-a)^n = -a^n$, αν ο n είναι περιττός ακέραιος. Είναι, επίσης, φανερό ότι, αν ο n είναι άρτιος ακέραιος, τότε $a^n > 0$ για κάθε $a \neq 0$ ενώ, αν ο n είναι περιττός ακέραιος, τότε (i) $a^n > 0$ για κάθε $a > 0$ και (ii) $a^n < 0$ για κάθε $a < 0$.

Η Πρόταση 1.5 είναι γνωστή από το γυμνάσιο και αποδεικνύεται εύκολα με την επιμεριστική ιδιότητα.

Πρόταση 1.5 *Αν ο n είναι φυσικός ≥ 2, τότε*

$$\boxed{x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).}$$

Επίσης, αν ο n είναι περιττός φυσικός ≥ 3, τότε

$$\boxed{x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}).}$$

Ονομάζουμε **παραγοντικό** ενός φυσικού n το γινόμενο $1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ και το συμβολίζουμε $n!$. Δηλαδή

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Παράδειγμα: $1! = 1,\ 2! = 1 \cdot 2 = 2,\ 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,\ 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Επίσης, ορίζουμε

$$0! = 1$$

και παρατηρούμε ότι για κάθε φυσικό n ισχύει

$$n! = (n-1)!\, n.$$

Κατόπιν ορίζουμε τους **δυωνυμικούς συντελεστές** $\binom{n}{m}$ για οποιουσδήποτε ακεραίους m, n με $0 \leq m \leq n$ με τον τύπο

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}\,.$$

Παράδειγμα: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,\ \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n,\ \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}\,.$

Αν $1 \leq m \leq n$, τότε, απλοποιώντας, βρίσκουμε

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}\,.$$

Πρόταση 1.6 ***Ο δυωνυμικός τύπος του Newton.*** *Για κάθε x, y και για κάθε φυσικό n ισχύει*

$$\boxed{(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\,.}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τον δυωνυμικό τύπο του Newton με την αρχή της επαγωγής. Για $n=1$ ο τύπος γράφεται $(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^1 + \binom{1}{1} y^1$ και είναι σωστός, διότι $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Κατόπιν υποθέτουμε ότι ο τύπος είναι σωστός για κάποιον φυσικό n και τον πολλαπλασιάζουμε με το $x+y$. Τότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = \binom{n}{0} x^{n+1} + \binom{n}{1} x^n y + \cdots + \binom{n}{n} xy^n \\ + \binom{n}{0} x^n y + \cdots + \binom{n}{n-1} xy^n + \binom{n}{n} y^{n+1}\,.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ και $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$. Επίσης, βρίσκουμε εύκολα με λίγες πράξεις ότι τα δυο μονώνυμα που βρίσκονται στην m-οστή στήλη ($1 \le m \le n$) έχουν άθροισμα $\binom{n}{m} x^{n-m+1} y^m + \binom{n}{m-1} x^{n-m+1} y^m = \binom{n+1}{m} x^{n-m+1} y^m$ (δείτε την άσκηση A4 αυτής της ενότητας) και, επομένως, καταλήγουμε στην ισότητα

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \cdots + \binom{n+1}{n} xy^n + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1}\,.$$

Άρα ο τύπος είναι σωστός και με το $n+1$ στη θέση του n.

Παράδειγμα: Οι γνωστές ισότητες

$$(x+y)^1 = x+y\,,$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\,,$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\,,$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\,,$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

είναι ειδικές περιπτώσεις του δυωνυμικού τύπου του Newton.

Η Πρόταση 1.7 καταγράφει τις γνωστές μας βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με *ακέραιους* εκθέτες.

Πρόταση 1.7 (1) *Οι παρακάτω ισότητες ισχύουν αρκεί μόνο να ορίζονται τα συστατικά τους μέρη.*

$$a^x b^x = (ab)^x\,, \qquad a^x a^y = a^{x+y}\,, \qquad (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}\,.$$

(2) *Αν* $0 < a < b$, *τότε* (*i*) $a^x < b^x$, *αν* $x > 0$, (*ii*) $a^0 = b^0 = 1$ *και* (*iii*) $a^x > b^x$, *αν* $x < 0$.
(3) *Αν* $x < y$, *τότε* (*i*) $a^x < a^y$, *αν* $a > 1$, (*ii*) $1^x = 1^y = 1$ *και* (*iii*) $a^x > a^y$, *αν* $0 < a < 1$.

Απόδειξη: Η απόδειξη της Πρότασης 1.7 είναι απλή· βασίζεται μόνο σε σωστό μέτρημα! Ενδεικτικά, αναφέρουμε κάποιες περιπτώσεις.
(1) *Πρώτη ισότητα:* Αν $x > 0$, τότε $a^x b^x = \underbrace{a\cdots a}_{x}\underbrace{b\cdots b}_{x} = \underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{x} = (ab)^x$.

Αν $x < 0$, τότε $a, b \ne 0$ και $a^x b^x = \dfrac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-x}}\dfrac{1}{\underbrace{b\cdots b}_{-x}} = \dfrac{1}{\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{-x}} = (ab)^x$.

Αν $x=0$, τότε $a,b\neq 0$ και $a^xb^x = 1\cdot 1 = 1 = (ab)^x$.
Δεύτερη ισότητα: Αν $x,y>0$, τότε $a^xa^y = \underbrace{a\cdots a}_{x}\underbrace{a\cdots a}_{y} = \underbrace{a\cdots a}_{x+y} = a^{x+y}$.

Αν $x<0<y$ και $x+y>0$, τότε είναι $0<-x<y$, οπότε $a^y = \underbrace{a\cdots a}_{y} = \underbrace{a\cdots a}_{-x}\,\underbrace{a\cdots a}_{y-(-x)} = \underbrace{a\cdots a}_{-x}\underbrace{a\cdots a}_{x+y} = \underbrace{a\cdots a}_{-x}a^{x+y}$ και, επομένως, $a^xa^y = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-x}}a^y = a^{x+y}$.

Αν $x<0<y$ και $x+y<0$, τότε είναι $0<y<-x$, οπότε $\underbrace{a\cdots a}_{-x} = \underbrace{a\cdots a}_{y}\,\underbrace{a\cdots a}_{(-x)-y} = a^y\,\underbrace{a\cdots a}_{-(x+y)}$ και, επομένως, $a^xa^y = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-x}}a^y = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-(x+y)}} = a^{x+y}$.

Αν $x<0<y$ και $x+y=0$, τότε $y=-x$, οπότε $a^xa^y = \frac{1}{a^{-x}}a^y = \frac{1}{a^y}a^y = 1 = a^{x+y}$.
Η περίπτωση $y<0<x$ είναι παρόμοια με την $x<0<y$.
Αν $x,y<0$, τότε $a^xa^y = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-x}}\frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-y}} = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{(-x)+(-y)}} = \frac{1}{\underbrace{a\cdots a}_{-(x+y)}} = a^{x+y}$.

Αν $x=0$, τότε $a^xa^y = 1\cdot a^y = a^{0+y} = a^{x+y}$. Η περίπτωση $y=0$ είναι παρόμοια με την $x=0$.
Τρίτη ισότητα: Αν $x,y>0$, τότε $(a^x)^y = \underbrace{a^x\cdots a^x}_{y} = \underbrace{\underbrace{a\cdots a}_{x}\cdots\underbrace{a\cdots a}_{x}}_{y} = \underbrace{a\cdots a}_{xy} = a^{xy}$.

Με παρόμοιο τρόπο χειριζόμαστε και τις άλλες περιπτώσεις: $x<0<y$, $y<0<x$, $x,y<0$, $x=0$ και $y=0$.
(2) (i) Πολλαπλασιάζοντας την $a<b$ με τον εαυτό της x φορές, βρίσκουμε την $a^x = \underbrace{a\cdots a}_{x} < \underbrace{b\cdots b}_{x} = b^x$. Η (iii) προκύπτει από την (i): $a^x = \frac{1}{a^{-x}} > \frac{1}{b^{-x}} = b^x$. Η (ii) είναι προφανής.
(3) (i) Είναι $y-x>0$, οπότε, πολλαπλασιάζοντας την $1<a$ με τον εαυτό της $y-x$ φορές, βρίσκουμε $a^x = \underbrace{a\cdots a}_{x}\underbrace{1\cdots 1}_{y-x} < \underbrace{a\cdots a}_{x}\underbrace{a\cdots a}_{y-x} = a^y$. Η (iii) έχει παρόμοια απόδειξη και η (ii) είναι προφανής.

Όλες οι ισότητες και ανισότητες που περιέχονται στην Πρόταση 1.7 ισχύουν γενικότερα με πραγματικούς εκθέτες. Επομένως, θα ξαναναφέρουμε την πρόταση αυτή άλλες δυο φορές στις επόμενες υποενότητες· μια φορά αφού θα έχουμε ορίσει τις δυνάμεις με ρητούς εκθέτες και μια φορά αφού θα έχουμε ορίσει τις δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Β. Ρίζες.

Το Θεώρημα 1.2 είναι σημαντικό, διότι εξασφαλίζει ότι κάποιες απλές αλγεβρικές εξισώσεις έχουν λύση· για παράδειγμα, οι εξισώσεις δεύτερου βαθμού. Δε θα αποδείξουμε το Θεώρημα 1.2.

Θεώρημα 1.2 *Αν ο n είναι φυσικός και $a>0$, τότε η εξίσωση $x^n=a$ με άγνωστο τον x έχει μοναδική λύση >0.*

Το Θεώρημα 1.2 αναφέρεται στην εξίσωση $x^n=a$ μόνο στην περίπτωση $a>0$ και μόνο στη θετική λύση της. Η Πρόταση 1.8, γνωστή κι αυτή από το γυμνάσιο, καλύπτει όλες τις περιπτώσεις. Η απόδειξή της (αν δεχτούμε το Θεώρημα 1.2) είναι στοιχειώδης.

Πρόταση 1.8 (1) *Αν ο n είναι άρτιος φυσικός, τότε η εξίσωση $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς δυο λύσεις, μια θετική και την αντίθετη αρνητική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $a = 0$, και (iii) καμιά λύση, αν $a < 0$.*
(2) *Αν ο n είναι περιττός φυσικός, τότε η $x^n = a$ έχει (i) ακριβώς μια λύση, θετική, αν $a > 0$, (ii) ακριβώς μια λύση, τον 0, αν $a = 0$, και (iii) ακριβώς μια λύση, αρνητική, αν $a < 0$.*

Αν ο n είναι περιττός, τότε για κάθε a τη μοναδική λύση της εξίσωσης $x^n = a$ την ονομάζουμε **n-οστή ρίζα** του a και τη συμβολίζουμε

$$\sqrt[n]{a}\,.$$

Αν ο n είναι άρτιος, τότε για κάθε $a \geq 0$ τη μοναδική *μη αρνητική* λύση της $x^n = a$ την ονομάζουμε και πάλι **n-οστή ρίζα** του a και τη συμβολίζουμε και πάλι $\sqrt[n]{a}$.

Είναι, λοιπόν, $\sqrt[n]{0} = 0$ για κάθε n και $\sqrt[n]{a} > 0$ για κάθε $a > 0$ και κάθε n. Επίσης, στην περίπτωση $a < 0$ είναι $\sqrt[n]{a} < 0$ για κάθε *περιττό* n ενώ δεν ορίζεται ο $\sqrt[n]{a}$ για κανέναν *άρτιο* n.

Αν $n = 2, 3, 4, \ldots$, ο $\sqrt[n]{a}$ ονομάζεται **δεύτερη, τρίτη, τέταρτη, ... ρίζα** του a. Στην περίπτωση $n = 2$ ο $\sqrt[2]{a}$ συμβολίζεται και $\sqrt{a}$ και ονομάζεται και **τετραγωνική ρίζα** ή, απλώς, **ρίζα** του a. Στην περίπτωση $n = 3$ ο $\sqrt[3]{a}$ ονομάζεται και **κυβική ρίζα** του a.

Παραδείγματα: (1) Η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει δυο λύσεις, τον $\sqrt[4]{16} = 2$ και τον $-\sqrt[4]{16} = -2$. Όμως, η $x^4 = -16$ δεν έχει καμιά λύση.

(2) Η εξίσωση $x^5 = 32$ έχει μια λύση, τον $\sqrt[5]{32} = 2$. Η $x^5 = -32$ έχει μια λύση, τον $\sqrt[5]{-32} = -2$. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[5]{-32} = -2 = -\sqrt[5]{32}$. Έτσι ο $-\sqrt[5]{32}$ είναι η λύση της $x^5 = -32$, όπως ακριβώς και ο $\sqrt[5]{32}$ είναι η λύση της $x^5 = 32$. Αυτό, φυσικά, ισχύει γενικότερα:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a} \qquad (n \text{ περιττός φυσικός}).$$

Ας δούμε τώρα ένα χρήσιμο κριτήριο για το αν μια ρίζα είναι ρητός ή άρρητος.

Πρόταση 1.9 *Έστω φυσικοί n, k. Τότε ο $\sqrt[n]{k}$ είναι ρητός αν και μόνο αν ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού.*

Απόδειξη: Η μια κατεύθυνση είναι εύκολη. Έστω ότι ο k είναι n-οστή δύναμη φυσικού, δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός m ώστε να είναι $k = m^n$. Τότε ο $\sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{m^n} = m$ είναι φυσικός και, επομένως, ρητός.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $r = \sqrt[n]{k}$ είναι ρητός και έστω $r = \frac{m}{l}$, όπου οι m, l είναι φυσικοί χωρίς κοινό διαιρέτη > 1. Υποθέτουμε ότι ο φυσικός l είναι > 1, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένας *πρώτος* αριθμός p ο οποίος διαιρεί τον l. Επειδή οι l, m δεν έχουν κανένα κοινό διαιρέτη > 1, συνεπάγεται ότι ο p δε διαιρεί τον m. Είναι $k = r^n = \frac{m^n}{l^n}$, οπότε $l^n k = m^n$. Ο p διαιρεί τον l, οπότε διαιρεί τον $l^n k$ και, επομένως, διαιρεί τον m^n. Γνωρίζουμε ότι, αν ένας πρώτος αριθμός διαιρεί το γινόμενο κάποιων φυσικών, τότε διαιρεί τουλάχιστον έναν από αυτούς τους αριθμούς.

Επομένως, επειδή ο p διαιρεί τον $m^n = m \cdots m$, συνεπάγεται ότι διαιρεί τον m και καταλήγουμε σε αντίφαση. Συμπεραίνουμε ότι $l = 1$, οπότε $r = m$ και, επομένως, ο $k = r^n = m^n$ είναι n-οστή δύναμη φυσικού.

Παραδείγματα: (1) Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος διότι, προφανώς, δεν υπάρχει *φυσικός* m ώστε να είναι $m^2 = 2$. Πράγματι: $1^2 < 2$ και $2^2 > 2$. Ομοίως, ο $\sqrt[3]{5}$ είναι άρρητος διότι δεν υπάρχει *φυσικός* m ώστε να είναι $m^3 = 5$.

(2) Ο $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ είναι άρρητος. Διότι, αν είναι ρητός και τον συμβολίσουμε r, τότε $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = r^2$, οπότε $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 5}{2}$ και, επομένως, ο $\sqrt{6}$ είναι ρητός. Αυτό είναι αδύνατο διότι δεν υπάρχει *φυσικός* m ώστε να είναι $m^2 = 6$.

Γ. Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

Σ' αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε τη δύναμη a^r όταν ο εκθέτης r είναι *ρητός*.

Θεωρούμε οποιονδήποτε ρητό r και γράφουμε $r = \frac{m}{n}$, όπου ο m είναι ακέραιος, ο n είναι φυσικός, δηλαδή *θετικός* ακέραιος, και οι m, n είναι *σχετικά πρώτοι*, δηλαδή έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τον 1. Η συγκεκριμένη γραφή του r ονομάζεται **ανάγωγη μορφή** του και είναι μοναδική.

Παράδειγμα: Η ανάγωγη μορφή του $\frac{16}{10}$ είναι η $\frac{8}{5}$ και προκύπτει με απλοποίηση του αρχικού λόγου. Ομοίως, η ανάγωγη μορφή του $-\frac{6}{4}$ είναι η $\frac{-3}{2}$.

Αφού γράψουμε τον ρητό r στην ανάγωγη μορφή του, $r = \frac{m}{n}$, ορίζουμε

$$a^r = (\sqrt[n]{a})^m$$

με τις εξής διευκρινήσεις: (i) αν $a > 0$, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα διότι ο $\sqrt[n]{a}$ ορίζεται, (ii) αν $a = 0$, τότε είναι $\sqrt[n]{0} = 0$, οπότε πρέπει να είναι $m > 0$ ή, ισοδύναμα, $r > 0$ και τότε $0^r = (\sqrt[n]{0})^m = 0^m = 0$ και (iii) αν $a < 0$, τότε πρέπει ο n να είναι περιττός για να ορίζεται ο $\sqrt[n]{a}$. Με άλλα λόγια:

Ο a^r ορίζεται (i) αν $a > 0$, (ii) αν $a = 0$ και $r > 0$ και (iii) αν $a < 0$ και ο παρονομαστής στην ανάγωγη μορφή του r είναι περιττός.
Ο a^r δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$ και $r \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$ και ο παρονομαστής στην ανάγωγη μορφή του r είναι άρτιος.

Παραδείγματα: (1) $2^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{2})^3$, $2^{\frac{6}{8}} = 2^{\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{2})^3$, $2^{-\frac{3}{4}} = (\sqrt[4]{2})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt[4]{2})^3}$, $2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$ και $2^{-\frac{6}{2}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

(2) $0^{\frac{3}{4}} = 0$ και $0^{\frac{3}{5}} = 0$. Οι $0^{-\frac{3}{4}}$, $0^{-\frac{3}{5}}$ και 0^0 δεν ορίζονται.

(3) $(-2)^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{-2})^5 = (-\sqrt[3]{2})^5 = -(\sqrt[3]{2})^5$, $(-2)^{\frac{10}{6}} = (-2)^{\frac{5}{3}}$ και $(-2)^0 = 1$. Οι $(-2)^{\frac{5}{2}}$ και $(-2)^{-\frac{14}{4}}$ δεν ορίζονται.

Ας θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό n και τον αντίστοιχο ρητό $\frac{1}{n}$. Είναι φανερό ότι η ανάγωγη μορφή του $\frac{1}{n}$ είναι ακριβώς η $\frac{1}{n}$. Άρα ο $a^{\frac{1}{n}}$ ταυτίζεται εξ ορισμού με τον $(\sqrt[n]{a})^1 = \sqrt[n]{a}$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,.$$

Όπως είδαμε, υπάρχει μια περιπλοκή στον ορισμό του a^r όταν $a<0$: πρέπει να διακρίνουμε περιπτώσεις για τον παρονομαστή της ανάγωγης μορφής του r. Αυτό, φυσικά, δημιουργεί περαιτέρω περιπλοκές στη διατύπωση αλλά και στη χρήση των διαφόρων ιδιοτήτων των δυνάμεων, αφού για να τις χρησιμοποιούμε με αρνητική βάση θα πρέπει να βάζουμε περιορισμούς στους παρονομαστές των ρητών εκθετών. *Γι αυτό στα περισσότερα βιβλία δεν ορίζεται καν το σύμβολο a^r όταν $a<0$ και ο r είναι ρητός.*

Είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει $a^r > 0$ για κάθε ρητό r και κάθε $a>0$. Πράγματι, αν $\frac{m}{n}$ είναι η ανάγωγη μορφή του r, τότε είναι $\sqrt[n]{a} > 0$ και, επομένως, $a^r = (\sqrt[n]{a})^m > 0$.

Ξεκινώντας από τις βασικές ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιους εκθέτες, όπως αυτές περιγράφονται στην Πρόταση 1.7, μπορούμε να αποδείξουμε τις ίδιες ιδιότητες και για ρητούς εκθέτες.

Απόδειξη της Πρότασης 1.7 στην περίπτωση ρητών εκθετών: Θα αποδείξουμε τις ιδιότητες που αναφέρονται στην Πρόταση 1.7 όταν όλοι οι εκθέτες είναι ρητοί, χρησιμοποιώντας τις ίδιες ιδιότητες για ακέραιους εκθέτες. Στα παρακάτω θεωρούμε $x=\frac{m}{n}$ και $y=\frac{k}{l}$ να είναι οι ανάγωγες μορφές των ρητών x και y. Πριν προχωρήσουμε θα αποδείξουμε την ισότητα $(a^x)^n = a^m$ που θα μας φανεί χρήσιμη παρακάτω: $(a^x)^n = ((\sqrt[n]{a})^m)^n = ((\sqrt[n]{a})^n)^m = a^m$.

(1) *Πρώτη ισότητα:* Έστω $a,b>0$. Τότε $(a^xb^x)^n = (a^x)^n(b^x)^n = a^mb^m = (ab)^m = ((ab)^x)^n$ και, επειδή $a^xb^x, (ab)^x > 0$, συνεπάγεται $a^xb^x = (ab)^x$.

Αν $a=0$, τότε είναι $x>0$ και $a^xb^x = 0\cdot b^x = 0 = 0^x = (ab)^x$. Η περίπτωση $b=0$ είναι παρόμοια.

Αν $a<0$, τότε ο n είναι περιττός. Αποδεικνύουμε όπως πριν ότι $(a^xb^x)^n = ((ab)^x)^n$ και, επειδή ο n είναι περιττός, συνεπάγεται $a^xb^x = (ab)^x$. Η περίπτωση $b<0$ είναι παρόμοια.

Δεύτερη ισότητα: Έστω $x+y=\frac{p}{q}$ η ανάγωγη μορφή του ρητού $x+y$. Αν $a>0$, τότε $(a^xa^y)^{nl} = (a^x)^{nl}(a^y)^{nl} = ((a^x)^n)^l((a^y)^l)^n = (a^m)^l(a^k)^n = a^{ml}a^{kn} = a^{ml+kn} = ((\sqrt[q]{a})^q)^{ml+kn} = (\sqrt[q]{a})^{q(ml+kn)} = (\sqrt[q]{a})^{pnl} = ((\sqrt[q]{a})^p)^{nl} = (a^{x+y})^{nl}$ και, επειδή $a^xa^y, a^{x+y} > 0$, συνεπάγεται $a^xa^y = a^{x+y}$.

Αν $a=0$, τότε είναι $x,y>0$ και $a^xa^y = 0\cdot 0 = 0 = a^{x+y}$.

Αν $a<0$, τότε οι n,l είναι περιττοί. Αποδεικνύουμε όπως πριν ότι $(a^xa^y)^{nl} = (a^{x+y})^{nl}$ και, επειδή ο nl είναι περιττός, συνεπάγεται $a^xa^y = a^{x+y}$.

Τρίτη ισότητα: Έστω $xy=\frac{p}{q}$ η ανάγωγη μορφή του ρητού xy. Αν $a>0$, τότε $((a^x)^y)^{nl} = \big(((a^x)^y)^l\big)^n = ((a^x)^k)^n = ((a^x)^n)^k = (a^m)^k = a^{mk} = ((\sqrt[q]{a})^q)^{mk} = (\sqrt[q]{a})^{qmk} = (\sqrt[q]{a})^{pnl} = ((\sqrt[q]{a})^p)^{nl} = (a^{xy})^{nl}$ και, επειδή $(a^x)^y, a^{xy} > 0$, συνεπάγεται $(a^x)^y = a^{xy}$. Η $(a^y)^x = a^{xy}$ αποδεικνύεται ομοίως.

Αν $a=0$, τότε $x,y>0$ και $(a^x)^y = 0^y = 0 = a^{xy}$. Η $(a^y)^x = a^{xy}$ αποδεικνύεται ομοίως.

Αν $a<0$, τότε οι n,l είναι περιττοί. Αποδεικνύουμε όπως πριν ότι $((a^x)^y)^{nl} = (a^{xy})^{nl}$ και, επειδή ο nl είναι περιττός, συνεπάγεται $(a^x)^y = a^{xy}$. Η $(a^y)^x = a^{xy}$ αποδεικνύεται ομοίως.

(2) (i) Επειδή $x>0$, είναι $m>0$. Τότε $(a^x)^n = a^m < b^m = (b^x)^n$ και, επειδή $a^x, b^x > 0$, συνεπάγεται $a^x < b^x$.

Η (iii) αποδεικνύεται ομοίως και η (ii) είναι προφανής.

(3) (i) Επειδή $x<y$ και $n,l>0$, είναι $ml<kn$. Άρα $(a^x)^{nl} = ((a^x)^n)^l = (a^m)^l = a^{ml} < a^{kn} = (a^k)^n = ((a^y)^l)^n = (a^y)^{nl}$. Επειδή $a^x, a^y > 0$, συνεπάγεται $a^x > a^y$.

Η (iii) αποδεικνύεται ομοίως και η (ii) είναι προφανής.

Δ. Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

Τέλος, θα ορίσουμε το σύμβολο a^x όταν $a\geq 0$ και ο x είναι *άρρητος*.

Κατ΄ αρχάς θεωρούμε την περίπτωση $a>1$.

Παρατηρούμε ότι, αν για τρεις ρητούς s, r, t ισχύει $s < r < t$, τότε, φυσικά, συνεπάγεται $a^s < a^r < a^t$. Σκεφτόμαστε τώρα ότι, αν είχαμε ορίσει τις δυνάμεις με άρρητους εκθέτες έτσι ώστε να ισχύουν και γι αυτές οι συνηθισμένες ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες, τότε, αν παίρναμε ρητούς s, t και άρρητο x ώστε να είναι $s < x < t$, θα συνεπαγόταν $a^s < a^x < a^t$. Φυσικά, στη διπλή αυτή ανισότητα οι a^s, a^t είναι ήδη ορισμένοι ενώ ο a^x δεν έχει ακόμη οριστεί. Όμως, η ανισότητα αυτή αποτελεί τον «οδηγό» για το πώς πρέπει να οριστεί και ο a^x: πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι $a^s < a^x < a^t$ για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$. Αυτό γίνεται ως εξής.

Θεωρούμε όλους τους *ρητούς* $s < x$ και όλους τους *ρητούς* $t > x$. Επειδή για όλους αυτούς τους ρητούς s, t ισχύει, προφανώς, $s < t$ και επειδή $a > 1$, συνεπάγεται $a^s < a^t$. Έχουμε, λοιπόν, ένα πρώτο σύνολο, το σύνολο των a^s, και ένα δεύτερο σύνολο, το σύνολο των a^t, τα οποία εμφανίζονται πάνω στην πραγματική ευθεία να είναι *το πρώτο αριστερά του δεύτερου* – κάθε σημείο του πρώτου συνόλου είναι αριστερά κάθε σημείου του δεύτερου. Είναι φανερό ότι

Σχήμα 1.4: Ο ορισμός του a^x.

υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο *ανάμεσα στα δυο αυτά σύνολα*. Δηλαδή υπάρχει κάποιος αριθμός, ας τον συμβολίσουμε ξ, ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στους a^s και στους a^t:

$$a^s < \xi < a^t$$

για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι *δεν* υπάρχει δεύτερος τέτοιος αριθμός, δηλαδή κάποιος $\xi' \neq \xi$ ώστε να είναι $a^s < \xi' < a^t$ για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο εξής αποτέλεσμα του οποίου την απόδειξη θα παραλείψουμε.

Θεώρημα 1.3 (1) *Έστω $a > 1$ και άρρητος x. Τότε υπάρχει μοναδικός ξ ώστε να είναι $a^s < \xi < a^t$ για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$.*
(2) *Έστω $a > 1$ και ρητός x. Τότε υπάρχει μοναδικός ξ ώστε να είναι $a^s < \xi < a^t$ για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$ και ο μοναδικός αυτός ξ είναι ο (ήδη ορισμένος) a^x.*

Αν $a > 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε τον a^x να είναι ακριβώς ο αριθμός ξ που αναφέρεται στο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 1.3. Από τον ορισμό του, λοιπόν, ο a^x ικανοποιεί τη διπλή ανισότητα

$$a^s < a^x < a^t$$

για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$ και είναι ο μοναδικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα. Σύμφωνα με το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 1.3, ακριβώς τα ίδια ισχύουν και στην περίπτωση που ο x είναι ρητός.

Αν $a = 1$ και ο x είναι άρρητος, ορίζουμε:

$$1^x = 1.$$

Επίσης, αν $0 < a < 1$ και ο x είναι άρρητος, τότε είναι $\frac{1}{a} > 1$ και ο $-x$ είναι άρρητος. Άρα έχει ορισθεί ο $(\frac{1}{a})^{-x}$ και ορίζουμε:

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}.$$

Τέλος, αν ο x είναι *θετικός* άρρητος, ορίζουμε

$$0^x = 0.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι, αν ο x είναι άρρητος, το σύμβολο a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$ και (ii) αν $a = 0$ και $x > 0$. Το σύμβολο a^x δεν ορίζεται (i) αν $a < 0$ και ο x είναι άρρητος και (ii) αν $a = 0$ και ο x είναι άρρητος < 0. Αν συνυπολογίσουμε τα συμπεράσματα των προηγούμενων υποενοτήτων, βλέπουμε ότι

Ο a^x ορίζεται (i) αν $a > 0$ και ο x είναι οποιοσδήποτε αριθμός, (ii) αν $a = 0$ και $x > 0$ και (iii) αν $a < 0$ και ο x είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.
Ο a^x δεν ορίζεται (i) αν $a = 0$ και $x \leq 0$ και (ii) αν $a < 0$ και ο x είναι άρρητος η ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.

Ας πούμε μερικά λόγια για το πρόσημο του a^x : αν ο x είναι άρρητος και $a > 0$ (δεν έχει νόημα η περίπτωση $a < 0$), τότε, βάσει του ορισμού του a^x , είναι $a^x > a^s$ για κάθε ρητό $s < x$, οπότε, επειδή $a^s > 0$, συνεπάγεται $a^x > 0$.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι βασικές ιδιότητες των δυνάμεων, αυτές δηλαδή που καταγράφονται στην Πρόταση 1.7, ισχύουν για οποιουσδήποτε πραγματικούς εκθέτες. Όμως, την απόδειξή τους στη γενική περίπτωση πραγματικών εκθετών θα την παραλείψουμε.

Ασκήσεις.

Α. Δυνάμεις με ακέραιους εκθέτες.

1. Έστω ότι ο n είναι φυσικός.

   Αν ο n είναι περιττός, αποδείξτε ότι $x^n < y^n$ αν και μόνο αν $x < y$.

   Αν ο n είναι άρτιος, αποδείξτε ότι $x^n < y^n$ αν και μόνο αν $|x| < |y|$.

2. Αν οι x, y δεν είναι και οι δυο 0, αποδείξτε ότι $x^2 + xy + y^2 > 0$ και $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4 > 0$. Ποια είναι η γενίκευση αυτών των ανισοτήτων;

   Τι μπορείτε να πείτε για τις ανισότητες $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 > 0$ και $x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5 > 0$; Ποια είναι η γενίκευσή τους;

3. Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι για κάθε φυσικό n ισχύει
   (i) $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}\,n(n+1)$,
   (ii) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$,
   (iii) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2$.

4. Παρατηρείτε κάποια σχέση ανάμεσα στον δυωνυμικό τύπο του Newton και στο παρακάτω λεγόμενο **τρίγωνο του Pascal**;

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

   Αν $1\le m\le n$, αποδείξτε ότι $\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}$. Παρατηρείτε τη σχέση ανάμεσα στην ισότητα αυτή και στο τρίγωνο του Pascal;

5. Αυξάνονται οι $\binom{n}{m}$ όταν αυξάνεται ο n από τον m και πέρα;
   Αυξάνονται οι $\binom{n}{m}$ όταν αυξάνεται ο m ανάμεσα στους 0 και n;
   Πώς φαίνονται αυτές οι δυο ιδιότητες στο τρίγωνο του Pascal;

6. Για κάθε φυσικό n αποδείξτε τις παρακάτω ισότητες.

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n\,,$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

Β. Ρίζες.

1. Αν ο n είναι περιττός φυσικός, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n}=a$.
   Αν ο n είναι άρτιος φυσικός, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

2. Αποδείξτε ότι $\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}$ για κάθε $a,b\ge 0$. Αποδείξτε ότι $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ αν και μόνο αν $a=0$ ή $b=0$.

3. Βεβαιωθείτε ότι γνωρίζετε τις ιδιότητες των ριζών:

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}\,,\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}\,.$$

   Μπορείτε να τις αποδείξετε; Ποιοι περιορισμοί υπάρχουν αν $a<0$ ή $b<0$;

4. Αν ο n είναι άρτιος φυσικός και $0 \leq a < b$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

   Αν ο n είναι περιττός φυσικός και $a < b$, αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

5. $^{(*)}$ Να συγκρίνετε τους $\sqrt[105]{105}$ και $\sqrt[106]{106}$.

6. Αποδείξτε ότι οι $\sqrt[7]{129}$, $3\sqrt{5+\sqrt{2}}$ και $\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

7. Αν $a > 0$, αποδείξτε ότι $\sqrt{a\sqrt{a\cdots\sqrt{a\sqrt{a}}}} = \frac{a}{\sqrt[2^n]{a}}$ αν στο αριστερό μέλος της ισότητας υπάρχουν n διαδοχικές ρίζες.

8. Περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή του $\sqrt{a}$.

   (Υπόδειξη: Έστω $1 < a$. Αν O, I και A είναι τα σημεία της πραγματικής ευθείας που αναπαριστούν τους 0, 1 και a, φτιάξτε ημικύκλιο με διάμετρο OA και ευθεία κάθετη στην πραγματική ευθεία στο I η οποία να τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο B. Αν x είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OB, αποδείξτε ότι $x^2 = a$.)

   Περιγράψτε γεωμετρική κατασκευή των $\sqrt[4]{a}$ και $\sqrt[8]{a}$.

Γ. Δυνάμεις με ρητούς εκθέτες.

1. Ποιοι από τους $(-2)^0, 0^0, (-3)^{\frac{7}{3}}, (-2)^{\frac{16}{12}}, (-2)^{-\frac{10}{12}}$ ορίζονται;

   Υπολογίστε τους $(-8)^{\frac{4}{3}}$, $(-1)^{\frac{14}{6}}$.

2. Ορίζονται οι δυο μεριές της ισότητας $\big((-1)^{\frac{2}{3}}\big)^{\frac{5}{2}} = (-1)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}}$; Είναι σωστή αυτή η ισότητα; Υπάρχει αντίφαση με την Πρόταση 1.7;

3. Για ποιους ρητούς r ισχύει $(-2)^r < 0$;

Δ. Δυνάμεις με άρρητους εκθέτες.

1. Ορίζονται οι $2^{-\sqrt{2}}, (-2)^{\sqrt{2}}, 0^{-\sqrt{2}}, 0^{\sqrt{2}}$;

2. Αποδείξτε ότι $(\sqrt[17]{3})^{24} < 3^{\sqrt{2}} < (\sqrt[17]{3})^{25}$.

3. Να συγκρίνετε τους $2^{\sqrt{3}}$ και $3^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$.

4. Υπολογίστε τους $[10\cdot 2^{\sqrt{2}}]$ και $[100\cdot 2^{\sqrt{2}}]$.

5. Ισχύει $\big((-1)^2\big)^{\sqrt{3}} = (-1)^{2\sqrt{3}}$; Υπάρχει αντίφαση με την Πρόταση 1.7;

   Για ποιους x ισχύει $\big((-1)^x\big)^{\sqrt{3}} = (-1)^{x\sqrt{3}}$;

1.3 Λογάριθμοι.

Θεωρούμε $a > 0$ και $\neq 1$. Διατυπώνουμε το εξής ερώτημα: *για ποιους y η εξίσωση $a^x = y$ (με άγνωστο τον x) έχει λύση;*

Γνωρίζουμε ότι για κάθε x είναι $a^x > 0$, οπότε, για να έχει λύση η εξίσωση $a^x = y$, πρέπει να είναι $y > 0$. Το Θεώρημα 1.4, το οποίο, επίσης, δε θα αποδείξουμε, μας λέει ότι αυτός είναι ο μοναδικός περιορισμός για τον y.

Θεώρημα 1.4 *Έστω $a > 0$ και $a \neq 1$. Για κάθε $y > 0$ υπάρχει μοναδικός x ώστε να είναι*

$$a^x = y.$$

Το ουσιαστικό αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.4 είναι η *ύπαρξη* της λύσης της εξίσωσης $a^x = y$. Η *μοναδικότητα* της λύσης είναι σχεδόν προφανής. Πράγματι, δε μπορεί να υπάρχουν διαφορετικές λύσεις x_1, x_2 της $a^x = y$ (με τον ίδιο y) διότι από την Πρόταση 1.7 γνωρίζουμε ότι, αν $x_1 \neq x_2$, τότε $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.

Η περίπτωση $a = 1$, σε σχέση με την εξίσωση $a^x = y$, δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον. Πράγματι, επειδή είναι $1^x = 1$ για κάθε x, ο μοναδικός y για τον οποίον έχει λύση η εξίσωση είναι ο 1 και σ' αυτήν την περίπτωση η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις: όλους τους αριθμούς. Για τον ίδιο λόγο ούτε η περίπτωση $a = 0$ έχει ενδιαφέρον. Η εξίσωση $0^x = y$ έχει λύση μόνο όταν $y = 0$ και σ' αυτήν την περίπτωση έχει άπειρες λύσεις: όλους τους θετικούς αριθμούς. Η περίπτωση $a < 0$ δεν αποτελεί αντικείμενο μελέτης λόγω των γνωστών περιπλοκών με τον a^x όταν ο x είναι ρητός και λόγω του ότι ο a^x δεν ορίζεται όταν ο x είναι άρρητος.

Η μοναδική λύση της εξίσωσης $a^x = y$ ονομάζεται **λογάριθμος του** y **με βάση** a και συμβολίζεται

$$\log_a y.$$

Με άλλα λόγια, ισχύει η ισοδυναμία:

$$\boxed{x = \log_a y \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad a^x = y.}$$

Πρόταση 1.10 *Έστω $a > 0$ και $\neq 1$.*
(1) $\log_a(yz) = \log_a y + \log_a z$ για κάθε $y, z > 0$.
(2) $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$ για κάθε $y, z > 0$.
(3) $\log_a(y^z) = z \log_a y$ για κάθε $y > 0$ και κάθε z.
(4) $\log_a 1 = 0$ και $\log_a a = 1$.
(5) Έστω $0 < y < z$. Τότε (i) $\log_a y < \log_a z$, αν $a > 1$, και (ii) $\log_a y > \log_a z$, αν $0 < a < 1$.

Απόδειξη: (1) Ορίζουμε $x = \log_a y$ και $w = \log_a z$, οπότε $a^x = y$ και $a^w = z$. Τότε $a^{x+w} = a^x a^w = yz$, οπότε $\log_a(yz) = x + w = \log_a y + \log_a z$.
(2) Από την $\log_a \frac{y}{z} + \log_a z = \log_a(\frac{y}{z} z) = \log_a y$ συνεπάγεται $\log_a \frac{y}{z} = \log_a y - \log_a z$.
(3) Ορίζουμε $x = \log_a y$, οπότε $a^x = y$. Τότε $a^{zx} = (a^x)^z = y^z$ και, επομένως, $\log_a(y^z) = zx = z \log_a y$.
(4) Η $\log_a 1 = 0$ προκύπτει από την $a^0 = 1$ και η $\log_a a = 1$ από την $a^1 = a$.
(5) Έστω $0 < y < z$. Ορίζουμε $x = \log_a y$ και $w = \log_a z$, οπότε $y = a^x$ και $z = a^w$. Τότε $a^x < a^w$ και, αν $a > 1$, συνεπάγεται $x < w$ ενώ, αν $0 < a < 1$, συνεπάγεται $x > w$.

Πρόταση 1.11 *Έστω $a, b > 0$ και $a, b \neq 1$. Τότε*

$$\log_b y = \frac{1}{\log_a b} \log_a y$$

για κάθε $y > 0$.

Απόδειξη: Έστω $a, b > 0$ και $a, b \neq 1$. Ορίζουμε $x = \log_b y$ και $w = \log_a b$, οπότε $b^x = y$ και $a^w = b$. Συνεπάγεται $a^{wx} = (a^w)^x = b^x = y$. Άρα $\log_a y = wx = \log_a b \log_b y$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τους $\log_2 4$, $\log_{\frac{1}{2}} 2$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$.
2. Να συγκρίνετε τους $\log_2 3$ και $\log_3 4$.
3. Υπολογίστε το γινόμενο $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 10 \cdot \log_{10} 8$.
4. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^{\log_a y} = y$ για κάθε $y > 0$.
5. Είναι ο $\log_2 3$ ρητός;
6. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $\log_{\frac{1}{a}} y = -\log_a y$ για κάθε $y > 0$.
7. Έστω $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $\log_{a^z}(y^z) = \log_a y$ για κάθε $y > 0$ και $z \neq 0$.

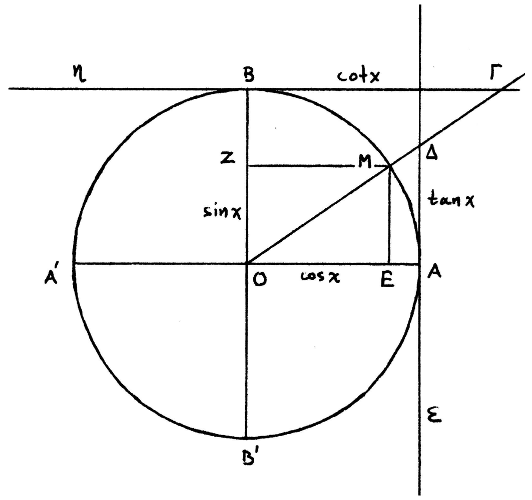
1.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί. Αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Α. Τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας 1 και δυο κάθετες μεταξύ τους διαμέτρους, την οριζόντια Α′ΟΑ (το Α δεξιά του Ο) και την κατακόρυφη Β′ΟΒ (το Β πάνω από το Ο). Θεωρούμε οποιονδήποτε x και γράφουμε πάνω στον κύκλο τόξο ΑΜ μήκους $|x|$, αρχίζοντας από το Α και πηγαίνοντας προς την κατεύθυνση την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, αν $x > 0$, ή προς την αντίθετη κατεύθυνση (την κατεύθυνση της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) αν $x < 0$. Καθώς ο x μεταβάλλεται, το σημείο Μ μεταβάλλεται αναλόγως: όταν ο x αυξάνεται, το σημείο Μ περιστρέφεται πάνω στον κύκλο προς την κατεύθυνση την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

Είναι γνωστό ότι το γράμμα π χρησιμοποιείται για να συμβολίσει το μισό του μήκους οποιουδήποτε κύκλου με ακτίνα 1. Επομένως, ο $\frac{\pi}{2}$ αντιστοιχεί στο σημείο Β, ο π στο σημείο Α′, ο $\frac{3\pi}{2}$ στο σημείο Β′ και ο 2π στο σημείο Α. Καθώς ο x διατρέχει το διάστημα $[0, 2\pi]$ από μικρότερες προς μεγαλύτερες τιμές το σημείο Μ διατρέχει τον κύκλο ΑΒΑ′Β′Α προς την κατεύθυνση την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού και όταν ο x ξεπεράσει το 2π το Μ ξαναρχίζει να διατρέχει τον κύκλο. Ακριβώς το ίδιο πράγμα γίνεται όταν ο x διατρέχει το διάστημα

$[k2\pi, (k+1)2\pi]$, όπου ο k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος: η κίνηση του σημείου Μ είναι **περιοδική** με περίοδο 2π. Με άλλα λόγια, αν ένα σημείο Μ αντιστοιχεί σε κάποιον x, τότε το ίδιο Μ αντιστοιχεί και σε όλους τους αριθμούς που διαφέρουν από τον x κατά ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) πολλαπλάσιο του 2π.



Σχήμα 1.5: Ο τριγωνομετρικός κύκλος.

Κατόπιν ζωγραφίζουμε την ευθεία ε που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Α και την ευθεία η που εφάπτεται στον κύκλο στο σημείο Β.

Για κάθε x προσδιορίζουμε, λοιπόν, το αντίστοιχο Μ και φέρνουμε

1. κάθετη ΜΕ στη διάμετρο Α΄ΟΑ. Συμβολίζουμε
$$\cos x = \pm \text{ μήκος του ΟΕ}$$
με $+$, αν το Ε είναι δεξιά του Ο, και $-$, αν το Ε είναι αριστερά του Ο.

2. κάθετη ΜΖ στη διάμετρο Β΄ΟΒ. Συμβολίζουμε
$$\sin x = \pm \text{ μήκος του ΟΖ}$$
με $+$, αν το Ζ είναι πάνω από το Ο, και $-$, αν το Ζ είναι κάτω από το Ο.

3. την προέκταση της ΟΜ μέχρι να συναντήσει την ευθεία ε στο σημείο Δ. Συμβολίζουμε
$$\tan x = \pm \text{ μήκος του ΑΔ}$$
με $+$, αν το Δ είναι πάνω από το Α, και $-$, αν το Δ είναι κάτω από το Α.

4. την προέκταση της ΟΜ μέχρι να συναντήσει την ευθεία η στο σημείο Γ. Συμβολίζουμε
$$\cot x = \pm \text{ μήκος του ΒΓ}$$
με $+$, αν το Γ είναι δεξιά του Β, και $-$, αν το Γ είναι αριστερά του Β.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\tan x$ *δεν ορίζεται* αν το Μ ταυτίζεται με το Β ή το Β′ ή, ισοδύναμα, αν $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Ομοίως, ο αριθμός $\cot x$ *δεν ορίζεται* αν το Μ ταυτίζεται με το Α ή το Α′ ή, ισοδύναμα, αν $x = k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Είναι φανερό ότι το $(\cos x, \sin x)$ είναι το ζεύγος συντεταγμένων του Μ στο επίπεδο του κύκλου με την ευθεία της διαμέτρου Α′ΟΑ ως άξονα πρώτων συντεταγμένων και την ευθεία της Β′ΟΒ ως άξονα δεύτερων συντεταγμένων. Οι αριθμοί $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$ και $\cot x$ ονομάζονται, αντιστοίχως, **συνημίτονο**, **ημίτονο**, **εφαπτόμενη** και **συνεφαπτόμενη** του x. Και οι τέσσερις αυτοί αριθμοί ονομάζονται **τριγωνομετρικοί αριθμοί** του x. Επίσης, ο κύκλος βάσει του οποίου ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ονομάζεται **τριγωνομετρικός κύκλος**.

Παραδείγματα: (1) $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\tan 0 = 0$. Δεν ορίζεται ο $\cot 0$.

(2) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cot\frac{\pi}{2} = 0$. Δεν ορίζεται ο $\tan\frac{\pi}{2}$.

(3) $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\tan\pi = 0$. Δεν ορίζεται ο $\cot\pi$.

(4) $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\cot\frac{3\pi}{2} = 0$. Δεν ορίζεται ο $\tan\frac{3\pi}{2}$.

Εύκολα φαίνεται στον τριγωνομετρικό κύκλο ότι $\cos x > 0$, αν ο x ανήκει στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$), και $\cos x < 0$, αν ο x ανήκει στο διάστημα $(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$). Επίσης, είναι $\sin x > 0$, αν ο x ανήκει στο διάστημα $(k2\pi, \pi + k2\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$), και $\sin x < 0$, αν ο x ανήκει στο διάστημα $(\pi + k2\pi, 2\pi + k2\pi)$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Είναι, επίσης, φανερό από τον τριγωνομετρικό κύκλο ότι

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1$$

για κάθε x. Η Πρόταση 1.12 συγκεντρώνει μερικές βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών αριθμών· όλες οι ιδιότητες είναι γνωστές από το λύκειο.

Πρόταση 1.12 (1) $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.
(2) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
(3) $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\tan(-x) = -\tan x$, $\cot(-x) = -\cot x$.
(4) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$, $\cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x$.
(5) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$, $\tan(x + \pi) = \tan x$, $\cot(x + \pi) = \cot x$.
(6) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
(7) $\cos x - \cos y = -2 \sin\frac{x-y}{2} \sin\frac{x+y}{2}$, $\sin x - \sin y = 2 \sin\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$.
(8) *Έστω k ακέραιος. Τότε (i) $\cos x > \cos x'$, αν $k2\pi \leq x < x' \leq \pi + k2\pi$, και (ii) $\cos x < \cos x'$, αν $\pi + k2\pi \leq x < x' \leq 2\pi + k2\pi$.*
(9) *Έστω k ακέραιος. Τότε (i) $\sin x < \sin x'$, αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2} + k2\pi$, και (ii) $\sin x > \sin x'$, αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < x' \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.*

Απόδειξη: Για την απόδειξη της Πρότασης 1.12 χρησιμοποιούμε απλές γεωμετρικές έννοιες.
(1) Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΟΕΜ.
(2) Στα όμοια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΕΜ είναι $\frac{\text{μήκος του ΑΔ}}{\text{μήκος του ΟΑ}} = \frac{\text{μήκος του ΕΜ}}{\text{μήκος του ΟΕ}}$ και, επομένως, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Επίσης, στα όμοια τρίγωνα ΟΒΓ, ΟΖΜ είναι $\frac{\text{μήκος του ΒΓ}}{\text{μήκος του ΟΒ}} = \frac{\text{μήκος του ΖΜ}}{\text{μήκος του ΟΖ}}$

και, επομένως, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
(3) Και οι τέσσερις ισότητες προκύπτουν από το ότι τα σημεία του κύκλου που αντιστοιχούν στους $x, -x$ είναι συμμετρικά ως προς τη διάμετρο Α΄ΟΑ.
(4) Και οι τέσσερις ισότητες προκύπτουν από το ότι τα σημεία του κύκλου που αντιστοιχούν στους $x, \frac{\pi}{2} - x$ είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας ΑΟΒ.
(5) Και οι τέσσερις ισότητες προκύπτουν από το ότι τα σημεία του κύκλου που αντιστοιχούν στους $x, x + \pi$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο Ο.
(6) Έστω Μ, Ν και Κ τα σημεία του κύκλου που αντιστοιχούν στους x, $-y$ και $x + y$. Τα τόξα ΑΚ (αυτό που περιέχει το Μ) και ΝΜ (αυτό που περιέχει το Α) έχουν το ίδιο μήκος. Επομένως, και οι χορδές ΑΚ και ΝΜ έχουν το ίδιο μήκος, οπότε

$$\sqrt{(\cos(x+y)-1)^2 + (\sin(x+y)-0)^2} = \sqrt{(\cos x - \cos(-y))^2 + (\sin x - \sin(-y))^2}\,.$$

Κάνοντας πράξεις, χρησιμοποιώντας τις (1) και (3), προκύπτει η πρώτη ισότητα στην (6). Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη, χρησιμοποιώντας τις (3) και (4):

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x+y)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + (-y)\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-y) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(-y)\\ &= \sin x \cos y + \cos x \sin y.\end{aligned}$$

(7) Είναι

$$\cos x = \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

και

$$\cos y = \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,.$$

Επομένως,

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\,.$$

Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και η δεύτερη ισότητα της (7).
(8) Αν $k2\pi \le x < x' \le \pi + k2\pi$, τα σημεία Μ, Μ$'$ του κύκλου που αντιστοιχούν στους x, x' είναι στο πάνω ημικύκλιο και το Μ είναι δεξιά του Μ$'$, οπότε $\cos x > \cos x'$. Αν $\pi + k2\pi \le x < x' \le 2\pi + k2\pi$, τότε τα ίδια σημεία Μ, Μ$'$ είναι στο κάτω ημικύκλιο και το Μ είναι αριστερά του Μ$'$, οπότε $\cos x < \cos x'$.
(9) Αν $-\frac{\pi}{2} + k2\pi \le x < x' \le \frac{\pi}{2} + k2\pi$, τα σημεία Μ, Μ$'$ του κύκλου που αντιστοιχούν στους x, x' είναι στο δεξιό ημικύκλιο και το Μ είναι κάτω από το Μ$'$, οπότε $\sin x < \sin x'$. Αν $\frac{\pi}{2} + k2\pi \le x < x' \le \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, τα ίδια σημεία Μ, Μ$'$ είναι στο αριστερό ημικύκλιο και το Μ είναι πάνω από το Μ$'$, οπότε $\sin x > \sin x'$.

Β. Αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

Τώρα θα ορίσουμε τους λεγόμενους *αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς*. Η σχέση τους με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς είναι ανάλογη της σχέσης των λογαρίθμων με τις δυνάμεις. Για τους παρακάτω ορισμούς χρησιμοποιούμε τον ίδιο τριγωνομετρικό κύκλο που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών.

1. Έστω y στο $[-1, 1]$. Στη διάμετρο Α΄ΟΑ προσδιορίζουμε το σημείο Ε που αντιστοιχεί στον y και από το Ε φέρνουμε κάθετη στην Α΄ΟΑ μέχρι να συναντήσει το ημικύκλιο Α΄ΒΑ στο σημείο Μ. Συμβολίζουμε

$$\arccos y$$

τον αριθμό στο $[0, \pi]$ που αντιστοιχεί στο Μ, δηλαδή το μήκος του τόξου ΑΜ.

2. Έστω y στο $[-1, 1]$. Στη διάμετρο Β′ΟΒ προσδιορίζουμε το σημείο Ζ που αντιστοιχεί στον y και από το Ζ φέρνουμε κάθετη στην Β′ΟΒ μέχρι να συναντήσει το ημικύκλιο Β′ΑΒ στο σημείο Μ. Συμβολίζουμε

$$\arcsin y$$

τον αριθμό στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ που αντιστοιχεί στο Μ.

3. Έστω αριθμός y. Στην ευθεία ε προσδιορίζουμε το σημείο Δ που αντιστοιχεί στον y. Έστω Μ το σημείο τομής της ΟΔ με το ημικύκλιο Β′ΑΒ. Συμβολίζουμε

$$\arctan y$$

τον αριθμό στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ που αντιστοιχεί στο Μ.

4. Έστω αριθμός y. Στην ευθεία η προσδιορίζουμε το σημείο Γ που αντιστοιχεί στον y. Έστω Μ το σημείο τομής της ΟΓ με το ημικύκλιο Α′ΒΑ. Συμβολίζουμε

$$\operatorname{arccot} y$$

τον αριθμό στο $(0, \pi)$ που αντιστοιχεί στο Μ.

Παραδείγματα: (1) $\arccos 1 = 0$, $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, $\arccos(-1) = \pi$.

(2) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

(3) $\arctan 0 = 0$ και $\operatorname{arccot} 0 = \frac{\pi}{2}$.

Οι αριθμοί $\arccos y$, $\arcsin y$, $\arctan y$ και $\operatorname{arccot} y$ ονομάζονται, αντιστοίχως, **τόξο-συνημίτονο**, **τόξο-ημίτονο**, **τόξο-εφαπτόμενη** και **τόξο-συνεφαπτόμενη** του y. Και οι τέσσερις αριθμοί ονομάζονται **αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί** του y.

Είναι φανερό ότι για κάθε y στο $[-1, 1]$ ο αριθμός $\arccos y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο $[0, \pi]$ που είναι λύση της εξίσωσης $\cos x = y$. Δηλαδή

$$\boxed{x = \arccos y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \cos x = y \text{ και } 0 \leq x \leq \pi.}$$

Υπάρχει μια ακόμη λύση της $\cos x = y$ στο διάστημα $[-\pi, 0]$, ο αριθμός $-\arccos y$. Οι λύσεις της $\cos x = y$ στο $\mathbf{R}$ είναι οι αριθμοί $\arccos y + k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) και οι $-\arccos y + k2\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Είναι, επίσης, φανερό ότι για κάθε y στο $[-1, 1]$ ο αριθμός $\arcsin y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ που είναι λύση της εξίσωσης $\sin x = y$. Δηλαδή

$$\boxed{x = \arcsin y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \sin x = y \text{ και } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.}$$

Υπάρχει μια ακόμη λύση της $\sin x = y$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, ο αριθμός $\pi - \arcsin y$. Οι λύσεις της $\sin x = y$ στο $\mathbf{R}$ είναι οι αριθμοί $\arcsin y + k2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ και οι $\pi - \arcsin y + k2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Για κάθε y ο αριθμός $\arctan y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ που είναι λύση της εξίσωσης $\tan x = y$. Δηλαδή

$$\boxed{x = \arctan y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \tan x = y \text{ και } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.}$$

Οι λύσεις της $\tan x = y$ στο $\mathbf{R}$ είναι οι αριθμοί $\arctan y + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Για κάθε y ο αριθμός $\operatorname{arccot} y$ είναι ο μοναδικός αριθμός στο διάστημα $(0, \pi)$ που είναι λύση της εξίσωσης $\cot x = y$. Δηλαδή

$$\boxed{x = \operatorname{arccot} y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \cot x = y \text{ και } 0 < x < \pi.}$$

Οι λύσεις της $\cot x = y$ στο $\mathbf{R}$ είναι οι αριθμοί $\operatorname{arccot} y + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Πρόταση 1.13 (1) *Έστω $-1 \leq y < y' \leq 1$. Τότε είναι $\arccos y > \arccos y'$ και $\arcsin y < \arcsin y'$.*
(2) *Έστω $y < y'$. Τότε είναι $\arctan y < \arctan y'$ και $\operatorname{arccot} y > \operatorname{arccot} y'$.*

Απόδειξη: (1) Έστω Ε, Ε′ τα σημεία της διαμέτρου Α′ΟΑ που αντιστοιχούν στους y, y' και Μ, Μ′ τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου Α′ΒΑ. Το Ε είναι αριστερά του Ε′, οπότε το Μ είναι αριστερά του Μ′ και, επομένως, είναι $\arccos y > \arccos y'$.

Ομοίως, έστω Ζ, Ζ′ τα σημεία της διαμέτρου Β′ΟΒ που αντιστοιχούν στους y, y' και Μ, Μ′ τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου Β′ΑΒ. Το Ζ είναι κάτω από το Ζ′, οπότε το Μ είναι κάτω από το Μ′ και, επομένως, είναι $\arcsin y < \arcsin y'$.
(2) Έστω Δ, Δ′ τα σημεία της ευθείας ε που αντιστοιχούν στους y, y' και Μ, Μ′ τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου Β′ΑΒ. Το Δ είναι κάτω από το Δ′, οπότε το Μ είναι κάτω από το Μ′ και, επομένως, είναι $\arctan y < \arctan y'$.

Έστω Γ, Γ′ τα σημεία της ευθείας η που αντιστοιχούν στους y, y' και Μ, Μ′ τα αντίστοιχα σημεία του ημικυκλίου Α′ΒΑ. Το Γ είναι αριστερά του Γ′, οπότε το Μ είναι αριστερά του Μ′ και, επομένως, είναι $\operatorname{arccot} y > \operatorname{arccot} y'$.

Στην ενότητα αυτή είδαμε πώς ορίζονται οι τριγωνομετρικοί και οι αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί. Πρέπει να τονιστεί ότι οι ορισμοί αυτοί (όπως και οι αποδείξεις των διαφόρων ιδιοτήτων) βασίζονται σχεδόν αποκλειστικά σε γεωμετρικές έννοιες και κατασκευές. Είδαμε, δηλαδή, **γεωμετρικούς ορισμούς** των αριθμών αυτών. Στο παρόν στάδιο είναι πολύ δύσκολο να δοθούν **αναλυτικοί ορισμοί**, δηλαδή ορισμοί που δεν εξαρτώνται από τη γεωμετρική εποπτεία αλλά αποκλειστικά από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Δυο τέτοιους ορισμούς θα συναντήσουμε σε επόμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα: ένας πρώτος αναλυτικός ορισμός των $\cos x$ και $\sin x$ θα δοθεί στο Κεφάλαιο 8 και ένας δεύτερος αναλυτικός ορισμός τους θα δοθεί στο Κεφάλαιο 10.

Σημειώστε ότι, αφού γνωρίσουμε τους αναλυτικούς ορισμούς των τριγωνομετρικών και των αντίστροφων τριγωνομετρικών αριθμών, όσα είπαμε στην ενότητα αυτή δε θα είναι τίποτε άλλο από την περιγραφή του γεωμετρικού περιεχομένου των αριθμών αυτών.

Και κάτι ακόμη. Είπαμε ότι ο αριθμός π συμβολίζει το μισό του μήκους ενός κύκλου ακτίνας 1. Στο Κεφάλαιο 2 θα δούμε πιο προσεκτικά το ακριβές νόημα του όρου «μήκος του κύκλου» και θα δώσουμε έναν αναλυτικό ορισμό του αριθμού π. Δυο ακόμη αναλυτικοί ορισμοί του π υπάρχουν στα Κεφάλαια 8 και 10.

Ασκήσεις.

A. Τριγωνομετρικοί αριθμοί.

1. Υπολογίστε με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου και απλών γεωμετρικών ιδιοτήτων τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{3}$.

2. Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις.

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \sin x = -\frac{1}{2}, \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan x = 0, \quad \cot x = -1, \quad \tan x = -\sqrt{3}, \quad \cot x = \sqrt{3}.$$

3. Αποδείξτε ότι $|a\cos x + b\sin x| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

4. Αποδείξτε με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ότι για κάθε a, b με την ιδιότητα $a^2+b^2=1$ υπάρχει μοναδικός q στο διάστημα $[0, 2\pi)$ ώστε να είναι
$$\cos q = a \quad \text{και} \quad \sin q = b.$$

5. Έστω οποιοιδήποτε a, b όχι και οι δυο ίσοι με 0. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι υπάρχουν αριθμοί $p > 0$ και q ώστε να είναι
$$a\cos x + b\sin x = p\cos(x-q)$$
για κάθε x.
(Υπόδειξη: $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\big)$.)

6. Αποδείξτε ότι
(i) $\cos y = \cos x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = -x + k2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$,
(ii) $\sin y = \sin x$ αν και μόνο αν $y = x + k2\pi$ ή $y = \pi - x + k2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$,
(iii) $\tan y = \tan x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$,
(iv) $\cot y = \cot x$ αν και μόνο αν $y = x + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

7. Αποδείξτε ότι
$$1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}, \qquad 1 + (\cot x)^2 = \frac{1}{(\sin x)^2}.$$

8. Αποδείξτε ότι
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \cot(x+y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}.$$

9. Αποδείξτε ότι
$$\cos(2x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = 2(\cos x)^2 - 1 = 1 - 2(\sin x)^2 \,,$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x,$$
$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-(\tan x)^2}\,, \qquad \cot(2x) = \frac{(\cot x)^2 - 1}{2\cot x}\,.$$

10. Αποδείξτε ότι
$$\cos x = \frac{1-(\tan\frac{x}{2})^2}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}\,, \qquad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}\,,$$
$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-(\tan\frac{x}{2})^2}\,, \qquad \cot x = \frac{1-(\tan\frac{x}{2})^2}{2\tan\frac{x}{2}}\,.$$

11. Αποδείξτε ότι
$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y), \quad 2\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y),$$
$$2\sin x\cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y).$$

12. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι
$$\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\cos(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\,,$$
$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin(\frac{nx}{2})\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\,.$$
(Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε με το $\sin\frac{x}{2}$.)

Β. Αντίστροφοι τριγωνομετρικοί αριθμοί.

1. Βρείτε με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου τους αντίστροφους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ και ± 1.

2. Αποδείξτε ότι
$$\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \le y \le 1), \qquad \arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}\,.$$

3. Για ποιους y ισχύουν οι ισότητες $y = \cos(\arccos y)$ και $y = \sin(\arcsin y)$;
   Για ποιους y ισχύουν οι ισότητες $y = \tan(\arctan y)$ και $y = \cot(\operatorname{arccot} y)$;

4. Αποδείξτε ότι $\arccos(\cos x) = x$ για κάθε x στο $[0, \pi]$.
   Γενικότερα, με τι είναι ίση η παράσταση $\arccos(\cos x)$, αν ο x ανήκει στο $[k\pi, (k+1)\pi]$, όπου k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος;
   Τι ανάλογο μπορείτε να πείτε για καθεμιά από τις παραστάσεις $\arcsin(\sin x)$, $\arctan(\tan x)$ και $\operatorname{arccot}(\cot x)$;

Κεφάλαιο 2

Ακολουθίες και όρια ακολουθιών.

Ακολουθίες (αριθμών). Μονότονες ακολουθίες, φραγμένες ακολουθίες. Όριο ακολουθίας: ο ορισμός «με τους ϵ και n_0» και παραλλαγές, παραδείγματα. Όρια και αλγεβρικές πράξεις. Απροσδιόριστες μορφές. Όρια και ανισότητες. Όρια και φραγμένες ακολουθίες. Όρια μονότονων ακολουθιών. Οι αριθμοί e και π.

2.1 Ορισμοί.

Χαρακτηρίζουμε **ακολουθία (πραγματικών αριθμών)** *οποιαδήποτε* άπειρη επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά: πρώτος αριθμός, δεύτερος αριθμός, τρίτος αριθμός κλπ. Οι επιλεγμένοι αριθμοί ονομάζονται **όροι** της ακολουθίας και συμβολίζονται με ένα γράμμα κοινό για όλους και με ένα **δείκτη** που δείχνει τη σειρά επιλογής και διατρέχει το σύνολο των φυσικών· πρώτα τον 1, μετά τον 2, μετά τον 3 κλπ. Για παράδειγμα:

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \qquad y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, \qquad z_1, z_2, \dots, z_n, \dots .$$

Για τις ακολουθίες χρησιμοποιούμε και τα συνοπτικότερα σύμβολα

$$(x_n), \qquad (y_n), \qquad (z_n).$$

Μπορούμε να φανταστούμε ότι ο δείκτης n εκφράζει *χρονικές στιγμές* (δευτερόλεπτα, για παράδειγμα) και ότι σε κάθε χρονική στιγμή επιλέγουμε έναν αριθμό, φτιάχνοντας μια ακολουθία αριθμών: ο δεύτερος αριθμός *ακολουθεί* τον πρώτο, ο τρίτος *ακολουθεί* τον δεύτερο και ούτω καθ' εξής. Ο όρος x_{n+1} χαρακτηρίζεται **επόμενος** του x_n και ο x_{n-1} **προηγούμενος** του x_n .

Παραδείγματα: (1) Η ακολουθία $(\frac{1}{n})$, δηλαδή η $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$.

(2) Η ακολουθία (n), δηλαδή η $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$.

(3) Η ακολουθία (1), δηλαδή η $1, 1, 1, \dots, 1, \dots$.

(4) Η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$, δηλαδή η $1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, \dots$.

(5) Η ακολουθία $\big(\frac{1}{10^n}\big)$, δηλαδή η $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots$.

(6) Η ακολουθία με n-οστό όρο ίσο με το πλήθος των θετικών διαιρετών του n, δηλαδή η ακολουθία $1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, \dots$.

Είναι σημαντικό να καταλάβουμε ότι μια ακολουθία είναι *οποιαδήποτε* επιλογή αριθμών με συγκεκριμένη σειρά. Φανταστείτε μια «μηχανή» η οποία κάθε δευτερόλεπτο επιλέγει έναν αριθμό με τελείως αυθαίρετο τρόπο: οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να είναι η πρώτη επιλογή, οποιοσδήποτε αριθμός μπορεί να είναι η δεύτερη επιλογή και ούτω καθ' εξής. Πάντως, τα παραδείγματα που έχουν ενδιαφέρον παρουσιάζουν κάποια «κανονικότητα»· υπάρχει κάποια συγκεκριμένη διαδικασία – συνήθως κάποιος μαθηματικός τύπος – με την οποία υπολογίζεται ο n-οστός όρος μιας τέτοιας ακολουθίας.

Κάθε όρος μιας ακολουθίας ακολουθεί τον προηγούμενό του *σε σειρά επιλογής* (χρονική, σύμφωνα με το μοντέλο των χρονικών στιγμών) και *όχι σε μέγεθος*. Στο δεύτερο παράδειγμα οι όροι αυξάνονται, στο πρώτο και στο πέμπτο οι όροι μειώνονται, στο τρίτο οι όροι μένουν αμετάβλητοι και στο τέταρτο και έκτο παράδειγμα οι όροι αυξομειώνονται (πιο κανονικά στο τέταρτο, ακανόνιστα στο έκτο παράδειγμα).

Μια ακολουθία είναι διαδοχική επιλογή αριθμών, *δεν* είναι το σύνολο με στοιχεία αυτούς τους αριθμούς. Στο τρίτο παράδειγμα το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι το μονοσύνολο $\{1\}$. Η ακολουθία, όμως, δεν είναι το μονοσύνολο αυτό· είναι η διαδοχική επιλογή $1, 1, 1, \dots$. Με άλλα λόγια, το πλήθος των όρων μιας ακολουθίας είναι πάντοτε άπειρο, ενώ το σύνολο με στοιχεία τους όρους της ακολουθίας είναι άλλοτε άπειρο (πρώτο, δεύτερο, πέμπτο και έκτο παράδειγμα) και άλλοτε πεπερασμένο (τρίτο και τέταρτο παράδειγμα).

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **αύξουσα** αν είναι $x_{n+1} \geq x_n$ για κάθε n. Η (x_n) χαρακτηρίζεται **γνησίως αύξουσα** αν $x_{n+1} > x_n$ για κάθε n. Η (x_n) χαρακτηρίζεται **φθίνουσα** αν $x_{n+1} \leq x_n$ για κάθε n. Τέλος, η (x_n) χαρακτηρίζεται **γνησίως φθίνουσα** αν $x_{n+1} < x_n$ για κάθε n. Μια ακολουθία χαρακτηρίζεται **μονότονη** αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα και **γνησίως μονότονη** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Στα προηγούμενα παραδείγματα: οι ακολουθίες του πρώτου και του πέμπτου παραδείγματος είναι γνησίως φθίνουσες, του δεύτερου παραδείγματος είναι γνησίως αύξουσα και οι ακολουθίες του τέταρτου και του έκτου παραδείγματος δεν είναι ούτε αύξουσες ούτε φθίνουσες.

Η (x_n) χαρακτηρίζεται **σταθερή** αν όλοι οι όροι της ειναι ίσοι με τον ίδιο αριθμό, δηλαδή αν υπάρχει κάποιος αριθμός c ώστε $x_n = c$ για κάθε n. Είναι προφανές ότι μια σταθερή ακολουθία είναι αύξουσα και φθίνουσα ακολουθία. Τέτοια ακολουθία είναι η ακολουθία του τρίτου παραδείγματος.

Η ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** αν υπάρχει ένα **άνω φράγμα** της, δηλαδή κάποιος u ώστε να είναι $x_n \leq u$ για κάθε n. Ομοίως, η (x_n) χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** αν υπάρχει ένα **κάτω φράγμα** της, δηλαδή κάποιος l ώστε να είναι $l \leq x_n$ για κάθε n. Η ακολουθία (x_n) χαρακτηρίζεται **φραγμένη** αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, δηλαδή αν υπάρχουν l, u ώστε να είναι $l \leq x_n \leq u$ για κάθε n ή, ισοδύναμα, αν όλοι οι όροι της ανήκουν σε κάποιο φραγμένο διάστημα $[l, u]$.

Παραδείγματα: (1) Κάθε σταθερή ακολουθία (c) είναι, προφανώς, φραγμένη. Όλοι οι όροι της ανήκουν στο διάστημα $[c, c]$.

(2) Η $\left(\frac{1}{n}\right)$ είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.

(3) Η $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$ είναι φραγμένη διότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[-\frac{1}{2}, 1]$.

(4) Η $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ είναι φραγμένη διότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[0, 1]$.

(5) Η $\left((-1)^{n-1}\right)$ είναι φραγμένη αφού όλοι οι όροι της ανήκουν στο $[-1, 1]$.

(6) Η $\left(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\right)$, δηλαδή η ακολουθία $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, 0, \ldots$, είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη. Κάθε αριθμός ≤ 0 είναι κάτω φράγμα της ακολουθίας. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποιο άνω φράγμα u της ακολουθίας αυτής. Τότε είναι $\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2} \leq u$ για κάθε φυσικό n, οπότε, δοκιμάζοντας τους περιττούς $n = 2k-1$, συνεπάγεται $2k-1 \leq u$ για κάθε φυσικό k. Επομένως, είναι $k \leq \frac{u+1}{2}$ για κάθε φυσικό k, το οποίο αντιφάσκει με το Θεώρημα 1.1.

(7) Η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, 0, \ldots$, δηλαδή η αντίθετη της προηγούμενης, είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη· αν κάποιος αριθμός l ήταν κάτω φράγμα της ακολουθίας αυτής, δηλαδή αν όλοι οι όροι της ήταν $\geq l$, τότε όλοι οι όροι της προηγούμενης ακολουθίας θα ήταν $\leq -l$, οπότε η προηγούμενη ακολουθία θα ήταν άνω φραγμένη.

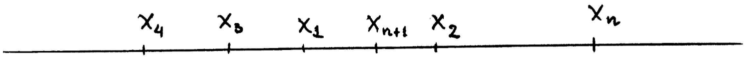
(8) Η $\left((-1)^{n-1}n\right)$, δηλαδή η $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$, δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη. Για να το αποδείξουμε υποθέτουμε ότι για κάποιον u ή για κάποιον l είναι $(-1)^{n-1}n \leq u$ για κάθε n ή $l \leq (-1)^{n-1}n$ για κάθε n, αντιστοίχως, και καταλήγουμε σε άτοπο δοκιμάζοντας περιττούς ή άρτιους n, αντιστοίχως.

Έστω ότι η (x_n) είναι φραγμένη, δηλαδή όλοι οι x_n ανήκουν σε ένα φραγμένο διάστημα $[l, u]$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι τότε όλοι οι όροι της (x_n) ανήκουν και σε κάποιο διάστημα συμμετρικό ως προς το σημείο 0. Χρειάζεται μόνο να βρούμε κάποιο διάστημα $[-M, M]$ αρκετά μεγάλο ώστε να είναι υπερσύνολο του $[l, u]$, Αρκεί να θεωρήσουμε $M = \max\{u, -l\}$. Άρα μπορούμε να πούμε ότι, αν η (x_n) είναι φραγμένη, τότε υπάρχει κάποιος M ώστε να είναι $|x_n| \leq M$ για κάθε n.

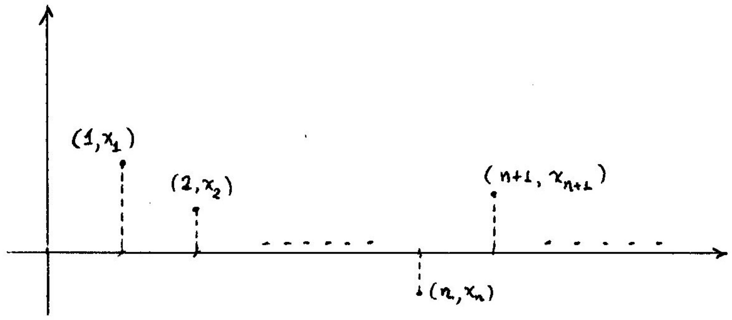
Αν ο αριθμός u είναι άνω φράγμα της (x_n), τότε κάθε αριθμός $> u$ είναι κι αυτός άνω φράγμα της (x_n). Επομένως, αν μια ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα, τότε έχει άπειρα άνω φράγματα. Ομοίως, αν ο l είναι κάτω φράγμα της (x_n), τότε κάθε αριθμός $< l$ είναι επίσης κάτω φράγμα της (x_n). Δηλαδή, αν μια ακολουθία έχει τουλάχιστον ένα κάτω φράγμα, τότε έχει άπειρα κάτω φράγματα.

Χρησιμοποιούμε δυο τρόπους για να *απεικονίσουμε* μια ακολουθία. Ο πρώτος και πιο συνηθισμένος είναι με την απλή αναπαράσταση των όρων της ακολουθίας από σημεία της πραγματικής ευθείας. Αν η (x_n) είναι αύξουσα, τότε, καθώς ο n αυξάνεται, το σημείο x_n «κινείται» προς τα δεξιά πάνω στην ευθεία. Ενώ, αν η

(x_n) είναι φθίνουσα, τότε το σημείο x_n «κινείται» προς τα αριστερά.



Σχήμα 2.1: Αναπαράσταση ακολουθίας στην πραγματική ευθεία.



Σχήμα 2.2: Αναπαράσταση ακολουθίας στο επίπεδο.

Ο δεύτερος τρόπος γεωμετρικής αναπαράστασης μιας ακολουθίας (x_n) χρησιμοποιεί δυο κάθετες πραγματικές ευθείες, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, με κοινό το σημείο 0. Στην οριζόντια ευθεία τοποθετούμε τις τιμές του n και στην κατακόρυφη τις τιμές του αντίστοιχου x_n. Κατόπιν σχεδιάζουμε τα σημεία (n, x_n) του επιπέδου και λέμε ότι αυτά τα σημεία αναπαριστούν την ακολουθία (x_n). Είναι προφανές ότι, ακόμη κι αν όλοι οι x_n είναι ίσοι μεταξύ τους, τα σημεία (n, x_n) είναι διαφορετικά αφού διαφέρουν οι πρώτες συντεταγμένες τους. Επιπλέον, είναι φανερή και η «χρονική» διάταξη των όρων: καθώς ο n αυξάνεται, το σημείο (n, x_n) κινείται απεριόριστα προς τα δεξιά. Ακόμη, αν η (x_n) είναι αύξουσα, τότε, καθώς ο n αυξάνεται, το σημείο (n, x_n) κινείται προς τα πάνω (και απεριόριστα προς τα δεξιά). Ενώ, αν η (x_n) είναι φθίνουσα, τότε το σημείο (n, x_n) κινείται προς τα κάτω (και απεριόριστα προς τα δεξιά). Φυσικά, αν η (x_n) είναι σταθερή, τότε το σημείο (n, x_n) κινείται απεριόριστα προς τα δεξιά πάνω σε μια οριζόντια ευθεία.

Ασκήσεις.

Α. Γενικά για ακολουθίες.

1. Υπολογίστε τους πέντε πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών.

$$\Big(\frac{2n-1}{3n+2}\Big), \quad \Big(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\Big), \quad \Big(\frac{1-(-1)^n}{n^3}\Big), \quad \Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\Big),$$

$$(2^{n!}), \quad \Big(\frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Big), \quad \Big(\frac{(-1)^{n-1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\Big), \quad \Big(\frac{n^2-3n+1}{2^n n!}\Big),$$
$$\Big(\frac{(2x)^{n-1}}{(2n-1)^5}\Big), \quad \Big(\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}\Big), \quad \Big(\frac{(-1)^n x^{2n-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots (2n-1)}\Big).$$

2. Μας δίνουν τους έξι πρώτους όρους μιας άγνωστης ακολουθίας:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36.$$

Αν ζητηθεί να μαντέψουμε τον έβδομο όρο της ακολουθίας, ποια από τις επόμενες τρεις είναι η σωστή απάντηση; (i) Ο 49. (ii) Ο 24. (iii) Οποιοσδήποτε αριθμός είναι πιθανός έβδομος όρος.

3. Βρείτε τα σύνολα των όρων των παρακάτω ακολουθιών.

$$(n), \quad (-n), \quad \big((-1)^{n-1}\big), \quad \Big(\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\Big), \quad \Big(\frac{a+b}{2}+(-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}\Big).$$

(Υπόδειξη: Βρείτε αρκετούς αρχικούς όρους καθεμιάς ακολουθίας.)

4. Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών $\big(n-2[\frac{n}{2}]\big)$, $\big(n-3[\frac{n}{3}]\big)$ και $\big(n-4[\frac{n}{4}]\big)$. Γενικότερα, αν ο m είναι φυσικός, βρείτε το σύνολο των όρων της ακολουθίας $\big(n-m[\frac{n}{m}]\big)$.

5. **Γραμμικοί αναδρομικοί τύποι**. Έστω αριθμοί a, b, p, q, όπου οι p, q δεν είναι και οι δυο 0. Θεωρούμε ακολουθία (x_n) που ορίζεται από τους δυο πρώτους όρους της και από *αναδρομικό τύπο* ως εξής:

$$x_1 = a, x_2 = b \quad \text{και} \quad x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n \ (n \geq 1).$$

Θα περιγράψουμε γενική μέθοδο υπολογισμού του n-οστού όρου x_n .

Περίπτωση 1: $p \neq 0, q = 0$. Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι $x_n = bp^{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

Περίπτωση 2: $p = 0, q \neq 0$. Αποδείξτε ότι $x_n = aq^{\frac{n-1}{2}}$, αν ο n είναι περιττός, και $x_n = bq^{\frac{n-2}{2}}$, αν ο n είναι άρτιος.

Περίπτωση 3: $p \neq 0, q \neq 0$. Θεωρήστε την πολυωνυμική εξίσωση δεύτερου βαθμού

$$x^2 = px + q.$$

(i) Αν $\Delta = p^2 + 4q > 0$, η εξίσωση έχει δυο (διαφορετικές) λύσεις, τις $\rho_1 = \frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικοί κ, λ ώστε να είναι $\kappa + \lambda = a$ και $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = b$ και βρείτε τους. Αποδείξτε ότι

$$x_n = \kappa{\rho_1}^{n-1} + \lambda{\rho_2}^{n-1}$$

για κάθε $n \geq 1$.

(ii) Αν $\Delta = p^2 + 4q = 0$, η εξίσωση έχει μια λύση, την $\rho = \frac{p}{2}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικοί κ, λ ώστε να είναι $\kappa = a$ και $\kappa\rho + \lambda\rho = b$ και βρείτε τους. Αποδείξτε ότι

$$x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}$$

για κάθε $n \geq 1$.

(iii) Αν $\Delta = p^2 + 4q < 0$ (οπότε $q < 0$), η εξίσωση έχει δυο (διαφορετικές) συζυγείς μιγαδικές λύσεις, τις $\rho_1 = \frac{p+i\sqrt{-\Delta}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{p-i\sqrt{-\Delta}}{2}$. Πάρτε $\rho = \sqrt{-q} > 0$ και παρατηρήστε ότι $\big(\frac{p}{2\rho}\big)^2 + \big(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}\big)^2 = 1$, οπότε υπάρχει μοναδικός θ στο διάστημα $[0, 2\pi)$ ώστε να είναι $\cos\theta = \frac{p}{2\rho}$ και $\sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho}$. Συνεπάγεται ότι $\rho_1 = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $\rho_2 = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$. Αποδείξτε ότι $\rho^2\cos(2\theta) = p\rho\cos\theta + q$ και $\rho^2\sin(2\theta) = p\rho\sin\theta$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικοί κ, λ ώστε να είναι $\kappa = a$ και $\rho(\kappa\cos\theta + \lambda\sin\theta) = b$ και βρείτε τους. Τέλος, αποδείξτε ότι

$$x_n = \rho^{n-1}\big(\kappa\cos((n-1)\theta) + \lambda\sin((n-1)\theta)\big)$$

για κάθε $n \geq 1$.

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να υπολογίσετε τον n-οστό όρο καθεμιάς από τις τέσσερις ακολουθίες που ορίζονται από τους (κοινούς και για τις τέσσερις) πρώτους όρους

$$x_1 = x_2 = 1$$

και από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους.

$$x_{n+2} = 3x_n \ (n \geq 1), \qquad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \ (n \geq 1),$$

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n \ (n \geq 1), \qquad x_{n+2} = x_{n+1} - x_n \ (n \geq 1).$$

Η δεύτερη ακολουθία, δηλαδή αυτή που ορίζεται από τους $x_1 = x_2 = 1$ και από τον αναδρομικό τύπο $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $(n \geq 1)$, ονομάζεται **ακολουθία Fibonnaci** και οι εφτά αρχικοί όροι της είναι οι $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13$.

Β. Μονότονες ακολουθίες.

1. Αν η (x_n) είναι αύξουσα και φθίνουσα, αποδείξτε ότι είναι σταθερή.

2. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα αν και μόνο αν η $(-x_n)$ είναι φθίνουσα ή αύξουσα, αντιστοίχως.

3. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες; γνησίως μονότονες;

   Παρατηρήστε ότι μερικές από τις ακολουθίες αυτές, ενώ δεν είναι μονότονες, έχουν την ιδιότητα να είναι μονότονες *από κάποιον δείκτη και πέρα*· προσδιορίστε τις.

$$(n), \quad ((-1)^{n-1}), \quad ((-1)^{n-1}n), \quad \Big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big), \quad (2^n), \quad \Big(\frac{1}{2^n}\Big),$$

$$\Big(\frac{8n-1}{n^2+n+1}\Big), \quad \Big(\binom{n+15}{16}\Big), \quad \Big(\frac{8^n}{n!}\Big), \quad \Big(2\Big[\frac{n}{2}\Big]\Big), \quad \Big(n - 3\Big[\frac{n}{3}\Big]\Big).$$

Γ. Φραγμένες ακολουθίες.

1. Ποιες από τις ακολουθίες της προηγούμενης άσκησης είναι άνω φραγμένες; κάτω φραγμένες; φραγμένες;
2. Αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη – βρίσκοντας συγκεκριμένο κάτω φράγμα – και ότι κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη – βρίσκοντας συγκεκριμένο άνω φράγμα.
3. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη αν και μόνο αν η $(-x_n)$ είναι κάτω φραγμένη ή άνω φραγμένη, αντιστοίχως.

2.2 Όριο ακολουθίας.

Παραδείγματα: (1) Ας παρατηρήσουμε τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$. Αυτοί είναι οι

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{100}, \frac{1}{101}, \ldots, \frac{1}{100000}, \ldots, \frac{1}{100000000}, \ldots.$$

Είναι σαφές ότι, αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος», τότε το μέγεθος του αντίστοιχου όρου $\frac{1}{n}$ της ακολουθίας θα γίνει «όσο θέλουμε μικρό». Αν, μάλιστα, παρατηρήσουμε τα αντίστοιχα σημεία της πραγματικής ευθείας, βλέπουμε ότι, αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος», τότε το σημείο $\frac{1}{n}$ θα πλησιάσει «όσο θέλουμε κοντά» το σημείο 0. (Τις εκφράσεις σε εισαγωγικά θα τις εξετάσουμε λεπτομερέστερα παρακάτω).

(2) Ας δούμε, τώρα, τους διαδοχικούς όρους της ακολουθίας $(\frac{n-1}{n})$:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{99}{100}, \frac{100}{101}, \ldots, \frac{99999}{100000}, \ldots, \frac{99999999}{100000000}, \ldots.$$

Αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος», τότε η απόσταση του αντίστοιχου όρου $\frac{n-1}{n}$ από τον αριθμό 1 θα γίνει «όσο θέλουμε μικρή». Πράγματι, η απόσταση του $\frac{n-1}{n}$ από τον 1 είναι ίση με $|\frac{n-1}{n} - 1| = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ και, όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, ο αντίστοιχος $\frac{1}{n}$ θα γίνει όσο θέλουμε μικρός. Και σ' αυτό το παράδειγμα, αν παρατηρήσουμε τα αντίστοιχα σημεία της πραγματικής ευθείας, βλέπουμε ότι, αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος», τότε το σημείο $\frac{n-1}{n}$ θα πλησιάσει «όσο θέλουμε κοντά» το σημείο 1.

Στα παραδείγματα αυτά είδαμε δυο ακολουθίες (x_n) με την εξής κοινή ιδιότητα:

Αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος», η απόσταση του x_n από τον αριθμό x θα γίνει «όσο θέλουμε μικρή».

Επειδή η ιδιότητα της προσέγγισης των όρων μιας ακολουθίας σε κάποιον αριθμό είναι εξαιρετικά σημαντική, θα την μελετήσουμε διεξοδικά και θα προσπαθήσουμε *να την περιγράψουμε / ορίσουμε με την αυστηρή μαθηματική γλώσσα.*

Βλέπετε, στα προηγούμενα παραδείγματα οι ακολουθίες ήταν αρκετά απλές και μπορέσαμε εύκολα να διακρίνουμε (από την απλή αναπαράσταση των όρων τους από σημεία της πραγματικής ευθείας) αν αυτές έχουν την παραπάνω ιδιότητα. Υπάρχουν, όμως, πολύ πιο περίπλοκες ακολουθίες για τις οποίες δεν αρκεί (και δεν είναι εφικτή) η γεωμετρική αναπαράστασή τους, οπότε χρειαζόμαστε έναν αυστηρό ορισμό ο οποίος θα επιτρέψει έναν «αναλυτικό» έλεγχο για το αν αυτές έχουν την ιδιότητα για την οποία μιλάμε.

Όταν λέμε ότι η απόσταση του x_n από τον x θα γίνει «όσο θέλουμε μικρή» εννοούμε ότι η $|x_n - x|$ θα γίνει «μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό». Όταν λέμε «αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος» εννοούμε «αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό». Μπορούμε, λοιπόν, να διατυπώσουμε πιο καθαρά την ιδιότητα που εξετάζουμε ως εξής:

Η $|x_n - x|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό.

Φτάσαμε στο κρίσιμο σημείο. Ας δούμε ξανά το:

Παράδειγμα: Έστω η ακολουθία $(\frac{1}{n})$. Η απόσταση του $\frac{1}{n}$ από τον 0 είναι ίση με $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$ και, όπως έχουμε ήδη πει, θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό. Τι σημαίνει αυτό; Ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε μικρό θετικό αριθμό, για παράδειγμα τον $0,000132$. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει μικρότερη από τον $0,000132$ αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό; Με άλλα λόγια: μεγαλύτερος από πόσο πρέπει να γίνει ο n ώστε η απόσταση $\frac{1}{n}$ να γίνει μικρότερη από τον $0,000132$; Αυτό είναι εύκολο: για να γίνει $\frac{1}{n} < 0,000132$ αρκεί να γίνει $n > \frac{1000000}{132}$. Ποιοι φυσικοί αριθμοί n είναι $> \frac{1000000}{132}$; Παρατηρούμε ότι ο φυσικός 7576 είναι $> \frac{1000000}{132}$ (ενώ ο φυσικός 7575 είναι $\leq \frac{1000000}{132}$) και, επομένως, αν ο δείκτης n γίνει ≥ 7576, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει $< 0,000132$. Ας πάρουμε, για δεύτερο παράδειγμα τον μικρό θετικό αριθμό $0,0000000000132$. Με τους ίδιους συλλογισμούς βλέπουμε ότι, αν ο δείκτης n γίνει ≥ 75757575758, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει $< 0,0000000000132$. Αυτήν την διαδικασία μπορούμε, αν θέλουμε, να την επαναλάβουμε πολλές φορές: κάθε φορά θα επιλέγουμε έναν πολύ μικρό θετικό αριθμό (όπως τους $0,000132$ και $0,0000000000132$) και κατόπιν θα βρίσκουμε έναν κατάλληλο αριθμό (όπως τους 7576 και 75757575758). Δεν είναι, όμως, αυτό που πρέπει να γίνει. Αυτό που χρειάζεται είναι να αποδείξουμε ότι για *κάθε* θετικό αριθμό υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος αριθμός. Οι θετικοί αριθμοί είναι άπειροι και, όσες φορές κι αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία, ποτέ δε θα τελειώσουμε. Γι αυτό πρέπει να θεωρήσουμε όχι συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς αλλά τον *γενικό θετικό αριθμό* με ένα γενικό σύμβολο, για παράδειγμα το σύμβολο ϵ, και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός αριθμός, ας τον συμβολίσουμε n_0, ώστε, αν ο n γίνει $\geq n_0$, τότε η απόσταση $\frac{1}{n}$ θα γίνει $< \epsilon$. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς το περιεχόμενο της Αρχιμήδειας Ιδιότητας: *για κάθε* $\epsilon > 0$, *οσοδήποτε μικρό, υπάρχει κάποιος φυσικός* n_0 *ώστε όλοι οι* $\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \ldots$ *να είναι* $< \epsilon$. Είναι φανερό (και από τα παραδείγματα με τους δυο συγκεκριμένους ϵ που εξετάσαμε) ότι η τιμή του n_0

εξαρτάται από την τιμή του ϵ. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον n_0 (συναρτήσει του ϵ) από τον οποίο και πέρα ισχύει $\frac{1}{n} < \epsilon$; Θα κάνουμε ό,τι κάναμε για τα συγκεκριμένα παραδείγματα. Γράφουμε την $\frac{1}{n} < \epsilon$ ισοδύναμα ως $n > \frac{1}{\epsilon}$ (δηλαδή, λύνουμε ως προς n) και σκεφτόμαστε ότι:

Ο πιο μικρός φυσικός που είναι $> a$ είναι ο $n_0 = [a] + 1$, αν $a \geq 0$, και ο $n_0 = 1$, αν $a < 0$.

Για παράδειγμα: ο πιο μικρός φυσικός που είναι > -1 είναι ο 1, ο πιο μικρός φυσικός που είναι $> \frac{8}{3}$ είναι (επειδή $2 < \frac{8}{3} < 3$) ο $3 = [\frac{8}{3}] + 1$ και ο πιο μικρός φυσικός που είναι > 2 είναι και πάλι ο $3 = 2 + 1 = [2] + 1$.

Άρα (επειδή $\frac{1}{\epsilon} \geq 0$) ο n_0 που ψάχνουμε είναι ο $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Εργαζόμενοι με τον γενικό θετικό ϵ, (εκτός από το ότι αυτό είναι το σωστό) έχουμε καταφέρει να βρούμε και έναν γενικό τύπο για τον n_0 συναρτήσει του ϵ, οπότε για κάθε συγκεκριμένο ϵ μπορούμε να υπολογίζουμε αμέσως τον αντίστοιχο κατάλληλο n_0.

Διατυπώνουμε τον εξής ορισμό. Λέμε ότι **η** (x_n) **συγκλίνει στον** x ή **τείνει στον** x ή ότι **ο** x **είναι το όριο της** (x_n) αν *η απόσταση* $|x_n - x|$ *θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε* $\epsilon > 0$ *αν ο* n *γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό* n_0 ή, ισοδύναμα, αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε να είναι* $|x_n - x| < \epsilon$ *αν* $n \geq n_0$. Το ότι η (x_n) συγκλίνει στον x το συμβολίζουμε

$$x_n \to x \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Δεν βλάπτει να αναδιατυπώσουμε τον προηγούμενο ορισμό με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους. Η (x_n) συγκλίνει στον x αν *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε να είναι* $|x_n - x| < \epsilon$ *για κάθε* $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να είναι* $|x_n - x| < \epsilon$ ή, ισοδύναμα, *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε από* $n \geq n_0$ *να συνεπάγεται* $|x_n - x| < \epsilon$.

Σχήμα 2.3: $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Αν μια ακολουθία (x_n) δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό, τότε λέμε ότι **η** (x_n) **αποκλίνει**.

Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο του ορίου $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$; Σε συνδυασμό με το χρονικό μοντέλο για τον δείκτη n, δηλαδή αν δεχτούμε ότι ο n μετρά χρόνο (δευτερόλεπτα, για παράδειγμα), το $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ σημαίνει ότι *το σημείο* x_n, *μετακινούμενο πάνω στην πραγματική ευθεία, θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το σημείο* x *όταν ο χρόνος* n *γίνει αρκετά μεγάλος.*

Παραδείγματα: (1) Σύμφωνα με τα δυο προηγούμενα παραδείγματα, είναι

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}=1$.

(2) Έστω η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$. Οι διαδοχικοί όροι της είναι οι

$$1,-1,1,-1,\ldots,1,-1,1,-1,\ldots.$$

Καθώς ο χρόνος n κυλά απεριόριστα, το σημείο $(-1)^{n-1}$ «πηδά» από το σημείο 1 στο σημείο -1 και ξανά πίσω στο σημείο 1 χωρίς να πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά κάποιο συγκεκριμένο σημείο. Επομένως, η $\big((-1)^{n-1}\big)$ δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι «μισοί» όροι της ακολουθίας πλησιάζουν (και, μάλιστα, ταυτίζονται με) το σημείο 1 και οι άλλοι «μισοί» πλησιάζουν (και, μάλιστα, ταυτίζονται με) το σημείο -1.

$$\boxed{\text{Η ακολουθία } \big((-1)^{n-1}\big) \text{ αποκλίνει.}}$$

Ας δούμε, λοιπόν, μια μαθηματική απόδειξη του ότι η $\big((-1)^{n-1}\big)$ δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η $\big((-1)^{n-1}\big)$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό x. Τότε για *κάθε* $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να είναι $|(-1)^{n-1}-x|<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Όποιος κι αν είναι ο n_0 υπάρχουν και άρτιοι $n\geq n_0$ και περιττοί $n\geq n_0$. Επομένως, από τους άρτιους $n\geq n_0$ θα προκύψει $|-1-x|<\epsilon$ και από τους περιττούς $n\geq n_0$ θα προκύψει $|1-x|<\epsilon$. Συμπεραίνουμε ότι για *κάθε* $\epsilon>0$ ισχύει $|-1-x|<\epsilon$ και $|1-x|<\epsilon$. Επομένως, θα ισχύει $|-1-x|<\frac{1}{2}$ και $|1-x|<\frac{1}{2}$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο όποιος κι αν είναι ο αριθμός x! Λίγο αργότερα θα δούμε μια δεύτερη μαθηματική απόδειξη του ότι η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$ δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό x ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.15 και του ότι η ακολουθία αυτή έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1.

(3) Έστω η ακολουθία $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$, δηλαδή η $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\ldots$. Η απόσταση του n-οστού όρου από τον 0 είναι $\big|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\big|=\frac{1}{n}$, οπότε, και πάλι, για κάθε $\epsilon>0$ υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να είναι $\big|\frac{(-1)^{n-1}}{n}-0\big|=\frac{1}{n}<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=0$.

(4) Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (c), δηλαδή την $c,c,c,c,\ldots$. Τότε

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}c=c.}$$

Πράγματι, οι αποστάσεις *όλων* των όρων της ακολουθίας από τον c είναι ίσες με $|c-c|=0$. Επομένως, για κάθε $\epsilon>0$ μπορούμε να επιλέξουμε τον φυσικό $n_0=1$ και τότε θα είναι $|c-c|=0<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0=1$.

(5) Ας δούμε μια γενίκευση της $(\frac{1}{n})$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $a>0$ και την ακολουθία $(\frac{1}{n^a})$, δηλαδή την $1,\frac{1}{2^a},\frac{1}{3^a},\frac{1}{4^a},\ldots$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^a}=0\qquad(a>0).}$$

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον φυσικό n_0 ώστε να είναι $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα σκεφτόμαστε ότι για να είναι $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{1}{n^a} < \epsilon$ αρκεί να είναι $n^a > \frac{1}{\epsilon}$ αρκεί να είναι $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}$. Επειδή $(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}} \geq 0$, αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = [(\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > (\frac{1}{\epsilon})^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, είναι $|\frac{1}{n^a} - 0| < \epsilon$.

Για παράδειγμα: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

Για να αποδείξουμε ένα όριο $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ *χρησιμοποιώντας τον ορισμό*, θα ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Θα παίρνουμε $\epsilon > 0$ και θα δημιουργούμε μια «αλυσίδα» από ανισότητες, αρχίζοντας από την $|x_n - x| < \epsilon$ και καταλήγοντας σε μια ανισότητα της μορφής $n > a$ και προσέχοντας ώστε κάθε ανισότητα να συνεπάγεται την προηγούμενή της. Αυτό σε κάθε βήμα εκφράζεται ως εξής: «είναι ανισότητα$_1$ αρκεί να είναι ανισότητα$_2$» ή, συμβολικά, «ανισότητα$_1 \Longleftarrow$ ανισότητα$_2$». Όταν φτάνουμε στην ανισότητα $n > a$ θα θεωρούμε τον *φυσικό* αριθμό $n_0 = [a] + 1$, αν $a \geq 0$, ή τον $n_0 = 1$, αν $a < 0$, και τότε θα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > a$ οπότε, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, είναι $|x_n - x| < \epsilon$.

Παραδείγματα: (1) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+n} = 0$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον φυσικό n_0 ώστε να είναι $|\frac{1}{n^2+n} - 0| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Για να είναι $|\frac{1}{n^2+n} - 0| < \epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{1}{n^2+n} < \epsilon$ αρκεί να είναι $n^2 + n - \frac{1}{\epsilon} > 0$ αρκεί να είναι $n > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{\epsilon}}$ ή $n < -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{\epsilon}}$ αρκεί (προσέξτε: *μας ενδιαφέρουν οι δείκτες n που είναι μεγαλύτεροι από κάποιον αριθμό*) να είναι $n > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{\epsilon}}$. Παρατηρούμε τώρα ότι ο αριθμός $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{\epsilon}}$ είναι ≥ 0. Αν, λοιπόν, θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = \big[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{\epsilon}}\big] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{\epsilon}}$ και, επομένως, είναι $|\frac{1}{n^2+n} - 0| < \epsilon$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να απλοποιηθεί ως εξής. Για να είναι $|\frac{1}{n^2+n} - 0| < \epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{1}{n^2+n} < \epsilon$ αρκεί (επειδή $\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n}$) να είναι $\frac{1}{n} < \epsilon$ αρκεί να είναι $n > \frac{1}{\epsilon}$. Επειδή $\frac{1}{\epsilon} \geq 0$, αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > \frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, είναι $|\frac{1}{n^2+n} - 0| < \epsilon$.

(2) Θεωρούμε την (x_n), όπου $x_n = \frac{3+(-1)^n}{2n} = \begin{cases} \frac{2}{n}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,} \\ \frac{1}{n}, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$ Δηλαδή την ακολουθία $1, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε για να είναι $|x_n - 0| < \epsilon$ αρκεί (επειδή $x_n \geq 0$) να είναι $x_n < \epsilon$ αρκεί (επειδή $x_n \leq \frac{2}{n}$) να είναι $\frac{2}{n} < \epsilon$ αρκεί να είναι $n > \frac{2}{\epsilon}$. Επειδή $\frac{2}{\epsilon} \geq 0$, θεωρούμε τον φυσικό $n_0 = [\frac{2}{\epsilon}] + 1$, οπότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > \frac{2}{\epsilon}$ και, επομένως, είναι $|x_n - 0| < \epsilon$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η (x_n) δεν είναι φθίνουσα, παρά το ότι όλοι οι όροι της είναι > 0 και συγκλίνει στον 0· δείτε την άσκηση 1 αυτής της ενότητας.

(3) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$. Τότε για να είναι $|\frac{\sin n}{n}-0|<\epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{|\sin n|}{n}<\epsilon$ αρκεί (επειδή $\frac{|\sin n|}{n}\leq\frac{1}{n}$) να είναι $\frac{1}{n}<\epsilon$ αρκεί να είναι $n>\frac{1}{\epsilon}$. Επειδή $\frac{1}{\epsilon}\geq 0$, αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0=[\frac{1}{\epsilon}]+1$, τότε για κάθε $n\geq n_0$ είναι $n>\frac{1}{\epsilon}$ και, επομένως, είναι $|\frac{\sin n}{n}-0|<\epsilon$.

(4) **Γεωμετρική πρόοδος**. Θεωρούμε την ακολουθία (a^n), δηλαδή την ακολουθία $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$. Η ακολουθία αυτή είναι γνωστή από το λύκειο και ονομάζεται **γεωμετρική πρόοδος με λόγο** a.

Αν $a=1$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (1) η οποία συγκλίνει στον 1. Επίσης, αν $a=0$, προκύπτει η σταθερή ακολουθία (0) η οποία συγκλίνει στον 0.

Αν $a\leq -1$ (ειδική περίπτωση: $a=-1$ στο προηγούμενο παράδειγμα), τότε οι όροι της είναι $a\leq -1$, $a^2\geq 1$, $a^3\leq -1$, $a^4\geq 1, \ldots$. Επομένως, η ακολουθία έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1 και, βάσει της Πρότασης 2.15, αποκλίνει.

Αν $0<|a|<1$, θα δούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στον 0. Τυπικά παραδείγματα είναι τα $a=\pm\frac{1}{2}$ και τα $a=\pm\frac{1}{10}$. Αν $a=\frac{1}{2}$, προκύπτει η γεωμετρική πρόοδος $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$ και, αν $a=-\frac{1}{10}$, προκύπτει η $-\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, -\frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \ldots$. Υπολογίζοντας πρόχειρα μερικούς όρους τους για αρκετά μεγάλους δείκτες, βλέπουμε εύκολα ότι και οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στον 0.

Έστω, γενικότερα, $0<|a|<1$ κι ας πάρουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$. Για να είναι $|a^n-0|<\epsilon$ αρκεί να είναι $|a|^n<\epsilon$ αρκεί να είναι $n>\log_{|a|}\epsilon$. Τώρα, ισχύει $\log_{|a|}\epsilon\geq 0$, αν $0<\epsilon\leq 1$, και $\log_{|a|}\epsilon<0$, αν $\epsilon>1$. Άρα, αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0=[\log_{|a|}\epsilon]+1$, όταν $\epsilon\leq 1$, και τον φυσικό $n_0=1$, όταν $\epsilon>1$, τότε για κάθε $n\geq n_0$ είναι $n>\log_{|a|}\epsilon$ και, επομένως, είναι $|a^n-0|<\epsilon$.

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση $a>1$. Αυτό θα γίνει στην επόμενη ενότητα.

Ασκήσεις.

1. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n), όπου $x_n=\frac{3+(-1)^n}{2n}$, που εμφανίστηκε σε ένα από τα παραδείγματα αυτής της ενότητας. Αποδείξτε ότι είναι $x_n>x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n<x_{n+1}$ για κάθε περιττό $n\geq 3$.

2. Βάσει αποτελεσμάτων της ενότητας αυτής βρείτε τα παρακάτω όρια. Μη χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τους ϵ και n_0.
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{4}, \quad \lim_{n\to+\infty}n^{-\frac{8}{3}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{4^n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n 8^n}{3^{2n}}.$$

3. Ιδού κάποια προτεινόμενα όρια:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2}{3n+4}=\frac{1}{3}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{n+3}=2, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0.$$
Ποια από αυτά νομίζετε ότι είναι σωστά; Για να απαντήσετε, υπολογίστε την απόσταση του n-οστού όρου από το προτεινόμενο όριο και προσπαθήστε

να καταλάβετε όσο πιο πειστικά γίνεται αν η απόσταση αυτή θα γίνει όσο θέλουμε μικρή αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος. Προσπαθήστε, επίσης, να αποκτήσετε «αίσθηση» της προσέγγισης των όρων των ακολουθιών αυτών προς τα σωστά όρια υπολογίζοντας όσο το δυνατό περισσότερους αρχικούς όρους τους καθώς και υπολογίζοντας όρους τους επιλέγοντας τυχαία σκόρπιους μεγάλους δείκτες n (για παράδειγμα, $n = 1000, 10000$ κλπ). Μη χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τους ϵ και n_0 .

4. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου (δηλαδή, παίρνοντας $\epsilon > 0$ και υπολογίζοντας ένα κατάλληλο φυσικό n_0 συναρτήσει του ϵ, όπως κάναμε στα παραδείγματα), αποδείξτε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{10^n}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{4n+5}=\frac{3}{4},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2+1}=0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+1}{3n^2+2}=\frac{1}{3},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n}+3}{2-3\sqrt{n}}=-\frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos n}{n\sqrt{n}}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(2n)+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n+3n}=0.$$

5. Η *άρνηση* του $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, δηλαδή ότι η (x_n) δε συγκλίνει στον x, διατυπώνεται ως εξής: *υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό n_0 να υπάρχει $n \geq n_0$ τέτοιος ώστε να είναι $|x_n - x| \geq \epsilon$.*

   Συμφωνείτε;

2.3 Τα $\pm\infty$ ως όρια ακολουθιών.

Παραδείγματα: (1) Έστω η ακολουθία (n^2) με διαδοχικούς όρους

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots .$$

Είναι φανερό ότι ο n-οστός όρος n^2 θα γίνει «όσο θέλουμε μεγάλος θετικός» αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος». Αν δούμε τους όρους της ακολουθίας ως σημεία στην πραγματική ευθεία, ο όρος n^2 θα βρεθεί «όσο θέλουμε μακρυά προς τα δεξιά» αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος».

(2) Έστω η ακολουθία (n) με διαδοχικούς όρους

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots .$$

Είναι και πάλι σαφές ότι ο n-οστός όρος n θα γίνει «όσο θέλουμε μεγάλος θετικός» αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος».

Και στα δυο αυτά παραδείγματα έχουμε ακολουθία (x_n) με την εξής ιδιότητα:

Ο x_n θα γίνει «όσο θέλουμε μεγάλος θετικός» αν ο δείκτης n γίνει «αρκετά μεγάλος».

Τώρα, η έκφραση «όσο θέλουμε μεγάλος θετικός» σημαίνει «μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό» και, όπως στην προηγούμενη ενότητα, η έκφραση «αρκετά μεγάλος» σημαίνει «μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό». Άρα η ιδιότητα που μόλις διατυπώσαμε γράφεται ισοδύναμα:

Ο x_n θα γίνει μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο δείκτης n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό.

Παράδειγμα: Είδαμε ότι η ακολουθία (n^2) έχει την ιδιότητα: ο n^2 θα γίνει μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν ο δείκτης n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό. Τι σημαίνει αυτό; Όπως στην προηγούμενη ενότητα με τους μικρούς θετικούς αριθμούς, ας πάρουμε έναν οποιονδήποτε μεγάλο θετικό αριθμό, για παράδειγμα τον 35000. Μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι ο n^2 θα γίνει μεγαλύτερος από τον 35000 αν ο n γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο αριθμό; Με άλλα λόγια: μεγαλύτερος από πόσο πρέπει να γίνει ο n ώστε ο n^2 να γίνει μεγαλύτερος από τον 35000; Σκεφτόμαστε: για να γίνει $n^2 > 35000$ αρκεί να γίνει $n > \sqrt{35000}$. Ποιοι φυσικοί αριθμοί n είναι $> \sqrt{35000}$; Παρατηρούμε ότι ο φυσικός 188 είναι $> \sqrt{35000}$ (ενώ ο φυσικός 187 είναι $\leq \sqrt{35000}$), οπότε, αν ο δείκτης n γίνει ≥ 188, τότε ο n^2 θα γίνει > 35000. Ας πάρουμε, επίσης, τον μεγάλο θετικό αριθμό 35000000000. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν ο δείκτης n γίνει ≥ 187083, τότε ο n^2 θα γίνει > 35000000000. Όμως, αντί να επιλέγουμε κάθε φορά έναν πολύ μεγάλο θετικό αριθμό (όπως τους 35000 και 35000000000) και κατόπιν να βρίσκουμε έναν κατάλληλο αριθμό (όπως τους 188 και 187083), αυτό που χρειάζεται να κάνουμε είναι να αποδείξουμε ότι για *κάθε* θετικό αριθμό υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος αριθμός. Γι αυτό πρέπει να θεωρήσουμε όχι συγκεκριμένους θετικούς αριθμούς αλλά τον *γενικό θετικό αριθμό* με ένα γενικό σύμβολο, για παράδειγμα το σύμβολο M, και να αποδείξουμε ότι υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κατάλληλος φυσικός αριθμός, ας τον συμβολίσουμε n_0, ώστε, αν ο n γίνει $\geq n_0$, τότε ο n^2 θα γίνει $> M$. Παρατηρούμε ότι για να γίνει $n^2 > M$ αρκεί να γίνει $n > \sqrt{M}$. Αυτό, όμως, είναι ακριβώς το περιεχόμενο του Θεωρήματος 1.1: *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος φυσικός* n_0 *ώστε όλοι οι* $n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots$ *να είναι* $> \sqrt{M}$. Είναι φανερό (και από τα παραδείγματα με τους δυο συγκεκριμένους M που εξετάσαμε) ότι η τιμή του n_0 εξαρτάται από την τιμή του M. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον n_0 (συναρτήσει του M) από τον οποίο και πέρα ισχύει $n > \sqrt{M}$; Ναι: επειδή $\sqrt{M} \geq 0$, ένας τέτοιος n_0 είναι ο $n_0 = [\sqrt{M}] + 1$.

Διατυπώνουμε τον εξής ορισμό. Λέμε ότι **η** (x_n) **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **τείνει στο** $+\infty$ ή ότι **το** $+\infty$ **είναι το όριο της** (x_n) αν *ο* x_n *θα γίνει μεγαλύτερος από οποιονδήποτε* $M > 0$ *αν ο* n *γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό* n_0 ή, ισοδύναμα, αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε να είναι* $x_n > M$ *αν* $n \geq n_0$. Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ το συμβολίζουμε

$$x_n \to +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty.$$

Ο προηγούμενος ορισμός αναδιατυπώνεται με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους. Η (x_n) αποκλίνει στο $+\infty$ αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε να είναι* $x_n > M$ *για κάθε* $n \geq n_0$ ή, ισοδύναμα, *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε για κάθε* $n \geq n_0$ *να είναι* $x_n > M$ ή, ισοδύναμα, *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε από* $n \geq n_0$ *να συνεπάγεται* $x_n > M$.

Σχήμα 2.4: $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$.

Επίσης, λέμε ότι **η** (x_n) **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή **τείνει στο** $-\infty$ ή ότι **το** $-\infty$ **είναι το όριο της** (x_n) αν *ο* x_n *θα γίνει μικρότερος από οποιονδήποτε* $-M < 0$ *αν ο* n *γίνει μεγαλύτερος από κάποιον κατάλληλο φυσικό* n_0 ή, ισοδύναμα, αν *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει φυσικός* n_0 *ώστε να είναι* $x_n < -M$ *αν* $n \geq n_0$. Το ότι η (x_n) αποκλίνει στο $-\infty$ το συμβολίζουμε

$$x_n \to -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim x_n = -\infty \qquad \text{ή} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty\,.$$

Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο των ορίων $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$; Το $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ή $-\infty$ σημαίνει ότι *το σημείο* x_n*, μετακινούμενο πάνω στην πραγματική ευθεία, θα βρεθεί όσο θέλουμε μακρυά προς τα δεξιά ή αριστερά, αντιστοίχως, όταν ο δείκτης* n *γίνει αρκετά μεγάλος.*

Παραδείγματα: (1) Σύμφωνα με τα προηγούμενα, $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

(2) Η ανισότητα $-n < -M$ είναι ισοδύναμη με την $n > M$. Επομένως, από τα προηγούμενα παραδείγματα είναι φανερό ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $-n < -M$ για κάθε $n \geq n_0$ καθώς και ότι για κάθε $M > 0$ υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $-n^2 < -M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(-n^2) = -\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$.

(3) Θεωρούμε την (x_n), όπου $x_n = \frac{\left(3-(-1)^{n-1}\right)n}{2} = \begin{cases} n, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός,} \\ 2n, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$
Θεωρούμε, δηλαδή, την ακολουθία $1, 4, 3, 8, 5, 12, 7, 16, \ldots$.

Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$. Για να είναι $x_n > M$ αρκεί (επειδή $x_n \geq n$) να είναι $n > M$. Άρα, αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = [M] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > M$ και, επομένως, είναι $x_n > M$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η (x_n) *δεν είναι αύξουσα παρά το ότι αποκλίνει στο* $+\infty$. Δείτε την άσκηση 1 αυτής της ενότητας.

(4) Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι η ακολουθία $\left((-1)^{n-1}\right)$ δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.15, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο

$+\infty$ ούτε στο $-\infty$· έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1. Αλλά, και πιο απλά, ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η $\big((-1)^{n-1}\big)$ αποκλίνει στο $+\infty$. Τότε για *κάθε* $M > 0$ υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να είναι $(-1)^{n-1} > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να είναι $(-1)^{n-1} > 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό, όμως, είναι αδύνατο! Με παρόμοιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι η $\big((-1)^{n-1}\big)$ αποκλίνει στο $-\infty$.

Επομένως, η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$ δεν έχει κανένα όριο· ούτε αριθμό, ούτε το $+\infty$, ούτε το $-\infty$.

$$\boxed{\text{Το } \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1} \text{ δεν υπάρχει.}}$$

(5) Θεωρούμε μια γενίκευση των (n) και (n^2). Για οποιονδήποτε $a > 0$ θεωρούμε την ακολουθία (n^a), δηλαδή την $1, 2^a, 3^a, 4^a, \ldots$. Θα δούμε ότι:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty \qquad (a > 0).}$$

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε κάποιον φυσικό n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να είναι $n^a > M$. Σκεφτόμαστε ότι για να είναι $n^a > M$ αρκεί να είναι $n > M^{\frac{1}{a}}$. Επομένως, αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = [M^{\frac{1}{a}}] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > M^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, είναι $n^a > M$.

Για παράδειγμα: $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[5]{n} = +\infty$.

(6) Έστω $a > 1$. Θεωρούμε την ακολουθία $(\log_a n)$, δηλαδή την $\log_a 1 = 0, \log_a 2, \log_a 3, \log_a 4, \ldots$. Θα δούμε ότι:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \log_a n = +\infty \qquad (a > 1).}$$

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και παρατηρούμε ότι για να είναι $\log_a n > M$ αρκεί να είναι $n > a^M$. Θεωρώντας τον φυσικό $n_0 = [a^M] + 1$, βλέπουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > a^M$ και, επομένως, είναι $\log_a n > M$.

(7) **Γεωμετρική πρόοδος**. Θεωρούμε τώρα την περίπτωση $a > 1$ για τη γεωμετρική πρόοδο (a^n). Θα δούμε ότι στην περίπτωση αυτή η γεωμετρική πρόοδος αποκλίνει στο $+\infty$. Τυπικά παραδείγματα είναι τα $a = 2$ και $a = 10$ με αντίστοιχες ακολουθίες $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$ και $10, 10^2, 10^3, 10^4 \ldots$. Είναι φανερό από τον τρόπο με τον οποίο αυξάνονται οι όροι τους ότι το όριο και των δυο είναι το $+\infty$.

Παίρνουμε, λοιπόν, οποιονδήποτε $M > 0$ και παρατηρούμε ότι για να είναι $a^n > M$ αρκεί να είναι $n > \log_a M$. Τώρα, ισχύει $\log_a M \geq 0$, αν $M \geq 1$, και $\log_a M < 0$, αν $M < 1$. Άρα, αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = [\log_a M] + 1$, αν $M \geq 1$, και τον φυσικό $n_0 = 1$, αν $M < 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > \log_a M$ και, επομένως, είναι $a^n > M$.

Είχαμε δει στην προηγούμενη ενότητα ότι, βάσει της Πρότασης 2.15, αν $a \leq -1$, η (a^n) δε συγκλίνει σε κανέναν αριθμό· έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1. Για τον ίδιο λόγο, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$ και, επομένως, δεν έχει κανένα όριο.

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα για τη γεωμετρική πρόοδο:

$$\lim_{n\to+\infty} a^n \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a > 1, \\ = 1, & \text{αν } a = 1, \\ = 0, & \text{αν } -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}$$

(8) Η $\big((-1)^{n-1}n\big)$, δηλαδή η $1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, \ldots$, δεν έχει κανένα όριο· όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα (στην περίπτωση $a \leq -1$), η ακολουθία έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1.

(9) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n+3} = +\infty$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$. Για να είναι $\frac{n^2+n}{n+3} > M$ αρκεί να είναι $n^2 + n > Mn + 3M$ αρκεί να είναι $n^2 + (1 - M)n - 3M > 0$ αρκεί να είναι $n > \frac{M-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(M-1)^2 + 12M}$ ή $n < \frac{M-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(M-1)^2 + 12M}$ αρκεί (προσέξτε: *μας ενδιαφέρουν οι δείκτες που είναι μεγαλύτεροι από κάποιον αριθμό*) να είναι $n > \frac{M-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(M-1)^2 + 12M}$. Ο αριθμός $\frac{M-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(M-1)^2 + 12M}$ είναι ≥ 0. Άρα, αν θεωρήσουμε $n_0 = \big[\frac{M-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(M-1)^2 + 12M}\big] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > \frac{M-1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(M-1)^2 + 12M}$ και, επομένως, είναι $\frac{n^2+n}{n+3} > M$.

Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να απλοποιηθεί με τον εξής τρόπο. Είναι $\frac{n^2+n}{n+3} > M$ αρκεί (επειδή $\frac{n^2+n}{n+3} \geq \frac{n^2}{n+3n} = \frac{n}{4}$) να είναι $\frac{n}{4} > M$ αρκεί να είναι $n > 4M$. Αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = [4M] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > 4M$ και, επομένως, είναι $\frac{n^2+n}{n+3} > M$.

(10) Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}(n^7 + 2n^2 - n) = +\infty$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$. Για να είναι $n^7 + 2n^2 - n > M$ αρκεί (επειδή $n^7 + 2n^2 - n \geq n^7$) να είναι $n^7 > M$ αρκεί να είναι $n > \sqrt[7]{M}$. Αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = \big[\sqrt[7]{M}\big] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > \sqrt[7]{M}$ και, επομένως, είναι $n^7 + 2n^2 - n > M$. Αλλά και με ελαφρώς διαφορετικό τρόπο. Για να είναι $n^7 + 2n^2 - n > M$ αρκεί (επειδή $n^7 + 2n^2 - n \geq 2n^2$) να είναι $2n^2 > M$ αρκεί να είναι $n > \sqrt{\frac{M}{2}}$. Αν θεωρήσουμε τον φυσικό $n_0 = \big[\sqrt{\frac{M}{2}}\big] + 1$, τότε για κάθε $n \geq n_0$ είναι $n > \sqrt{\frac{M}{2}}$ και, επομένως, είναι $n^7 + 2n^2 - n > M$.

Χρησιμοποιούμε τη λέξη *όριο* και τα σύμβολα $\to$, $\lim$, $\lim_{n\to+\infty}$ σε όλες τις περιπτώσεις που η ακολουθία έχει όριο – είτε η ακολουθία συγκλίνει σε αριθμό είτε αποκλίνει σε ένα από τα $\pm\infty$. Προσέξτε: χρησιμοποιούμε το ρήμα *συγκλίνει* μόνο όταν το όριο είναι αριθμός και το ρήμα *αποκλίνει* σε κάθε άλλη περίπτωση, δηλαδή όταν το όριο είναι ένα από τα $\pm\infty$ ή όταν δεν υπάρχει όριο.

Έχουμε αναφέρει ότι μπορούμε να σκεφτόμαστε το $+\infty$ ως ένα (μη υπαρκτό) «σημείο» που είναι δεξιά κάθε σημείου της πραγματικής ευθείας ή ως μια (μη υπαρκτή) «ποσότητα» που είναι μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό. Επειδή όλα αυτά είναι μη υπαρκτά, μερικοί προτιμούν να σκέφτονται το $+\infty$ ως μια τεράστια θετική ποσότητα. Φυσικά, κι αυτό δεν είναι σωστό αφού καμιά θετική ποσότητα, όσο μεγάλη κι αν είναι, δε μπορεί να είναι μεγαλύτερη από κάθε άλλη ποσότητα. Κανένα από αυτά δε δίνει επαρκή «εικόνα» του $+\infty$, διότι όλα είναι *στατικά*. Ίσως είναι πιο σωστό να σκεφτόμαστε το $+\infty$ με *δυναμικό τρόπο* ως «*μια μεταβλητή* *ποσότητα που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό*». Παρομοίως, μπορούμε να σκεφτόμαστε το $-\infty$ με *δυναμικό τρόπο* ως «*μια **μεταβλητή** ποσότητα που γίνεται μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό*». Αν, μάλιστα ελευθερώσουμε τη φαντασία μας (!), μπορούμε να σκεφτόμαστε και οποιονδήποτε αριθμό x με *δυναμικό τρόπο* ως «*μια **μεταβλητή** ποσότητα που η απόστασή της από τον x γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό*». Όσο παράδοξο κι αν φαίνεται αυτό, πρέπει να πούμε ότι αυτή ακριβώς είναι η ουσιαστική ιδέα στην οποία βασίζεται η μαθηματική θεμελίωση των άρρητων αριθμών. Όμως, το θέμα αυτό δε θα μας απασχολήσει σ' αυτές τις σημειώσεις.

Ασκήσεις.

1. Θεωρήστε την ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{(3-(-1)^{n-1})n}{2}$. Αποδείξτε ότι είναι $x_n > x_{n+1}$ για κάθε άρτιο n και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε περιττό n.

2. Χρησιμοποιώντας αποτελέσματα της ενότητας αυτής βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια. Μη χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τους M και n_0.
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty} \log_3 n, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}, \quad \lim_{n\to+\infty} (-3)^{2n}, \quad \lim_{n\to+\infty} (-3)^{3n}.$$

3. Για κάθε τιμή του $x \neq -1$ βρείτε, αν υπάρχει, το $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1-x)^n}{(1+x)^n}$.

4. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό με τους M και n_0, βρείτε με πειστικό τρόπο ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες αποκλίνουν στο $+\infty$ ή στο $-\infty$. Για να αποκτήσετε «αίσθηση» του πόσο μεγάλοι (θετικοί ή αρνητικοί) γίνονται οι όροι των ακολουθιών αυτών μπορείτε να υπολογίστε αρκετούς (πόσους;) αρχικούς όρους τους καθώς και να υπολογίσετε όρους τους επιλέγοντας τυχαία σκόρπιους πολύ μεγάλους δείκτες n.
$$(n^2-18n-4), \quad \Big(7n-\frac{1}{30}n^2\Big), \quad \Big(\frac{n}{30\sqrt{n}+1}\Big), \quad \Big(\frac{1-n}{1+\sqrt{n}}\Big), \quad \Big(\frac{n^2+1}{n+100}\Big).$$

5. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ορίων (δηλαδή, παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας τον κατάλληλο φυσικό n_0 συναρτήσει του M, όπως κάναμε στα παραδείγματα), αποδείξτε τα παρακάτω όρια.
$$\lim_{n\to+\infty} n^4 = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} (-\sqrt[3]{n}) = -\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \log_2 \Big(\frac{1}{n}\Big) = -\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} (n^2-2n) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-5}{2n+1} = +\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \big(n + (-1)^{n-1}\big) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} (-2n^5 + n^3) = -\infty,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (n + 2^n) = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} n(2 + \sin n) = +\infty.$$

6. Η *άρνηση* του $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, δηλαδή το ότι η (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $+\infty$, διατυπώνεται ως εξής: *υπάρχει κάποιος* $M > 0$ *τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό* n_0 *να υπάρχει* $n \geq n_0$ *τέτοιος ώστε να είναι* $x_n \leq M$.

   Συμφωνείτε;

   Η *άρνηση* του $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, δηλαδή το ότι η (x_n) *δεν* αποκλίνει στο $-\infty$, διατυπώνεται ως εξής: *υπάρχει κάποιος* $M > 0$ *τέτοιος ώστε για κάθε φυσικό* n_0 *να υπάρχει* $n \geq n_0$ *τέτοιος ώστε να είναι* $x_n \geq -M$.

   Συμφωνείτε;

2.4 Ιδιότητες σχετικές με όρια ακολουθιών.

Α. Ισότητα ορίων.

Παρατηρήστε τις ακολουθίες $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$, και $-2, 5, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$. Η πρώτη είναι η γνωστή μας ακολουθία $(\frac{1}{n})$ η οποία συγκλίνει στον 0. Η δεύτερη ακολουθία ταυτίζεται από τον τρίτο όρο της και πέρα με την πρώτη από τον τέταρτο όρο της και πέρα και είναι φανερό ότι και η δεύτερη ακολουθία συγκλίνει στον 0.

Πρόταση 2.1 *Αν δυο ακολουθίες ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα και η μια από αυτές έχει κάποιο όριο, τότε και η άλλη έχει το ίδιο όριο.*

Η αιτιολόγηση είναι απλή. Το αν μια ακολουθία (x_n) έχει όριο και το ποια είναι η τιμή αυτού του ορίου εξαρτάται από τη συμπεριφορά του όρου x_n όταν ο δείκτης n είναι αρκετά μεγάλος και, επομένως, δεν εξαρτάται από τους αρχικούς όρους της ακολουθίας. Αν, λοιπόν, αλλάξουμε κάποιους αρχικούς όρους μιας ακολουθίας ή αν παραλείψουμε ή επισυνάψουμε κάποιους αρχικούς όρους της (πεπερασμένου πλήθους, οπωσδήποτε), τότε η καινούργια ακολουθία θα έχει το ίδιο όριο που έχει η πρώτη ακολουθία ή δεν θα έχει όριο αν δεν έχει η πρώτη ακολουθία.

Απόδειξη: Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) ταυτίζονται από κάποιους όρους τους και πέρα. Δηλαδή, υπάρχουν φυσικοί N, M ώστε να είναι $x_N = y_M$, $x_{N+1} = y_{M+1}$, $x_{N+2} = y_{M+2}$ κλπ. Έστω, επίσης, ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = \rho$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} y_n = \rho$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει κάποιος φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $|x_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0{}'$. Ορίζουμε τον φυσικό $n_0{}'' = \max\{n_0{}', N\}$, οπότε είναι $n_0{}'' \geq n_0{}'$ και $n_0{}'' \geq N$. Τέλος, ορίζουμε τον $n_0 = n_0{}'' - N + M$. Ο n_0 είναι φυσικός διότι ο $n_0{}'' - N$ είναι μη αρνητικός ακέραιος και ο M είναι φυσικός. Παρατηρούμε ότι, αν $n \geq n_0$, τότε $n - M \geq 0$, οπότε $y_n = y_{M+(n-M)} = x_{N+(n-M)}$ και $N + (n - M) \geq N + (n_0 - M) = n_0{}'' \geq n_0{}'$ και, επομένως, $|y_n - \rho| = |x_{N+(n-M)} - \rho| < \epsilon$. Άρα υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $|y_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} y_n = \rho$.

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι, αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.

Παράδειγμα: Έστω ότι η ακολουθία (x_n) έχει κάποιο όριο x ή $+\infty$ ή $-\infty$.

Η (x_n) γράφεται και $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$. Θεωρούμε την $x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots$, δηλαδή την (x_{n+1}). Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως, η νέα ακολουθία έχει το ίδιο όριο x ή $+\infty$ ή $-\infty$. Το ίδιο μπορούμε να πούμε και για την $x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$, δηλαδή την (x_{n+2}). Και, γενικότερα, αν k είναι κάποιος φυσικός, τότε

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+k} = \lim_{n\to+\infty} x_n .$$

Δείτε: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=0$, $\lim_{n\to+\infty}\log_2(n+8)=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0$.

Β. Όρια και αλγεβρικές πράξεις.

Ορίζουμε τα *συμβολικά αντίθετα* των συμβόλων $\pm\infty$ ως εξής:

$$-(+\infty)=-\infty\,,\qquad -(-\infty)=+\infty\,.$$

Αν σκεφτούμε το $+\infty$ ως μεταβλητή ποσότητα που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό, τότε το $-(+\infty)$ είναι η αντίθετη ποσότητα, δηλαδή μεταβλητή ποσότητα που γίνεται μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό. Άρα το $-(+\infty)$ «πρέπει» να είναι $-\infty$. Με ανάλογες σκέψεις κατανοούμε γιατί το $-(-\infty)$ «πρέπει» να είναι $+\infty$.

Ονομάζουμε **αντίθετη** της ακολουθίας (x_n) την $(-x_n)$, της οποίας ο n-οστός όρος είναι ο αντίθετος του n-οστού όρου της αρχικής ακολουθίας.

Πρόταση 2.2 ***Κανόνας αντιθέτου.*** *Αν η (x_n) έχει όριο, τότε και η $(-x_n)$ έχει όριο και είναι*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(-x_n)=-\lim_{n\to+\infty}x_n\,.}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $|x_n-x|<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $|(-x_n)-(-x)|=|x-x_n|=|x_n-x|$. Άρα είναι $|(-x_n)-(-x)|<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(-x_n)=-x=-\lim_{n\to+\infty}x_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$, οπότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $x_n>M$ για κάθε $n\geq n_0$. Συνεπάγεται $-x_n<-M$ για κάθε $n\geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(-x_n)=-\infty=-(+\infty)=-\lim_{n\to+\infty}x_n$.

Ομοίως, αποδεικνύεται ότι, αν $\lim_{n\to+\infty}x_n=-\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(-x_n)=+\infty=-(-\infty)=-\lim_{n\to+\infty}x_n$.

Ορίζουμε τα *συμβολικά αθροίσματα* των συμβόλων $\pm\infty$ μεταξύ τους αλλά και με τους αριθμούς ως εξής:

$$(+\infty)+x=+\infty,\qquad x+(+\infty)=+\infty,\qquad (+\infty)+(+\infty)=+\infty,$$

$$(-\infty)+x=-\infty,\qquad x+(-\infty)=-\infty,\qquad (-\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

Όμως, τα αθροίσματα

$$(+\infty)+(-\infty),\qquad (-\infty)+(+\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Κατανοούμε γιατί το $(+\infty)+(+\infty)$ «πρέπει» να είναι $+\infty$ ως εξής: το άθροισμα μεταβλητών ποσοτήτων που γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό αριθμό είναι, προφανώς, μεταβλητή ποσότητα που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό. Ομοίως κατανοούμε γιατί το $(+\infty)+x$ «πρέπει» να είναι $+\infty$: το άθροισμα μεταβλητών ποσοτήτων που η μια γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό και η άλλη πλησιάζει τον αριθμό x (δηλαδή, είναι *περίπου* x) είναι, προφανώς, μεταβλητή ποσότητα που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό. Σκεφτείτε μόνοι σας για τα υπόλοιπα αθροίσματα.

Είπαμε ότι το $(+\infty)+(-\infty)$ δεν ορίζεται. Πράγματι, δε μπορούμε να προσδιορίσουμε *με ενιαίο τρόπο* τη συμπεριφορά του αθροίσματος δυο μεταβλητών ποσοτήτων που η μια γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό και η άλλη γίνεται μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό· η συμπεριφορά αυτή εξαρτάται από το *σχετικό* μέγεθος των δυο μεταβλητών ποσοτήτων. Δείτε το κι έτσι: (i) ο 2^{50} είναι μεγάλος θετικός αριθμός, ο -2^{49} είναι μεγάλος αρνητικός αριθμός και ο $2^{50}+(-2^{49})=2^{49}$ είναι μεγάλος θετικός αριθμός, (ii) ο 2^{49} είναι μεγάλος θετικός αριθμός, ο -2^{50} είναι μεγάλος αρνητικός αριθμός και ο $2^{49}+(-2^{50})=-2^{49}$ είναι μεγάλος αρνητικός αριθμός, (iii) ο 2^{50} είναι μεγάλος θετικός αριθμός, ο -2^{50} είναι μεγάλος αρνητικός αριθμός και ο $2^{50}+(-2^{50})=0$ είναι μικρός αριθμός.

Ονομάζουμε **άθροισμα** των $(x_n),(y_n)$ την ακολουθία (x_n+y_n) της οποίας ο n-οστός όρος προκύπτει αθροίζοντας τους n-οστούς όρους των δυο αρχικών ακολουθιών.

Πρόταση 2.3 ***Κανόνας αθροίσματος***. *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν το άθροισμα $\lim_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η (x_n+y_n) έχει όριο και είναι*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n\,.}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$ και $\lim_{n\to+\infty}y_n=y$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $|x_n-x|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n\geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $|y_n-y|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n\geq n_0{}''$. Ορίζουμε τον φυσικό $n_0=\max\{n_0{}',n_0{}''\}$, οπότε είναι $n_0\geq n_0{}'$ και $n_0\geq n_0{}''$. Άρα είναι $|x_n-x|<\frac{\epsilon}{2}$ ΚΑΙ $|y_n-y|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε $n\geq n_0$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $|(x_n+y_n)-(x+y)|=|(x_n-x)+(y_n-y)|\leq|x_n-x|+|y_n-y|$. Συνεπάγεται ότι είναι $|(x_n+y_n)-(x+y)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=x+y=\lim_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $x_n>\frac{M}{2}$ για κάθε $n\geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $y_n>\frac{M}{2}$ για κάθε $n\geq n_0{}''$. Ορίζουμε τον φυσικό $n_0=\max\{n_0{}',n_0{}''\}$, οπότε είναι $n_0\geq n_0{}'$ και $n_0\geq n_0{}''$. Άρα είναι $x_n>\frac{M}{2}$ ΚΑΙ $y_n>\frac{M}{2}$ για κάθε $n\geq n_0$. Συνεπάγεται $x_n+y_n>\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M$ για κάθε $n\geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=+\infty=(+\infty)+(+\infty)=\lim_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}y_n=y$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $x_n>M-y+1$ για κάθε $n\geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $|y_n-y|<1$ για κάθε $n\geq n_0{}''$. Από την $|y_n-y|<1$ συνεπάγεται ότι είναι $y_n>y-1$ για κάθε $n\geq n_0{}''$. Ορίζουμε τον φυσικό $n_0=\max\{n_0{}',n_0{}''\}$, οπότε είναι $n_0\geq n_0{}'$ και $n_0\geq n_0{}''$. Άρα είναι $x_n>M-y+1$ ΚΑΙ $y_n>y-1$ για κάθε $n\geq n_0$. Συνεπάγεται ότι είναι $x_n+y_n>(M-y+1)+(y-1)=M$ για κάθε $n\geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=+\infty=(+\infty)+y=\lim_{n\to+\infty}x_n+\lim_{n\to+\infty}y_n$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0+0=0$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}(n+\frac{1}{n})=\lim_{n\to+\infty}n+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=(+\infty)+0=+\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(-n-\sqrt{n})=\lim_{n\to+\infty}(-n)+\lim_{n\to+\infty}(-\sqrt{n})=(-\infty)+(-\infty)=-\infty$.

Ιδού μερικά παραδείγματα όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty, -\infty$ και το άθροισμά τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο:

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}(n+3) = \lim_{n\to+\infty} n + \lim_{n\to+\infty} 3 = (+\infty) + 3 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\big((n+3)+(-n)\big) = \lim_{n\to+\infty} 3 = 3$.

Προφανώς, στη θέση του 3 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

(2) $\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\big(2n + (-n)\big) = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}(-2n) = -\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\big(n + (-2n)\big) = \lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$.

(4) Είναι $n + (-1)^{n-1} \geq n - 1$ για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$. Όπως θα δούμε στην υποενότητα Γ (μετά από την Πρόταση 2.11), συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}\big(n + (-1)^{n-1}\big) = +\infty$. Επίσης, είναι $\lim_{n\to+\infty}(-n) = -\infty$ αλλά το $\lim_{n\to+\infty}\big(\big(n + (-1)^{n-1}\big) + (-n)\big) = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}$ δεν υπάρχει.

Ορίζουμε τις *συμβολικές διαφορές*

$$(+\infty) - x = +\infty, \qquad x - (-\infty) = +\infty, \qquad (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$(-\infty) - x = -\infty, \qquad x - (+\infty) = -\infty, \qquad (-\infty) - (+\infty) = -\infty,$$

έχοντας υπ΄ όψη τα συμβολικά αντίθετα και τα συμβολικά αθροίσματα που έχουν ήδη ορισθεί. *Δεν ορίζονται* οι διαφορές

$$(+\infty) - (+\infty), \qquad (-\infty) - (-\infty)$$

και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Κατανοήστε τους ορισμούς αυτούς «βλέποντας» το $+\infty$ $(-\infty)$ ως μεταβλητή που γίνεται μεγαλύτερη (μικρότερη) από κάθε θετικό (αρνητικό) αριθμό και τον x ως μεταβλητή που πλησιάζει τον x (δηλαδή, είναι *περίπου* x).

Η περίπτωση της **διαφοράς** των $(x_n), (y_n)$, δηλαδή της ακολουθίας $(x_n - y_n)$, ανάγεται εύκολα στις περιπτώσεις του αθροίσματος ακολουθιών και της αντίθετης ακολουθίας, παρατηρώντας, απλώς, ότι $x_n - y_n = x_n + (-y_n)$.

Πρόταση 2.4 ***Κανόνας διαφοράς***. *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν η διαφορά $\lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(x_n - y_n)$ έχει όριο και είναι*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n - \lim_{n\to+\infty} y_n\,.}$$

Τώρα θα ορίσουμε τα *συμβολικά γινόμενα* των συμβόλων $\pm\infty$ μεταξύ τους αλλά και με τους αριθμούς.

$$(\pm\infty)\cdot x = \pm\infty, \quad x\cdot(\pm\infty) = \pm\infty \qquad (x > 0),$$

$$(\pm\infty)\cdot x = \mp\infty, \quad x\cdot(\pm\infty) = \mp\infty \qquad (x < 0),$$

$$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty) = +\infty\,, \qquad (\pm\infty)\cdot(\mp\infty) = -\infty.$$

Τα γινόμενα

$$(\pm\infty)\cdot 0, \qquad 0\cdot(\pm\infty)$$

δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**.

Κατανοούμε γιατί το $(+\infty)\cdot(+\infty)$ «πρέπει» να είναι $+\infty$ ως εξής: το γινόμενο μεταβλητών ποσοτήτων που γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό αριθμό είναι, προφανώς, μεταβλητή ποσότητα που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό. Για το $(+\infty)\cdot x = +\infty$ (με $x > 0$) σκεφτόμαστε: το γινόμενο μεταβλητών ποσοτήτων που η μια γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό και η άλλη πλησιάζει τον θετικό αριθμό x (δηλαδή, είναι *περίπου* x) είναι, προφανώς, μεταβλητή ποσότητα που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό. Κατανοήστε μόνοι σας τους υπόλοιπους ορισμούς.

Το $(+\infty)\cdot 0$ δεν ορίζεται διότι δε μπορούμε να χαρακτηρίσουμε *με ενιαίο τρόπο* τη συμπεριφορά του γινομένου μεταβλητών ποσοτήτων που η μια γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό και το μέγεθος της άλλης γίνεται μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό (δηλαδή, είναι περίπου 0)· η συμπεριφορά αυτή εξαρτάται από το *σχετικό* μέγεθος των δυο ποσοτήτων. Ιδού κάποια αριθμητικά παραδείγματα: (i) ο 2^{100} είναι μεγάλος θετικός αριθμός, ο $\frac{1}{2^{50}}$ είναι μικρός θετικός αριθμός και ο $2^{100}\cdot\frac{1}{2^{50}} = 2^{50}$ είναι μεγάλος θετικός αριθμός, (ii) ο 2^{50} είναι μεγάλος θετικός αριθμός, ο $\frac{1}{2^{100}}$ είναι μικρός θετικός αριθμός και ο $2^{50}\cdot\frac{1}{2^{100}} = \frac{1}{2^{50}}$ είναι μικρός θετικός αριθμός, (iii) ο 2^{100} είναι μεγάλος θετικός αριθμός, ο $\frac{1}{2^{100}}$ είναι μικρός θετικός αριθμός και ο $2^{100}\cdot\frac{1}{2^{100}} = 1$ δεν είναι ούτε μεγάλος ούτε μικρός αριθμός.

Ονομάζουμε **γινόμενο** των $(x_n),(y_n)$ την ακολουθία $(x_n y_n)$ της οποίας ο n-οστός όρος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τους n-οστούς όρους των αρχικών ακολουθιών.

Πρόταση 2.5 ***Κανόνας γινομένου.*** *Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν το γινόμενο $\lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $(x_n y_n)$ έχει όριο και είναι*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = \lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n\,.}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{3|y|+1}$ για κάθε $n \geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $|y_n - y| < \min\{\frac{\epsilon}{3|x|+1}, \frac{1}{3}\}$ για κάθε $n \geq n_0{}''$. Ορίζουμε τον φυσικό $n_0 = \max\{n_0{}', n_0{}''\}$, οπότε είναι $n_0 \geq n_0{}'$ και $n_0 \geq n_0{}''$. Άρα είναι $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{3|y|+1}$ ΚΑΙ $|y_n - y| < \min\{\frac{\epsilon}{3|x|+1}, \frac{1}{3}\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $|x_n y_n - xy| = |(x_n - x)(y_n - y) + x(y_n - y) + y(x_n - x)| \leq |x_n - x||y_n - y| + |x||y_n - y| + |y||x_n - x|$. Συνεπάγεται ότι είναι $|x_n y_n - xy| \leq \frac{\epsilon}{3|y|+1}\frac{1}{3} + |x|\frac{\epsilon}{3|x|+1} + |y|\frac{\epsilon}{3|y|+1} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = xy = \lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $x_n > \sqrt{M}$ για κάθε $n \geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $y_n > \sqrt{M}$ για κάθε $n \geq n_0{}''$. Ορίζουμε τον φυσικό $n_0 = \max\{n_0{}', n_0{}''\}$, οπότε είναι $n_0 \geq n_0{}'$ και $n_0 \geq n_0{}''$. Άρα είναι $x_n > \sqrt{M}$ ΚΑΙ $y_n > \sqrt{M}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $x_n y_n > \sqrt{M}\sqrt{M} = M$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty = (+\infty)(+\infty) = \lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και το $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ είναι ***θετικός*** αριθμός. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $x_n > \frac{2M}{y}$ για κάθε $n \geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $|y_n - y| < \frac{y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0{}''$. Ορίζουμε τον φυσικό $n_0 =$

$\max\{n_0', n_0''\}$, οπότε είναι $n_0 \geq n_0'$ και $n_0 \geq n_0''$. Άρα είναι $x_n > \frac{2M}{y}$ ΚΑΙ $|y_n - y| < \frac{y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Απο την $|y_n - y| < \frac{y}{2}$ συνεπάγεται $y_n > y - \frac{y}{2} = \frac{y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $x_n y_n > \frac{2M}{y}\frac{y}{2} = M$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty = (+\infty)y = \lim_{n\to+\infty} x_n \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Όλες οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν ουσιαστικά την ίδια αιτιολόγηση. Οι μόνες αλλαγές έχουν να κάνουν με τον γνωστό κανόνα γινομένου προσήμων.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \cdot 0 = 0$.

(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n}\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1 \cdot 0 = 0$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(n - n^2) = \lim_{n\to+\infty} n(1-n) = \lim_{n\to+\infty} n \lim_{n\to+\infty}(1-n) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$. Παρατηρήστε ότι δεν εφαρμόζεται ο κανόνας της διαφοράς στο $\lim(n - n^2)$ διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

(4) Μια ειδική περίπτωση του κανόνα γινομένου είναι η εξής. Έστω ακολουθία (x_n) και αριθμός c. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} x_n$ και το γινόμενο $c \cdot \lim_{n\to+\infty} x_n$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} c x_n = c \lim_{n\to+\infty} x_n \qquad (c \neq 0 \text{ αν } \lim_{n\to+\infty} x_n = \pm\infty).}$$

Αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον κανόνα γινομένου στην (x_n) και στη σταθερή ακολουθία (c) η οποία έχει όριο c.

(5) Έστω $a > 0$.
Αν $c > 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} c n^a = c \lim_{n\to+\infty} n^a = c \cdot (+\infty) = +\infty$.
Αν $c < 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} c n^a = c \lim_{n\to+\infty} n^a = c \cdot (+\infty) = -\infty$.

(6) Αν $a > 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty} c n^{-a} = c \lim_{n\to+\infty} n^{-a} = c \cdot 0 = 0$.

(7) **Πολυωνυμική παράσταση του** n. Θεωρούμε πολυώνυμο $a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ τουλάχιστον πρώτου βαθμού (δηλαδή $a_N \neq 0$ και $N \geq 1$). Τότε

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(a_0 + a_1 n + \cdots + a_N n^N\right) = a_N \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a_N > 0, \\ -\infty, & \text{αν } a_N < 0. \end{cases}}$$

Για να το αποδείξουμε βγάζουμε το $a_N n^N$ ως κοινό παράγοντα,

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_N n^N = a_N n^N \Big(\frac{a_0}{a_N}\frac{1}{n^N} + \frac{a_1}{a_N}\frac{1}{n^{N-1}} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{a_N}\frac{1}{n} + 1\Big),$$

και τότε το όριο της παρένθεσης είναι 1, διότι κάθε όρος της εκτός του τελευταίου έχει όριο 0. Άρα $\lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1 n + \cdots + a_N n^N) = \lim_{n\to+\infty} a_N n^N \cdot 1 = a_N \cdot (+\infty)$. Παρατηρήστε ότι η τιμή του ορίου πολυωνυμικής παράστασης του n εξαρτάται *μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο*. Δηλαδή

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(a_0 + a_1 n + \cdots + a_N n^N\right) = \lim_{n\to+\infty} a_N n^N.}$$

Για παράδειγμα, υπολογίζουμε: $\lim_{n\to+\infty}(3n^2-5n+2) = \lim_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}n^5+4n^4-n^3) = \lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{2}n^5) = -\infty$.

(8) **Γεωμετρικά αθροίσματα.** Η ακολουθία των **γεωμετρικών αθροισμάτων με λόγο** a είναι η $(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+a^n)$, δηλαδή η $1+a, 1+a+a^2, 1+a+a^2+a^3, \ldots$. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n)\begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1, \\ = \frac{1}{1-a}, & \text{αν } -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από το όριο της γεωμετρικής προόδου.

Αν $a > 1$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{1}{a-1}\lim_{n\to+\infty}(a^{n+1}-1) = \frac{1}{a-1}((+\infty)-1) = +\infty$.

Αν $a = 1$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n) = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$.

Αν $-1 < a < 1$, τότε $\lim_{n\to+\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}\lim_{n\to+\infty}(1-a^{n+1}) = \frac{1}{1-a}(1-0) = \frac{1}{1-a}$.

Τέλος, έστω $a \leq -1$. Ορίζουμε $x_n = 1+a+a^2+\cdots+a^n$ και από την $a^{n+1}-1 = (a-1)(1+a+a^2+\cdots+a^n)$ συνεπάγεται $a^{n+1} = (a-1)x_n+1$. *Αν υπάρχει* το $\lim_{n\to+\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n) = \lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε υπάρχει και το $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = (a-1)\lim_{n\to+\infty} x_n + 1$. Όμως, το $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1}$ δεν υπάρχει, οπότε ούτε και το $\lim_{n\to+\infty}(1+a+a^2+\cdots+a^n)$ υπάρχει.

Έχοντας ήδη ορίσει τα συμβολικά γινόμενα των $\pm\infty$, είναι τώρα απλό να ορίσουμε τις *συμβολικές δυνάμεις* $(\pm\infty)^k$ για κάθε φυσικό k :

$$(+\infty)^k = \underbrace{(+\infty)\cdots(+\infty)}_{k} = +\infty, \qquad (-\infty)^k = \underbrace{(-\infty)\cdots(-\infty)}_{k} = \pm\infty.$$

Στην $(-\infty)^k = \pm\infty$ είναι $+$, αν ο k είναι άρτιος, και $-$, αν ο k είναι περιττός.

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε την

Πρόταση 2.6 *Αν υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty} x_n$ *και ο* k *είναι φυσικός, τότε*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} {x_n}^k = (\lim_{n\to+\infty} x_n)^k\,.}$$

Πράγματι, $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^k = \lim_{n\to+\infty}(\underbrace{x_n\cdots x_n}_{k}) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} x_n \cdots \lim_{n\to+\infty} x_n}_{k} = (\lim_{n\to+\infty} x_n)^k$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n-1}{n})^3 = (\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n})^3 = 1^3 = 1$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}(n^5-2n^2+n-7)^8 = \big(\lim_{n\to+\infty}(n^5-2n^2+n-7)\big)^8 = (+\infty)^8 = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}(-2n^3+n^2+2n-7)^4 = \big(\lim_{n\to+\infty}(-2n^3+n^2+2n-7)\big)^4 = (-\infty)^4 = +\infty$.

(4) $\lim_{n\to+\infty}(-n^3+2n-1)^5 = \big(\lim_{n\to+\infty}(-n^3+2n-1)\big)^5 = (-\infty)^5 = -\infty$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα όπου δυο ακολουθίες έχουν όρια $+\infty, 0$, ενώ το γινόμενό τους δεν έχει όριο ή έχει διαφορετικό κάθε φορά όριο.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{7}{n} = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{7}{n} = \lim_{n\to+\infty} 7 = 7$.

Φυσικά, θα μπορούσαμε να έχουμε οποιονδήποτε αριθμό στη θέση του 7.

(2) $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} n^2\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(4) $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$ αλλά το $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}$ δεν υπάρχει.

Ορίζουμε τα *συμβολικά αντίστροφα*

$$\frac{1}{+\infty} = 0, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0.$$

Το αντίστροφο

$$\frac{1}{0}$$

δεν ορίζεται και χαρακτηρίζεται **απροσδιόριστη μορφή**.

Κατανοούμε γιατί το $\frac{1}{\pm\infty}$ «πρέπει» να είναι 0 ως εξής: το αντίστροφο μεταβλητής ποσότητας που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό ή μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό είναι, προφανώς, μεταβλητή ποσότητα που η απόλυτη τιμή της (δηλαδή η απόστασή της από τον 0) γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό (δηλαδή, είναι *περίπου* 0).

Το $\frac{1}{0}$ δεν ορίζεται για τον εξής λόγο. Αν έχουμε μια μεταβλητή ποσότητα που η απόστασή της από τον 0 γίνεται μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό (δηλαδή, είναι *περίπου* 0) το αντίστροφό της είναι μεταβλητή ποσότητα που η απόλυτη τιμή της γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό. Αυτή, όμως, η αντίστροφη ποσότητα μπορεί να έχει και θετικές και αρνητικές τιμές, οπότε κάποιες τιμές θα γίνονται μεγαλύτερες από κάθε θετικό αριθμό ενώ κάποιες άλλες θα γίνονται μικρότερες από κάθε αρνητικό αριθμό. Μπορεί, επομένως, η αντίστροφη μεταβλητή ποσότητα να μην έχει ενιαία συμπεριφορά.

Η **αντίστροφη ακολουθία** της (x_n) είναι η $(\frac{1}{x_n})$ και, φυσικά, ορίζεται αρκεί να είναι $x_n \neq 0$ για κάθε n.

Πρόταση 2.7 *Κανόνας αντιστρόφου, I*. *Έστω $x_n \neq 0$ για κάθε n. Αν η (x_n) έχει όριο και αν το $\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή (δηλαδή, αν $\lim_{n\to+\infty} x_n \neq 0$), τότε και η $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ έχει όριο και είναι*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}\,.}$$

Απόδειξη: Έστω ότι το $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ είναι *θετικός* αριθμός. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $|x_n - x| < \min\{\frac{x^2\epsilon}{2}, \frac{x}{2}\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $|x_n - x| < \frac{x^2\epsilon}{2}$ και $|x_n - x| < \frac{x}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Από την $|x_n - x| < \frac{x}{2}$ συνεπάγεται $x_n > x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, είναι $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x_n - x|}{x_n x} < \frac{\frac{x^2\epsilon}{2}}{\frac{x}{2}x} = \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $x_n > \frac{1}{\epsilon}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $0 < \frac{1}{x_n} < \epsilon$ και, επομένως, $\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{x_n} < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = 0 = \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} x_n}$.

Η αιτιολόγηση του κανόνα στις περιπτώσεις που το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$ είναι παρόμοια.

Παραδείγματα: (1) Αν $a > 1$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log_a n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \log_a n} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

(2) Ο κανόνας δεν ισχύει αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Είναι $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$, αλλά το $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(-1)^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}n$ δεν υπάρχει.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι η εναλλαγή προσήμου των όρων της ακολουθίας. Αυτό συμφωνεί και με την παρατήρηση πριν από την Πρόταση 2.7. Αν δεν υφίσταται εναλλαγή προσήμου, τότε έχουμε θετικά αποτελέσματα· η κατάσταση αυτή περιγράφεται στην Πρόταση 2.8.

Πρόταση 2.8 ***Κανόνας αντιστρόφου, ΙΙ.*** *(1) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.*
(2) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και όλοι οι όροι της (x_n) είναι αρνητικοί, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$.

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $0 < x_n < \frac{1}{M}$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $\frac{1}{x_n} > M$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$.
(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Οι παρακάτω *συμβολικοί λόγοι* ορίζονται βάσει των συμβολικών πολλαπλασιασμών και των συμβολικών αντιστρόφων.

$$\frac{\pm\infty}{x} = \pm\infty \quad (x > 0), \qquad \frac{\pm\infty}{x} = \mp\infty \quad (x < 0),$$
$$\frac{x}{\pm\infty} = 0.$$

Οι λόγοι
$$\frac{x}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{0}, \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{\pm\infty}{\mp\infty}$$
δεν ορίζονται και χαρακτηρίζονται **απροσδιόριστες μορφές**. Το $\frac{x}{0} = x \cdot \frac{1}{0}$ δεν ορίζεται διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Το $\frac{\pm\infty}{0} = (\pm\infty) \cdot \frac{1}{0}$ δεν ορίζεται διότι δεν ορίζεται το $\frac{1}{0}$. Το $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = (\pm\infty) \cdot \frac{1}{\pm\infty} = (\pm\infty) \cdot 0$ δεν ορίζεται διότι καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή γινομένου.

Προσπαθήστε να κατανοήσετε τους ορισμούς αυτούς θεωρώντας το $+\infty$ $(-\infty)$ ως μεταβλητή που γίνεται μεγαλύτερη (μικρότερη) από κάθε θετικό (αρνητικό) αριθμό και τον x ως μεταβλητή που πλησιάζει τον x (δηλαδή, είναι *περίπου* x).

Τα αποτελέσματα για τον **λόγο** των (x_n) και (y_n), δηλαδή για την ακολουθία $(\frac{x_n}{y_n})$, προκύπτουν από τον συνδυασμό των αποτελεσμάτων για το γινόμενο ακολουθιών και για την αντίστροφη ακολουθία, παρατηρώντας ότι $\frac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \frac{1}{y_n}$.

Πρόταση 2.9 ***Κανόνας λόγου.*** *Έστω $y_n \neq 0$ για κάθε n. Αν οι (x_n), (y_n) έχουν όριο και αν ο λόγος $\frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε και η $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ έχει όριο και είναι*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} x_n}{\lim_{n\to+\infty} y_n}.}$$

Παραδείγματα: (1) **Ρητή παράσταση του** n. Θεωρούμε οποιαδήποτε ρητή παράσταση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N}{b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M}$, όπου $a_N \neq 0$, $b_M \neq 0$. Τότε

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0+a_1n+\cdots+a_Nn^N}{b_0+b_1n+\cdots+b_Mn^M} = \begin{cases} \frac{a_N}{b_M}\cdot(+\infty), & \text{αν } N>M, \\ \frac{a_N}{b_M}, & \text{αν } N=M, \\ 0, & \text{αν } N<M. \end{cases}}$$

Πράγματι, γράφουμε

$$\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_Nn^N}{b_0+b_1n+\cdots+b_Mn^M} = \frac{a_N}{b_M}n^{N-M}\frac{\frac{a_0}{a_N}\frac{1}{n^N}+\frac{a_1}{a_N}\frac{1}{n^{N-1}}+\cdots+\frac{a_{N-1}}{a_N}\frac{1}{n}+1}{\frac{b_0}{b_M}\frac{1}{n^M}+\frac{b_1}{b_M}\frac{1}{n^{M-1}}+\cdots+\frac{b_{M-1}}{b_M}\frac{1}{n}+1}$$

και, όπως έχουμε δει, τα όρια του αριθμητή και του παρονομαστή του τελευταίου λόγου είναι 1. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0+a_1n+\cdots+a_Nn^N}{b_0+b_1n+\cdots+b_Mn^M} = \frac{a_N}{b_M}\cdot\lim_{n\to+\infty} n^{N-M}\cdot\frac{1}{1} = \frac{a_N}{b_M}\cdot\lim_{n\to+\infty} n^{N-M}$ και από αυτό προκύπτει το τελικό συμπέρασμα. Βλέπουμε ότι, όπως και στην περίπτωση πολυωνυμικής παράστασης, η τιμή του ορίου ρητής παράστασης του n εξαρτάται *μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους των πολυωνύμων* στον αριθμητή και στον παρονομαστή. Δηλαδή

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_0+a_1n+\cdots+a_Nn^N}{b_0+b_1n+\cdots+b_Mn^M} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_Nn^N}{b_Mn^M}.}$$

Για παράδειγμα, έχουμε: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-2n^2+n+1}{2n^2-3n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{2n^2} = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2+n}{n+2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{n} = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4-n^3-7}{n^4+n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^4}{n^4} = 1$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2+n+4}{n^3+n^2+5n+6} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2}{n^3} = 0$.

(2) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3}\right)^7 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^3+n^2+n+1}{2n+3}\right)^7 = (-\infty)^7 = -\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1}\right)^3 = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3+n+7}{-3n^3+n^2+1}\right)^3 = (-\frac{1}{3})^3 = -\frac{1}{27}$.

Τέλος, θα δούμε παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{+\infty}$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{n\to+\infty}\frac{-2}{n}=0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{-2}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}(-2)=-2$.

Στη θέση του -2 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

(2) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$.

(3) $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

(4) $\lim_{n\to+\infty}(5n)=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n}{n}=5$.

Στη θέση του 5 θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

(5) $\lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n}=\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$.

(6) $\lim_{n\to+\infty}n=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}n^2=+\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Ορίζουμε τις *συμβολικές απόλυτες τιμές*

$$|+\infty|=+\infty,\qquad |-\infty|=+\infty.$$

Κατανοούμε την $|\pm\infty|=+\infty$ ως εξής: η απόλυτη τιμή μεταβλητής ποσότητας που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό ή μικρότερη από κάθε αρνητικό αριθμό είναι, προφανώς, μεταβλητή ποσότητα που γίνεται μεγαλύτερη από κάθε θετικό αριθμό.

Ορίζουμε, επίσης, την **απόλυτη ακολουθία** $(|x_n|)$ μιας ακολουθίας (x_n).

Πρόταση 2.10 *Αν η (x_n) έχει όριο, τότε και η $(|x_n|)$ έχει όριο και είναι*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}|x_n|=\Big|\lim_{n\to+\infty}x_n\Big|\,.}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $|x_n-x|<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $\big||x_n|-|x|\big|\leq|x_n-x|$, οπότε συνεπάγεται $\big||x_n|-|x|\big|<\epsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}|x_n|=|x|=|\lim_{n\to+\infty}x_n|$.

Έστω $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$ ή $\lim_{n\to+\infty}x_n=-\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$, οπότε υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $x_n>M$ ή $x_n<-M$, αντιστοίχως, για κάθε $n\geq n_0$. Και στις δυο περιπτώσεις συνεπάγεται $|x_n|>M$ για κάθε $n\geq n_0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}|x_n|=+\infty=|\pm\infty|=|\lim_{n\to+\infty}x_n|$.

Παραδείγματα: (1) Η ακολουθία $(5-n)$ είναι η $4,3,2,1,0,-1,-2,-3,\ldots$ και είναι $\lim_{n\to+\infty}(5-n)=-\infty$. Η ακολουθία $(|5-n|)$ είναι η $4,3,2,1,0,1,2,3,\ldots$ και είναι $\lim_{n\to+\infty}|5-n|=|\lim_{n\to+\infty}(5-n)|=|-\infty|=+\infty$.

(2) Το αντίστροφο της Πρότασης 2.10 δεν ισχύει. Είναι $\lim_{n\to+\infty}\big|(-1)^{n-1}\big|=\lim_{n\to+\infty}1=1$. Όμως, δεν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}$.

Γ. Όρια και ανισότητες.

Πρόταση 2.11 *Έστω $x_n\leq y_n$ για κάθε n.*
(1) *Αν $\lim_{n\to+\infty}x_n=+\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty}y_n=+\infty$.*
(2) *Αν $\lim_{n\to+\infty}y_n=-\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty}x_n=-\infty$.*

Απόδειξη: (1) Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επειδή $y_n \geq x_n$, συνεπάγεται $y_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Παραδείγματα: (1) Από την ανισότητα $n + (-1)^{n-1} \geq n - 1$ και το όριο $\lim_{n\to+\infty}(n - 1) = +\infty$ συνεπάγεται το $\lim_{n\to+\infty} \big(n + (-1)^{n-1}\big) = +\infty$.

(2) Από την απλή ανισότητα $\frac{n^2+2n+1}{n+2} \geq n$ και το $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n+2} = +\infty$.

(3) Από την ανισότητα $[\sqrt{n}] > \sqrt{n} - 1$ και το $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n} - 1) = +\infty$ συνεπάγεται το $\lim_{n\to+\infty}[\sqrt{n}] = +\infty$.

Πρόταση 2.12 *Έστω $x_n \leq y_n$ για κάθε n. Αν είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, τότε $x \leq y$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε αντίφαση) ότι $x > y$. Παίρνοντας $\epsilon = \frac{x-y}{2} > 0$, από το ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ συνεπάγεται ότι υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $|x_n - x| < \frac{x-y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $|y_n - y| < \frac{x-y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0{}''$. Ορίζουμε $n_0 = \max\{n_0{}', n_0{}''\}$, οπότε ισχύει $n_0 \geq n_0{}'$ και $n_0 \geq n_0{}''$. Συνεπάγεται ότι είναι $|x_n - x| < \frac{x-y}{2}$ ΚΑΙ $|y_n - y| < \frac{x-y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n > x - \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$ και $y_n < y + \frac{x-y}{2} = \frac{x+y}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή είναι $x_n > \frac{x+y}{2} > y_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και αυτό αντιφάσκει με το ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε n.

Παραδείγματα: (1) Αν $x_n \geq a$ για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, συνεπάγεται $x \geq a$.

Πράγματι, θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία (a) και, επειδή $a \leq x_n$ για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty} a = a$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, συνεπάγεται $a \leq x$.

(2) Αν $x_n \leq b$ για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, συνεπάγεται $x \leq b$.

Η αιτιολόγηση είναι παρόμοια με αυτήν του (1).

(3) Αν όλοι οι όροι μιας ακολουθίας (x_n) ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, τότε και ο x ανήκει στο $[a, b]$.

Αυτό είναι συνδυασμός των (1) και (2).

Αν είναι $x_n < y_n$ για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$, τότε δε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x < y$. Σκεφτόμαστε ότι από την $x_n < y_n$ συνεπάγεται $x_n \leq y_n$ για κάθε n, οπότε – ως συνέπεια της Πρότασης 2.12 – συνεπάγεται ότι $x \leq y$. Μπορεί, λοιπόν, να είναι $x = y$.

Παράδειγμα: Είναι $-\frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ για κάθε n, αλλά και $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Πρόταση 2.13 ***Παρεμβολή***. *Έστω $x_n \leq y_n \leq z_n$ για κάθε n. Αν είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = \rho$ και $\lim_{n\to+\infty} z_n = \rho$, τότε $\lim_{n\to+\infty} y_n = \rho$.*

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $|x_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0{}'$ και φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $|z_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0{}''$. Ορίζουμε

$n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$, οπότε ισχύει $n_0 \geq n_0'$ και $n_0 \geq n_0''$. Συνεπάγεται ότι είναι $|x_n - \rho| < \epsilon$ ΚΑΙ $|z_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n > \rho - \epsilon$ και $z_n < \rho + \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται $\rho - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < \rho + \epsilon$ και, επομένως, $|y_n - \rho| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} y_n = \rho$.

Παραδείγματα: (1) Από την $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^{n-1}}{n} \leq \frac{1}{n}$, το $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = 0$ και το $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$.

(2) Είναι $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε n. Επειδή $\lim_{n\to+\infty}(-\frac{1}{n}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

(3) Από την $\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1$, το $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ και το $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1$ συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} = 1$.

Μέχρι τώρα είδαμε πώς μπορούμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για όρια ακολουθιών χρησιμοποιώντας ανισοτικές σχέσεις ανάμεσα στους αντίστοιχους όρους τους. Τώρα θα δούμε ένα αποτέλεσμα στην αντίθετη κατεύθυνση.

Πρόταση 2.14 (1) *Αν είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n < u$, τότε ισχύει $x_n < u$ από κάποιον δείκτη και πέρα.*
(2) *Αν είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n > l$, τότε ισχύει $x_n > l$ από κάποιον δείκτη και πέρα.*

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n < u$ και ας πάρουμε την περίπτωση $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, οπότε $x < u$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\epsilon = u - x > 0$, οπότε υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να είναι $|x_n - x| < u - x$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπάγεται ότι $x_n < x + (u - x) = u$ για κάθε $n \geq n_0$.

Στην περίπτωση $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με οποιονδήποτε $M > 0$ ο οποίος είναι $\geq -u$ – για παράδειγμα, τον $M = -u$, αν $u < 0$, και τον $M = 1$, αν $u \geq 0$. Συνεπάγεται ότι υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $x_n < -M \leq u$ για κάθε $n \geq n_0$.

(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1), διακρίνοντας περιπτώσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = x > l$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Παραδείγματα: (1) Για να δούμε αν ισχύει $\frac{24n^7+323n^5-17n^2+135}{n^8-n^6+2n^3-1} < \frac{1}{1000}$ για κάποιους φυσικούς n, βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty} \frac{24n^7+323n^5-17n^2+135}{n^8-n^6+2n^3-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{24n^7}{n^8} = 0$ και, επειδή είναι $0 < \frac{1}{1000}$, συμπεραίνουμε ότι όχι μόνο ισχύει η αρχική ανισότητα για κάποιους φυσικούς n αλλά ότι ισχύει *για κάθε n από κάποιον και πέρα*. Συμπεραίνουμε, δηλαδή, ότι υπάρχει κάποιος φυσικός n_0 ώστε να ισχύει η ανισότητα για κάθε $n \geq n_0$.

Το ασθενές σημείο αυτής της μεθόδου είναι ότι δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του n_0. Το ισχυρό σημείο είναι, φυσικά, ότι η αρχική ανισότητα είναι δύσκολο να λυθεί με αλγεβρικό τρόπο!

(2) Ερώτηση: ισχύει $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} \geq \frac{2}{3}$ για άπειρους φυσικούς n;

Υπολογίζουμε το όριο $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{4n^3} = \frac{1}{4}$. Επειδή είναι $\frac{1}{4} < \frac{2}{3}$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{n^3-2n+37}{4n^3+1} < \frac{2}{3}$ για κάθε n από κάποιον και πέρα. Άρα είναι αδύνατο να ισχύει η αντίθετη ανισότητα για άπειρους φυσικούς n.

Η Πρόταση 2.15, άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.14, περιγράφει, εκτός των άλλων, ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο με το οποίο μπορούμε να διακρίνουμε αν μια ακολουθία δεν έχει όριο.

Πρόταση 2.15 *Έστω l, u δυο αριθμοί.*
(1) Αν η (x_n) έχει άπειρους όρους $\geq u$ και υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n \geq u$.
(2) Αν η (x_n) έχει άπειρους όρους $\leq l$ και υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} x_n$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n \leq l$.
(3) Αν $l < u$ και η (x_n) έχει άπειρους όρους $\geq u$ και άπειρους όρους $\leq l$, τότε η (x_n) δεν έχει όριο.

Πράγματι, στην περίπτωση του (1) παρατηρούμε ότι, αν ήταν $\lim_{n\to+\infty} x_n < u$, τότε θα ήταν $x_n < u$ από κάποιον δείκτη και πέρα και, επομένως, δε θα είχε η (x_n) άπειρους όρους $\geq u$. Ομοίως, για το (2), αν ήταν $\lim_{n\to+\infty} x_n > l$, τότε θα ήταν $x_n > l$ από κάποιον δείκτη και πέρα και, επομένως, δε θα είχε η (x_n) άπειρους όρους $\leq l$. Τέλος, για το (3) σκεφτόμαστε ότι, αν υπήρχε το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ τότε αυτό θα ήταν $\geq u$ και $\leq l$ και, επειδή $l < u$, θα καταλήγαμε σε άτοπο.

Παραδείγματα: (1) Αν $a \leq -1$, η γεωμετρική πρόοδος (a^n) δεν έχει όριο, αφού έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1.

(2) Η $\big((-1)^{n-1}n\big)$ δεν έχει όριο, αφού έχει άπειρους όρους ≥ 1 και άπειρους όρους ≤ -1.

(3) Η $\big(n - 3[\frac{n}{3}]\big)$ δεν έχει όριο, αφού είναι $n - 3[\frac{n}{3}] = 0$ για $n = 3k$ ($k \in \mathbf{Z}$) και $n - 3[\frac{n}{3}] = 1$ για $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbf{Z}$).

Δ. Όρια και φραγμένες ακολουθίες.

Έχουμε δει ότι οι ακολουθίες $(\frac{1}{n})$, $\big(\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big)$ και $(\frac{n-1}{n})$ συγκλίνουν και, ταυτόχρονα, είναι φραγμένες. Αυτή η παρατήρηση γενικεύεται – προς μια κατεύθυνση – στην Πρόταση 2.16.

Πρόταση 2.16 *Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε αυτή είναι φραγμένη.*

Απόδειξη: Έστω ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $\epsilon = 1$, βλέπουμε ότι υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $|x_n - x| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Από την $|x_n - x| < 1$ συνεπάγεται $|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$. Άρα είναι $|x_n| < 1 + |x|$ για κάθε $n \geq n_0$. Ορίζουμε $M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$, οπότε είναι $|x_n| \leq M$ για κάθε n.

Παράδειγμα: Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 2.16. Η ακολουθία $\big((-1)^{n-1}\big)$ είναι φραγμένη αλλά δε συγκλίνει.

Πρόταση 2.17 (1) *Αν μια ακολουθία αποκλίνει στο $+\infty$, τότε αυτή είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη.*
(2) Αν μια ακολουθία αποκλίνει στο $-\infty$, τότε αυτή είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη.

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $M = 1$, βλέπουμε ότι υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $x_n > 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Ορίζουμε $l = \min\{x_1, \ldots, x_{n_0-1}, 1\}$ και εύκολα βλέπουμε ότι είναι $x_n \geq l$ για κάθε n. Από την άλλη μεριά, αν πάρουμε οποιονδήποτε u, υπάρχει n_0 ώστε να ισχύει $x_n > u$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, ο u δεν είναι άνω φράγμα της (x_n). Άρα η (x_n) δεν έχει κανένα άνω φράγμα.
(2) Η απόδειξη, με τις προφανείς αλλαγές, είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Παραδείγματα: (1) Το αντίστροφο του (1) της Πρότασης 2.17 δεν ισχύει. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η $\left(\frac{(1+(-1)^{n-1})n}{2}\right)$, δηλαδή η $1, 0, 3, 0, 5, 0, 7, \ldots$, είναι κάτω φραγμένη και όχι άνω φραγμένη. Όμως, η ακολουθία δεν αποκλίνει στο $+\infty$ διότι έχει άπειρους όρους ≤ 0.

(2) Ομοίως, το αντίστροφο του (2) της Πρότασης 2.17 δεν ισχύει. Η ακολουθία $-1, 0, -3, 0, -5, 0, -7, \ldots$ είναι άνω φραγμένη, όχι κάτω φραγμένη και δεν αποκλίνει στο $-\infty$.

Ασκήσεις.

Α. Ισότητα ορίων.

1. Έστω ότι η άγνωστη ακολουθία (x_n) *έχει* όριο. Υπολογίστε τις πιθανές τιμές του ορίου της αν οι όροι της ικανοποιούν οποιονδήποτε από τους παρακάτω αναδρομικούς τύπους

$$x_{n+1} = -x_n + 2, \quad x_{n+3} = x_n - 3, \quad x_{n+1} = {x_n}^2 - 3, \quad x_{n+2} = -{x_n}^2 + 3,$$
$$x_{n+1} = {x_n}^2 + 3, \quad x_{n+2} = x_{n+1} + {x_n}^3 .$$

(Υπόδειξη: Η πρώτη ακολουθία έχει ένα όριο, η δεύτερη έχει δυο πιθανά όρια και η τρίτη έχει τρία πιθανά όρια.)

Β. Όρια και αλγεβρικές πράξεις.

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια, χρησιμοποιώντας τους κανόνες αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου, αντιστρόφου και λόγου.

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(2n^3+3n+\frac{1}{n}\Big), \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(n+\frac{1}{n}+2\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big), \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n+3}{n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^3, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(-n+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big)^9, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{27}(n+3)^{79}}{(2n+1)^{106}},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{-n+\frac{1}{n}}{2+\frac{(-1)^{n-1}}{n}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{n+3\log_{10}n},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{2+(-1)^n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2\cdot 10^n}{5+3\cdot 10^n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{\log_2 n+3}{-2\log_{10}n+15}.$$

2. Βρείτε τα παρακάτω όρια πολυωνυμικών και ρητών παραστάσεων του n.

$$\lim_{n\to+\infty}(3n^2-4n+5),\quad \lim_{n\to+\infty}(n^2-4n^5+1),\quad \lim_{n\to+\infty}\big((1-n)^5+n^4\big),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2-5n}{5n^2+2n-6}\,,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{-2n^5+4n^2}{3n^7+n^3-10}\,,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{3n^2+4n}{2n-1}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2n-3}{3n+7}\Big)^4,\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{-n^2+n+1}{3n+1}\Big)^3,\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{-n^2+n+1}{3n+1}\Big)^4,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n^2}{n+1}-n-1\Big),\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{n(n+1)}{n+4}-\frac{4n^3}{4n^2+1}\Big).$$

3. Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{n\to+\infty}(1+2+2^2+\cdots+2^n),\quad \lim_{n\to+\infty}\big(1-2+2^2+\cdots+(-1)^n2^n\big),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\big(1-1+1-1+\cdots+(-1)^n\big),\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\Big),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2^7}{3^7}+\frac{2^8}{3^8}+\cdots+\frac{2^{n+6}}{3^{n+6}}\Big),\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2^n}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{2^{2n}}{3^{2n}}\Big),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\cdots+2^n}{1+3+\cdots+3^n}\,,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1-3+\cdots+(-1)^n3^n}{1-2+\cdots+(-1)^n2^n}\,.$$

4. Υπάρχουν τα παρακάτω όρια;

$$\lim_{n\to+\infty}\Big((-1)^{n-1}+\frac{10}{n^3}\Big),\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^{n-1}n}{n},\quad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{2}{n}+(-1)^{n-1}n\Big),$$

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}\,,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(-1)^{n-1}+\frac{1}{\log_3 n}}\,,\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{1}{n^2}}\,.$$

(Υπόδειξη: Με άτοπο.)

5. Έστω $x_n\neq -1$ για κάθε n και $x\neq -1$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}x_n=x$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n}{1+x_n}=\frac{x}{1+x}$.

   (Υπόδειξη: Για το αντίστροφο, γράψτε $y_n=\frac{x_n}{1+x_n}$ και $y=\frac{x}{1+x}$.)

6. Βρείτε δυο ακολουθίες (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο τέτοιες ώστε η (x_n+y_n) να έχει όριο.

   Βρείτε δυο ακολουθίες (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο τέτοιες ώστε η (x_ny_n) να έχει όριο.

7. Αν η (x_n+y_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

   Αν η (x_ny_n) έχει όριο και μια από τις (x_n), (y_n) έχει όριο, αποδείξτε ότι, υπό κάποια προϋπόθεση, και η άλλη έχει όριο.

8. Βρείτε δυο ακολουθίες (x_n), (y_n) με *θετικούς* όρους τέτοιες ώστε να είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ και το $\lim_{n\to+\infty}(x_n y_n)$ να μην υπάρχει.

9. Αν $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ορίου με τους ϵ και n_0.)

10. Ποιο λάθος γίνεται στους παρακάτω συλλογισμούς;

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(n\cdot\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\Big(\underbrace{\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n}\Big) = \underbrace{0+\cdots+0}_{n} = 0.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \lim_{n\to+\infty}\underbrace{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{n}\Big)}_{n} = \underbrace{1\cdots1}_{n} = 1.$$

11. Μια επίπεδη νιφάδα χιονιού υφίσταται διαδοχικές αλλαγές με τον εξής τρόπο: Το αρχικό της σχήμα είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς μήκους s. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 12 ισομήκεις πλευρές. Κατόπιν, από το μεσαίο ένα τρίτο *κάθε* πλευράς (της νέας νιφάδας) ξεφυτρώνει ένα ισόπλευρο τρίγωνο, οπότε το νέο σχήμα της νιφάδας είναι πολυγωνικό με 48 ισομήκεις πλευρές. Αν αυτή η διαδικασία συνεχιστεί επ΄ άπειρον, φανταστείτε το οριακό σχήμα της νιφάδας και υπολογίστε
    (i) το μήκος της περιφέρειας της «οριακής νιφάδας».
    (ii) το εμβαδό της «οριακής νιφάδας».

12. $^{(**)}$ Ένα αυτοκίνητο ξεκινά από την πόλη Α και σε ευθύ δρόμο κατευθύνεται προς την πόλη Β με σταθερή ταχύτητα $v\frac{km}{hr}$. Όλοι γνωρίζουμε ότι, αν η απόσταση των δυο πόλεων είναι $d\,km$, τότε το αυτοκίνητο θα ολοκληρώσει τη διαδρομή σε χρόνο $\frac{d}{v}\,hr$. Απαντήστε, όμως, σε κάποιον που ισχυρίζεται ότι *το αυτοκίνητο δε θα φτάσει ποτέ στην πόλη Β* και το δικαιολογεί ως εξής:

    $<$ Ας υποθέσουμε ότι το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή απόσταση και, μάλιστα, στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Ας υποθέσουμε, επίσης, ότι κατόπιν το αυτοκίνητο καλύπτει τη μισή από την εναπομένουσα απόσταση στον προβλεπόμενο γι αυτή χρόνο. Και ούτω καθ΄ εξής. Το αυτοκίνητο έχει, όμως, πάντοτε μπροστά του κάποια εναπομένουσα (έστω και πολύ μικρή) απόσταση μέχρι την πόλη Β, οπότε δε θα φτάσει ποτέ εκεί $>$.

    Η απάντησή σας για να είναι πειστική πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τα λογικά βήματα του παραπάνω ισχυρισμού.

Γ. Όρια και ανισότητες.

1. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο των Προτάσεων 2.11, 2.12 και 2.13.

2. Βρείτε το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

(*i*) $1 < x_n \leq \frac{n^2+3n}{n^2+1}$ για κάθε n.

(*ii*) $\frac{\log_{10} n-2}{2\log_{10} n+4} < x_n < \frac{3+n}{1+2n}$ για κάθε n.

(*iii*) $x_n \leq 15n + 6n^2 - n^3$ για κάθε n.

3. Προφανώς, δεν εφαρμόζεται ο κανόνας αθροίσματος για τον υπολογισμό του $\lim_{n\to+\infty}\big(2n+(-1)^{n-1}n\big)$. Συγκρίνοντας με μια απλή ακολουθία, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\big(2n+(-1)^{n-1}n\big) = +\infty$.

   Με παρόμοιο τρόπο αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(2n + n\sin n) = +\infty$.

4. Αποδείξτε ότι
$$\lim_{n\to+\infty}[nx] = \begin{cases} +\infty\,, & \text{αν } x > 0, \\ 0\,, & \text{αν } x = 0, \\ -\infty\,, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη διπλή ανισότητα $[a] \leq a < [a] + 1$.)

   Αποδείξτε ότι
$$\lim_{n\to+\infty}([nx] - [ny]) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } x > y, \\ 0, & \text{αν } x = y, \\ -\infty, & \text{αν } x < y. \end{cases}$$

5. Έστω ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και ότι η (y_n) είναι κάτω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

   (Υπόδειξη: Έστω l ένα κάτω φράγμα της (y_n). Τότε ... .)

   Έστω ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$ και ότι η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

6. Έστω ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και ότι η (y_n) είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = 0$.

   (Υπόδειξη: Αν $|y_n| \leq M$ για κάθε n, τότε $-M|x_n| \leq x_n y_n \leq M|x_n|$ για κάθε n.)

7. Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο *θετικό* κάτω φράγμα. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.

   Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η (y_n) έχει κάποιο *αρνητικό* άνω φράγμα. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

8. Με την ιδιότητα παρεμβολής αποδείξτε τα παρακάτω όρια.
$$\lim_{n\to+\infty} 2^{-2n+(-1)^{n-1}n} = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{4}\Big)^n = 0.$$

9. (*) Με την ιδιότητα παρεμβολής αποδείξτε ότι
$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big) = 1.$$

   (Υπόδειξη: Είναι $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ για κάθε k με $1 \leq k \leq n$.)

10. Θεωρήστε την ακολουθία Fibonnaci (x_n), δηλαδή την ακολουθία που ορίζεται με αρχικούς όρους $x_1 = x_2 = 1$ και με τον αναδρομικό τύπο $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ $(n \geq 1)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $x_n \geq \frac{n}{2}$ για κάθε n. Ποιο είναι το όριο της (x_n);

11. Έστω $0 \leq a < 1$ και ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα: $|x_{n+1}| \leq a|x_n|$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

    (Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $|x_2| \leq a|x_1|$, $|x_3| \leq a^2|x_1|$, $|x_4| \leq a^3|x_1|$ κλπ.)

    Έστω $a > 1$ και ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα: $x_{n+1} \geq ax_n$ για κάθε n και $x_1 > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

12. Γνωρίζουμε ότι, αν όλοι οι όροι της (x_n) ανήκουν στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, τότε και ο x ανήκει στο $[a, b]$. Υπάρχει παρόμοιο συμπέρασμα για το όριο x της (x_n), αν όλοι οι όροι της ανήκουν στο ανοικτό διάστημα (a, b);

    (Υπόδειξη: Σκεφτείτε το παράδειγμα του διαστήματος $(0, 2)$ και της ακολουθίας $(\frac{1}{n})$ ή της $(2 - \frac{1}{n})$.)

    Ποιο γενικό συμπέρασμα υπάρχει για το όριο x της (x_n) αν όλοι οι όροι της ανήκουν στο ανοικτό διάστημα (a, b);

13. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο των Προτάσεων 2.14 και 2.15.

14. Υπολογίζοντας όρια, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα.

    Ισχύει $-n^5 + 4n^3 < -100$ από κάποιον φυσικό n και πέρα;

    Ισχύει $n^7 - 35n^6 + n^3 - 47n < 84$ για άπειρους φυσικούς n;

    Ισχύει $\frac{3}{2} < \frac{7n^3-n+5}{4n^3+n^2+35} < 2$ από κάποιον φυσικό n και πέρα;

    Ισχύει $\frac{2n^4-n^3+7}{-n^3+n^2+3} \leq -78$ από κάποιον φυσικό n και πέρα;

    Ισχύει $\frac{2n^3-n^2+7n+1}{n^3+n^2+3} \leq 1$ για άπειρους φυσικούς n;

15. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.15, αποδείξτε ότι:

    (i) η σταθερή ακολουθία (1) δεν έχει όριο $\neq 1$.

    (ii) η $(\frac{1}{n})$ δεν έχει όριο $\neq 0$.

    (iii) η (n) δεν έχει όριο $\neq +\infty$.

16. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.15, αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια.

    $$\lim_{n\to+\infty} 2^{(-1)^{n-1}}, \quad \lim_{n\to+\infty} 2^{(-1)^{n-1}n}, \quad \lim_{n\to+\infty} \Big(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\Big)^n.$$

    Με τον ίδιο τρόπο ξαναδείτε την άσκηση B4.

17. $^{(*)}$ Έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ και ότι υπάρχει κάποιος όρος της (x_n) ο οποίος είναι $> x$. Αποδείξτε ότι υπάρχει *μέγιστος* όρος της (x_n).

(Υπόδειξη: Έστω ότι είναι $x < x_k$ για κάποιον φυσικό k. Παρατηρήστε ότι ισχύει $x_n < x_k$ από κάποιον φυσικό και πέρα. Αν, λοιπόν, είναι $x_n < x_k$ για κάθε $n \geq n_0$, σε ποιους από τους όρους της ακολουθίας θα αναζητήσετε τον μέγιστο όρο της;)

Δ. Όρια και φραγμένες ακολουθίες.

1. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο των Προτάσεων 2.16 και 2.17.

2. Υπολογίζοντας όρια, βρείτε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες.

$$(\log_3 n), \quad (2^n), \quad \Big(\frac{2^n}{3^n}\Big), \quad \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\Big), \quad \Big(\frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}\Big),$$

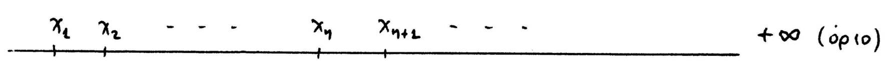
$$\Big(\frac{4n^3 - 2n - 1}{7n^4 + n^3 + 5n^2 + 2}\Big), \quad \Big(\frac{3 - (\log_2 n)^3}{1 + \log_2 n + (\log_2 n)^2}\Big).$$

3. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες δεν είναι ούτε άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες.

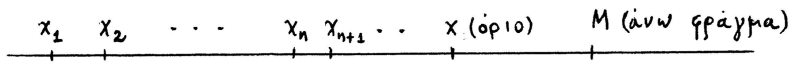
$$\Big((-2)^n \frac{n^3 - 3}{2n + 1}\Big), \quad (2^n + 3^n(-1)^{n-1}), \quad ((2^n + n)(-1)^{n-1} + 2^n - n).$$

2.5 Όρια μονότονων ακολουθιών. Ο αριθμοί e, π.

Έστω ότι η (x_n) είναι *αύξουσα* ακολουθία, που σημαίνει ότι, καθώς ο n αυξάνεται, ο x_n κινείται προς τα δεξιά πάνω στην πραγματική ευθεία. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η (x_n) δεν είναι άνω φραγμένη – για παράδειγμα, η (n) ή η (n^2) – οπότε ο x_n κινείται όσο θέλουμε μακρυά προς τα δεξιά. Στη δεύτερη περίπτωση η (x_n) είναι άνω φραγμένη – για παράδειγμα, η $(\frac{n-1}{n})$ – και τότε ο x_n δεν ξεπερνά κάποιο σημείο, το οποίο, προφανώς, είναι άνω φράγμα της ακολουθίας. Στην πρώτη περίπτωση είναι φανερό ότι η (x_n) έχει όριο το $+\infty$. Στη δεύτερη περίπτωση είναι, επίσης, φανερό ότι ο x_n πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά κάποιον αριθμό όχι πέρα από το οποιοδήποτε άνω φράγμα της (x_n). Ο αριθμός αυτός είναι, φυσικά, το όριο της (x_n).



Σχήμα 2.5: Αύξουσα ακολουθία χωρίς άνω φράγμα.



Σχήμα 2.6: Αύξουσα ακολουθία με άνω φράγμα.

Παρόμοιους συλλογισμούς κάνουμε για μια *φθίνουσα* ακολουθία (x_n). Τώρα, καθώς ο n αυξάνεται, ο x_n κινείται προς τα αριστερά και υπάρχουν ακριβώς δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η (x_n) δεν είναι κάτω φραγμένη, δηλαδή ο x_n κινείται όσο θέλουμε μακρυά προς τα αριστερά, και στη δεύτερη περίπτωση η (x_n) είναι κάτω φραγμένη, δηλαδή ο x_n δεν ξεπερνά κάποιο σημείο, ένα κάτω φράγμα της ακολουθίας. Στην πρώτη περίπτωση η (x_n) έχει όριο το $-\infty$ ενώ στη δεύτερη περίπτωση ο x_n πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά κάποιον αριθμό όχι πέρα από το οποιοδήποτε κάτω φράγμα της (x_n) και ο αριθμός αυτός είναι το όριο της (x_n).

Συνοψίζουμε:

Θεώρημα 2.1 *Κάθε μονότονη ακολουθία έχει όριο. Πιο συγκεκριμένα:*
(1) *Αν η ακολουθία είναι αύξουσα, τότε είτε* (i) *δεν είναι άνω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο* $+\infty$, *είτε* (ii) *είναι άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει και το όριό της είναι μικρότερο από ή ίσο με οποιοδήποτε άνω φράγμα της.*
(2) *Αν η ακολουθία είναι φθίνουσα, τότε είτε* (i) *δεν είναι κάτω φραγμένη, οπότε αποκλίνει στο* $-\infty$, *είτε* (ii) *είναι κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει και το όριό της είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με οποιοδήποτε κάτω φράγμα της.*

Μπορούμε να συμπληρώσουμε το Θεώρημα 2.1 ως εξής. Αν x είναι το όριο μιας αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας (x_n), είναι φανερό ότι όλοι οι x_n είναι $\leq x$ και, μάλιστα, αν η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα, τότε όλοι οι όροι είναι $< x$. Βλέπουμε έτσι ότι το όριο x είναι ένα από τα άνω φράγματα της (x_n) και, επειδή είναι μικρότερο από ή ίσο με οποιοδήποτε άνω φράγμα της (x_n), συμπεραίνουμε:

`Το όριο αύξουσας, άνω φραγμένης ακολουθίας είναι το μικρότερο από τα άνω φράγματά της. Ομοίως, το όριο φθίνουσας, κάτω φραγμένης ακολουθίας είναι το μεγαλύτερο από τα κάτω φράγματά της.`

Δε θα αποδειχθεί το Θεώρημα 2.1 σ' αυτές τις σημειώσεις.

Το Θεώρημα 2.1 είναι πολύτιμο. Από θεωρητική σκοπιά: *συμπεραίνουμε ότι κάθε μονότονη ακολουθία έχει οπωσδήποτε όριο.* Από πρακτική σκοπιά: *συμπεραίνουμε για μια δοσμένη ακολουθία ότι έχει όριο αρκεί μόνο να ελέγξουμε ότι είναι μονότονη, χωρίς να χρειάζεται να μαντέψουμε από πριν το πιθανό όριό της.* Προσέξτε: για να αποδείξουμε, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου, ότι μια ακολουθία έχει όριο πρέπει να γνωρίζουμε (ή να μαντέψουμε) το υποψήφιο όριό της ώστε κατόπιν να αποδείξουμε με υπολογισμούς ότι η απόσταση του n-οστού όρου της από αυτό θα γίνει (αν ο δείκτης γίνει αρκετά μεγάλος) μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό. Το Θεώρημα 2.1 εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που δε μπορούμε να μαντέψουμε το όριο μιας ακολουθίας και που δε μπορούμε να εφαρμόσουμε τους διάφορους κανόνες υπολογισμού ορίων (πράξεις, παρεμβολή κλπ).

Το Θεώρημα 2.1 δεν παρέχει τρόπο υπολογισμού του ορίου μονότονης ακολουθίας. Όμως, εκμεταλλευόμενοι την πληροφορία ότι μια ακολουθία *έχει* όριο, μπορεί να καταφέρουμε με κάποιο τρόπο (ανάλογα με την περίπτωση) να υπολογίσουμε και την τιμή του ορίου. Δείτε για παράδειγμα την άσκηση Α1 της προηγούμενης ενότητας.

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε την (x_n) η οποία ορίζεται από τον πρώτο όρο της και από έναν *αναδρομικό τύπο* ως εξής:

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \quad (n \geq 1).$$

Οι αρχικοί όροι της (x_n) είναι $1, \sqrt{2}\,, \sqrt{2\sqrt{2}}\,, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\,, \ldots$. Από αυτούς μαντεύουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και το αποδεικνύουμε με την αρχή της επαγωγής. Προφανώς, ισχύει $x_1 \leq x_2$ και υποθέτουμε ότι για κάποιον n ισχύει $x_n \leq x_{n+1}$. Κατ΄ αρχάς όλοι οι όροι είναι μη αρνητικοί διότι ο πρώτος είναι 1 και όλοι οι άλλοι είναι τετραγωνικές ρίζες. Επομένως, έχουμε, διαδοχικά: $x_n \leq x_{n+1}$ συνεπάγεται $2x_n \leq 2x_{n+1}$ συνεπάγεται $\sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2x_{n+1}}$ συνεπάγεται $x_{n+1} \leq x_{n+2}$. Συμπεραίνουμε ότι η ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ ισχύει για κάθε n, οπότε η ακολουθία είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο.

Από την $x_n \leq x_{n+1}$ και τον αναδρομικό τύπο έχουμε $x_n \leq \sqrt{2x_n}$, οπότε είναι $x_n \leq 2$ για κάθε n. Άρα η (x_n) είναι και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε αριθμό.

Συμβολίζουμε x το άγνωστο όριο της (x_n). Παίρνοντας όριο των δυο μελών της ισότητας ${x_{n+1}}^2 = 2x_n$, συνεπάγεται $x^2 = 2x$, οπότε $x = 0$ ή $x = 2$. Η περίπτωση $x = 0$ αποκλείεται διότι η ακολουθία είναι αύξουσα με πρώτο όρο τον 1, οπότε όλοι οι όροι της είναι ≥ 1 και, επομένως, και το όριό της πρέπει να είναι ≥ 1. Καταλήγουμε στο ότι $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$.

Υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να αποδειχθεί ότι η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Η ανισότητα $x_n \leq x_{n+1}$ είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq \sqrt{2x_n}$ και (επειδή έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι είναι $x_n \geq 0$ για κάθε n) αυτή είναι ισοδύναμη με την $x_n \leq 2$. Επομένως, αν αποδείξουμε ότι είναι $x_n \leq 2$ για κάθε n θα έχουμε αποδείξει ότι η (x_n) είναι αύξουσα αλλά, ταυτόχρονα, *και* ότι είναι άνω φραγμένη με άνω φράγμα τον 2. Αυτό μπορεί να γίνει με την αρχή της επαγωγής. Η $x_1 \leq 2$ είναι προφανώς σωστή. Έστω ότι είναι $x_n \leq 2$ για κάποιον n. Τότε $x_{n+1} = \sqrt{2x_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ και, επομένως, ισχύει $x_n \leq 2$ για κάθε n.

Το *αποτέλεσμα* του επόμενου παραδείγματος είναι **θεμελιώδες**!

Παράδειγμα: Κάποιος έχει ένα κεφάλαιο K. Η πρώτη τράπεζα παρέχει επιτόκιο κατάθεσης εκατό τοις εκατό (μη ρωτάτε ποια είναι!) στο τέλος του έτους, οπότε ο κεφαλαιούχος θα έχει τελικό κεφάλαιο $(1+1)K = 2K$. Η δεύτερη τράπεζα παρέχει το ίδιο επιτόκιο αλλά με ανατοκισμό στο τέλος του εξαμήνου, δηλαδή πενήντα τοις εκατό στο μισό έτος και πενήντα τοις εκατό στο νέο κεφάλαιο στο υπόλοιπο μισό έτος, οπότε το τελικό κεφάλαιο θα είναι $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})K = (1+\frac{1}{2})^2 K$. Η τρίτη τράπεζα κάνει δυο ενδιάμεσους ανατοκισμούς και παρέχει $\frac{100}{3}$ τοις εκατό επιτόκιο στο ένα τρίτο του έτους, το ίδιο επιτόκιο στο νέο κεφάλαιο στο επόμενο ένα τρίτο του έτους και το ίδιο επιτόκιο στο νέο κεφάλαιο στο τελευταίο ένα τρίτο του έτους. Το τελικό κεφάλαιο στην τρίτη τράπεζα θα είναι $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})K = (1+\frac{1}{3})^3 K$.

Γενικά, η n-οστή τράπεζα με $n-1$ ενδιάμεσους ανατοκισμούς ανά ίσα χρονικά διαστήματα θα δώσει τελικό κεφάλαιο $(1+\frac{1}{n})^n K$.

Παρατηρώντας τους αριθμούς για τις αρχικές τράπεζες, υποψιαζόμαστε ότι *περισσότεροι ανατοκισμοί δίνουν μεγαλύτερο τελικό κεφάλαιο*. Αποδεικνύεται ότι αυτό είναι αλήθεια, δηλαδή ότι η ακολουθία με τύπο $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ είναι αύξουσα. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν, ξεκινώντας με το ίδιο αρχικό κεφάλαιο K, το τελικό κεφάλαιο αυξάνεται *απεριόριστα* από τράπεζα σε τράπεζα. Αποδεικνύεται ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη και, μάλιστα, το όριό της είναι μικρότερο από 4. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ο κεφαλαιούχος δε μπορεί να ελπίζει σε τελικό κεφάλαιο υπερτετραπλάσιο του αρχικού.

Ας δούμε γιατί η (x_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ένα βοηθητικό Λήμμα.

Λήμμα 2.1 *Για κάθε φυσικό n και κάθε $x \geq -1$ ισχύει $(1+x)^n \geq 1+nx$.*

Η ανισότητα $(1+x)^n \geq 1+nx$ ονομάζεται **ανισότητα του Bernoulli** και η απόδειξη γίνεται εύκολα με την αρχή της επαγωγής ως προς τον n.

Τώρα, η ανισότητα $(1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$ ισοδυναμεί με την $(\frac{n+1}{n})^n \leq (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1}(\frac{n+1}{n})^{n+1} \leq (\frac{n+2}{n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} \leq (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1})^{n+1}$ κι αυτή με την $\frac{n}{n+1} \leq (1-\frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1}$ η οποία είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.1. Πράγματι, είναι $(1-\frac{1}{n^2+2n+1})^{n+1} \geq 1-\frac{n+1}{n^2+2n+1} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. Άρα η ακολουθία είναι αύξουσα.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $(1+\frac{1}{n})^n < 4$, το οποίο ισοδυναμεί με $\frac{1}{2} < \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n$. Από το Λήμμα 1.1 είναι $\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n = \left(1-\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)^n \geq 1-n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1-n\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 1-\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 1-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 1-\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$.

Συμβολίζουμε με το γράμμα e το όριο της $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)$. Δηλαδή **ορίζουμε**

$$\boxed{e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.}$$

Ο αριθμός e, όπως και ο π, είναι ένας από τους σημαντικότερους αριθμούς για την επιστήμη και οπωσδήποτε ο σπουδαιότερος για τη Θεωρία Πιθανοτήτων και τη Στατιστική.

Ο e δεν είναι ρητός αριθμός και, μάλιστα, ούτε καν **αλγεβρικός αριθμός**. Ένας αριθμός χαρακτηρίζεται αλγεβρικός, αν είναι λύση οποιασδήποτε πολυωνυμικής εξίσωσης $a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N = 0$ με *ακέραιους* συντελεστές. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε ρητός αριθμός είναι αλγεβρικός: ο $\frac{m}{n}$ (με ακέραιους m, n) είναι, προφανώς, λύση της εξίσωσης $m+(-n)x = 0$ η οποία έχει ακέραιους συντελεστές. Από την άλλη μεριά δεν είναι όλοι οι αλγεβρικοί αριθμοί ρητοί. Για παράδειγμα, ο άρρητος $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός διότι είναι λύση της πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές $(-2) + 1x^2 = 0$. Οι μη αλγεβρικοί αριθμοί ονομάζονται και **υπερβατικοί αριθμοί**. Επομένως, ο e είναι υπερβατικός αριθμός. Αργότερα, στο Κεφάλαιο 10, θα αποδείξουμε ότι ο e δεν είναι ρητός.

Ονομάζουμε **φυσικούς λογαρίθμους** τους λογαρίθμους με βάση τον e και χρησιμοποιούμε για κάθε $y > 0$ τα απλούστερα σύμβολα

$$\log y \quad \text{ή} \quad \ln y$$

αντί του $\log_e y$. Οι προτάσεις που ακολουθούν είναι, φυσικά, εξειδίκευση των Προτάσεων 1.10 και 1.11.

Πρόταση 2.18 (1) $\log(yz) = \log y + \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(2) $\log \frac{y}{z} = \log y - \log z$ *για κάθε* $y, z > 0$.
(3) $\log(y^z) = z \log y$ *για κάθε* $y > 0$ *και κάθε* z.
(4) $\log 1 = 0$ *και* $\log e = 1$.
(5) *Αν* $0 < y < z$, *τότε* $\log y < \log z$.

Πρόταση 2.19 *Έστω* $a > 0$, $a \neq 1$. *Τότε*

$$\log_a y = \frac{\log y}{\log a}$$

για κάθε $y > 0$.

Παράδειγμα: Τώρα θα μελετήσουμε ένα ιστορικό παράδειγμα.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι το γράμμα π συμβολίζει το μισό μήκος οποιουδήποτε κύκλου ακτίνας 1. Τώρα θα δούμε ποιο ακριβώς είναι το *μαθηματικό νόημα* του όρου «μήκος του κύκλου» και πώς μπορεί να προσεγγιστεί η τιμή του, δηλαδή ο αριθμός 2π, από τα μήκη εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων στον κύκλο κανονικών πολυγώνων.

Πιο συγκεκριμένα, αν ονομάσουμε K έναν κύκλο με ακτίνα 1, θεωρούμε εγγεγραμμένα στον K κανονικά πολύγωνα $P_4, P_8, P_{16}, \ldots$ με αντίστοιχους αριθμούς πλευρών $4, 8, 16, \ldots$. Γενικά, με P_{2^n} θα συμβολίσουμε ένα εγγεγραμμένο στον K κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές. Μπορούμε να κατασκευάσουμε από κάθε P_{2^n} το επόμενο $P_{2^{n+1}}$ ως εξής: θεωρούμε ως κορυφές του $P_{2^{n+1}}$ τις 2^n κορυφές του P_{2^n} καθώς και τα μέσα των 2^n τόξων στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από τις κορυφές του P_{2^n}, δηλαδή συνολικά $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ σημεία. Αν συμβολίσουμε p_n το μήκος του πολυγώνου P_{2^n}, τότε φυσικά είναι $p_2 = 4\sqrt{2}$. Δεν είναι δύσκολο να βρούμε έναν αναδρομικό τύπο που να συσχετίζει τα μήκη p_{n+1} και p_n. Ο τύπος αυτός είναι ο

$$p_{n+1} = \frac{2p_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{{p_n}^2}{4^n}}}}$$

και αποδεικνύεται με γεωμετρικό τρόπο.

Θεωρούμε, επίσης, και περιγεγραμμένα στον κύκλο K κανονικά πολύγωνα $Q_4, Q_8, Q_{16}, \ldots$ με $4, 8, 16, \ldots$ πλευρές. Γενικά, με Q_{2^n} θα συμβολίσουμε το περιγεγραμμένο στον K κανονικό πολύγωνο με 2^n πλευρές, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον K στις κορυφές του P_{2^n}. Αν συμβολίσουμε q_n το μήκος του πολυγώνου Q_{2^n}, τότε, προφανώς, είναι $q_2 = 8$ και αποδεικνύεται με γεωμετρικό τρόπο ότι τα μήκη q_n και p_n συνδέονται με τη σχέση

$$q_n = \frac{p_n}{\sqrt{1 - \frac{{p_n}^2}{4^{n+1}}}}\,.$$

Επίσης, αποδεικνύεται και ο αναδρομικός τύπος

$$q_{n+1} = \frac{4q_n}{2 + \sqrt{4 + \frac{{q_n}^2}{4^n}}}\,.$$

Από την πρώτη σχέση βλέπουμε ότι η ακολουθία (p_n) είναι γνησίως αύξουσα και από την τρίτη σχέση ότι η (q_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Πράγματι, είναι $p_{n+1} = \frac{2p_n}{\sqrt{2+\sqrt{4-\frac{{p_n}^2}{4^n}}}} > \frac{2p_n}{\sqrt{2+\sqrt{4}}} = p_n$ και $q_{n+1} = \frac{4q_n}{2+\sqrt{4+\frac{{q_n}^2}{4^n}}} < \frac{4q_n}{2+\sqrt{4}} = q_n$. Από τη δεύτερη σχέση βρίσκουμε ότι $q_n > \frac{p_n}{\sqrt{1}} = p_n$. Έχουμε, λοιπόν, το εξής σχήμα:

$$p_2 < p_3 < \cdots < p_n < p_{n+1} < \cdots < q_{n+1} < q_n < \cdots < q_3 < q_2\,.$$

Επειδή η (p_n) είναι αύξουσα ακολουθία και, προφανώς, άνω φραγμένη (με άνω φράγμα τον q_2, για παράδειγμα), συνεπάγεται ότι συγκλίνει. Τώρα, μια από τις παραδοχές της Γεωμετρίας είναι ότι *το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με το όριο των μηκών των εγγεγραμμένων σ΄ αυτόν κανονικών πολυγώνων με 2^n πλευρές.* Είναι, μάλιστα, πιο σωστό να πούμε ότι

Το μήκος ενός κύκλου **ορίζεται** ως το όριο των μηκών των εγγεγραμμένων σ΄ αυτόν κανονικών πολυγώνων με 2^n πλευρές.

Ο ορισμός αυτός «αιτιολογείται» επειδή, καθώς ο δείκτης n αυξάνεται, τα πολύγωνα *τείνουν να ταυτιστούν* με τον κύκλο και, επομένως, είναι «λογικό» να δεχτούμε ότι τα μήκη τους πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά το μήκος του κύκλου.

Αφού, λοιπόν, χρησιμοποιούμε το γράμμα π για να συμβολίσουμε το μισό μήκος ενός κύκλου ακτίνας 1, συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός π ορίζεται ως το μισό του ορίου της ακολουθίας (p_n). Δηλαδή, ορίζουμε

$$\boxed{\pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} p_n\,.}$$

Τώρα, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{\sqrt{1-\frac{{p_n}^2}{4^{n+1}}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-4\pi^2\cdot 0}} = 2\pi$. Άρα οι δυο ακολουθίες (p_n) και (q_n) έχουν το ίδιο όριο και, επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως εναλλακτικό ορισμό του αριθμού π τον

$$\boxed{\pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} q_n\,.}$$

Βλέπουμε, επίσης, ότι είναι

$$\boxed{p_2 < p_3 < \cdots < p_n < \cdots \; < 2\pi < \; \cdots < q_n < \cdots < q_3 < q_2 \,.}$$

Είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ότι ο αριθμός e ορίζεται με αναλυτικό τρόπο ως όριο της ακολουθίας $\big((1+\frac{1}{n})^n\big)$. Θα μπορούσε να ρωτήσει κάποιος αν και ο αριθμός π μπορεί να ορισθεί με αναλυτικό τρόπο, δηλαδή χωρίς να χρησιμοποιηθούν γεωμετρικές έννοιες και κατασκευές. Αυτό, πράγματι, γίνεται και, μάλιστα, με διάφορους τρόπους. Ένας τρόπος είναι, για παράδειγμα, ο εξής. Θεωρούμε την ακολουθία (q_n) που ορίζεται να έχει $q_2 = 8$ και να ικανοποιεί τον αναδρομικό τύπο $q_{n+1} = \frac{4q_n}{2+\sqrt{4+\frac{{q_n}^2}{4^n}}}$ $(n \geq 2)$, χωρίς να μας απασχολεί αν αυτή έχει οποιαδήποτε σχέση με οποιαδήποτε γεωμετρικά σχήματα. Αποδεικνύουμε εύκολα ότι η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα – όπως έχουμε ήδη κάνει – και κάτω φραγμένη, αφού είναι προφανές με την αρχή της επαγωγής ότι όλοι οι όροι της είναι ≥ 0. Συμπεραίνουμε ότι η (q_n) συγκλίνει σε κάποιον αριθμό και ορίζουμε τον αριθμό π να είναι το μισό του ορίου της (q_n): $\pi = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} q_n$. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την ακολουθία (p_n) αντί της (q_n) αλλά η (q_n) είναι απλούστερη.

Ασκήσεις.

1. Έστω αριθμός $a > 1$. Βρείτε το όριο της $(\frac{a^n}{n})$ με τους εξής δυο τρόπους.

   (i) Αποδείξτε ότι η $(\frac{a^n}{n})$ είναι αύξουσα *από κάποιον δείκτη και πέρα* – οπότε έχει όριο – και ότι ισχύει $\frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{an}{n+1}\frac{a^n}{n}$ για κάθε n. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας αυτήν την ισότητα, βρείτε το όριο της $(\frac{a^n}{n})$.

   (ii) Θεωρήστε οποιονδήποτε b με την ιδιότητα $1 < b < a$ και παρατηρήστε ότι από το Λήμμα 2.1 συνεπάγεται $b^n \geq 1 + (b-1)n$ για κάθε n. Βρείτε το όριο της $(\frac{a^n}{n})$ γράφοντας $\frac{a^n}{n} = \big(\frac{a}{b}\big)^n \frac{b^n}{n}$.

2. Έστω αριθμός $a > 1$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $(\sqrt[n]{a})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη – οπότε έχει όριο – και ότι ισχύει $\big(\sqrt[2n]{a}\big)^2 = \sqrt[n]{a}$ για κάθε n. Βρείτε το όριο της $(\sqrt[n]{a})$.

   Τι γίνεται στις περιπτώσεις $a = 1$ και $0 < a < 1$;

3. $^{(*)}$ Έστω $0 \leq a \leq b$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

   (Υπόδειξη: Γράψτε $b = \sqrt[n]{b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2b^n} = b\sqrt[n]{2}$.)

Α. Ο αριθμός e.

1. Βρείτε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+3}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n+2}\Big)^{3n+5},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{n}\ ^{(*)}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{n}\ ^{(*)}, \quad \lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{2}{n}\Big)^{n}\ ^{(*)}.$$

(Υπόδειξη: Για το τέταρτο όριο γράψτε $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}$ και για το πέμπτο $1 + \frac{2}{n} = \frac{n+2}{n} = \frac{n+1}{n}\frac{n+2}{n+1} = \big(1+\frac{1}{n}\big)\big(1+\frac{1}{n+1}\big)$.)

2. (*) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\big(1+\frac{1}{n}\big)^{n^2} = +\infty$.

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ότι $(1+\frac{1}{n})^n \geq (1+\frac{1}{1})^1 = 2$ για κάθε n.)

Β. Ακολουθίες οριζόμενες με αναδρομικό τύπο.

1. Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{{x_n}^2}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα και βρείτε το όριό της.

   (Υπόδειξη: Η μονοτονία είναι προφανής. Να διακρίνετε περιπτώσεις ως προς την πιθανή τιμή του ορίου.)

2. Έστω $7x_{n+1} = {x_n}^3 + 6$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

   (Υπόδειξη: Προσπαθώντας να αποδείξετε τη μονοτονία της (x_n), θα δείτε ότι οι όροι της πρέπει να ανήκουν σε συγκεκριμένα διαστήματα. Διακρίνοντας περιπτώσεις ως προς τη θέση του x_1 σε σχέση με αυτά τα διαστήματα, προσδιορίστε με την αρχή της επαγωγής τη θέση όλων των όρων της ακολουθίας σε σχέση με αυτά. Κατόπιν αποδείξτε τη μονοτονία της ακολουθίας.)

3. Έστω $4x_{n+1} = {x_n}^2 + 3$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

4. Έστω $0 < x_1 < 1$ και $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και βρείτε το όριό της.

5. Έστω $\lambda > 0$, $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \sqrt{\lambda + x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

6. Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι, ανάλογα με την τιμή του x_1, η (x_n) είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

7. Έστω $a, x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big)$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι, *από τον δεύτερο όρο και πέρα*, φθίνουσα και κάτω φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

   Να προτείνετε απόδειξη της ύπαρξης τετραγωνικής ρίζας θετικού αριθμού a, δηλαδή απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 στην περίπτωση $n = 2$.

8. Έστω $x_1 = x_2 = 1$ και $\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_n}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και υπολογίστε το όριό της.

9. Έστω ακολουθίες (x_n) και (y_n) με τις ιδιότητες:

$$0 < x_1 \leq y_1\,, \qquad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}\,, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad (n \geq 1).$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι οι (x_n) και (y_n) συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο.

10. Έστω ακολουθίες (x_n) και (y_n) με τις ιδιότητες:

$$0 < x_1 \leq y_1 \,, \qquad x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \,, \quad y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \quad (n \geq 1).$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) είναι αύξουσα, ότι η (y_n) είναι φθίνουσα και ότι $x_n \leq y_n$ για κάθε n.

Αποδείξτε ότι οι (x_n) και (y_n) συγκλίνουν και ότι έχουν το ίδιο όριο.

Κεφάλαιο 3

Συναρτήσεις.

Η έννοια της συνάρτησης. Πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών. Πλειότιμη συνάρτηση. Μονότονες συναρτήσεις και φραγμένες συναρτήσεις. Γράφημα συνάρτησης και απλές τεχνικές σχεδίασης γραφημάτων. Συνεχές γράφημα. Αντίστροφη συνάρτηση. Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις. Αλγεβρικές συναρτήσεις. Δυνάμεις. Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση. Τριγωνομετρικές και αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Υπερβολικές και αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

3.1 Φυσικά και γεωμετρικά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) Όταν συμπιέζουμε ή αποσυμπιέζουμε ένα αέριο, διατηρώντας τη θερμοκρασία του σταθερή, τότε η πίεση p του αερίου και ο όγκος του V συνδέονται με τη σχέση

$$pV = c\,,$$

όπου c είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός που εξαρτάται από τη θερμοκρασία του αερίου. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται με πειραματική παρατήρηση, ονομάζεται *νόμος του Boyle* και δε μας λέει τίποτε για τις ποσότητες p και V καθεαυτές. Όμως, από κάθε τιμή της p καθορίζεται μια μοναδική τιμή του V και, αντιστρόφως, από κάθε τιμή του V καθορίζεται μια μοναδική τιμή της p:

$$V = \frac{c}{p}\,, \qquad p = \frac{c}{V}\,.$$

Στην πρώτη περίπτωση λέμε «ο V είναι **συνάρτηση** της p» και στη δεύτερη περίπτωση «η p είναι συνάρτηση του V». Στην πρώτη περίπτωση η p είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή**, δηλαδή η μεταβλητή ποσότητα που με αυθαίρετο τρόπο παίρνει τιμές από κάποιο διάστημα (ή κάποια διαστήματα) της πραγματικής ευθείας, ενώ ο V είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**, δηλαδή η μεταβλητή ποσότητα της οποίας οι τιμές καθορίζονται μονοσήμαντα και με συγκεκριμένο τρόπο από τις αντίστοιχες τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής. Στη δεύτερη περίπτωση οι δυο μεταβλητές αλλάζουν ρόλους.

(2) Αν θερμάνουμε ή ψύξουμε μια μεταλλική ράβδο σε θερμοκρασία ϑ^oC, τότε το μήκος της l καθορίζεται προσεγγιστικά με τον πειραματικά επιβεβαιωμένο τύπο

$$l = (1 + \beta\vartheta)l_0,$$

όπου l_0 είναι το μήκος της ράβδου σε θερμοκρασία 0^oC και ο β, ο *συντελεστής διαστολής*, είναι σταθερός αριθμός που εξαρτάται από το υλικό της ράβδου. Οι τιμές του l καθορίζονται μονοσήμαντα από τις τιμές της ϑ, οπότε λέμε ότι το l είναι συνάρτηση της ϑ και ότι η ϑ είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ το l είναι η εξαρτημένη μεταβλητή.

Πάλι μπορούν οι μεταβλητές να αλλάξουν ρόλους και η ϑ να είναι συνάρτηση του l σύμφωνα με τον αντίστροφο τύπο

$$\vartheta = \frac{1}{\beta}\Big(\frac{l}{l_0} - 1\Big).$$

(3) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές β και γ μένουν σταθερές, τότε η πλευρά α και η γωνία Α συνδέονται με τη σχέση

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos \mathrm{A}}\,.$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται *νόμος του συνημιτόνου*. Κάθε τιμή της Α από 0 έως π καθορίζει μια μοναδική τιμή της α από $|\beta - \gamma|$ έως $\beta + \gamma$. Πράγματι, επειδή είναι $-1 \leq \cos \mathrm{A} \leq 1$, συνεπάγεται $\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos \mathrm{A} \leq \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma = (\beta + \gamma)^2$ και $\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos \mathrm{A} \geq \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma = (\beta - \gamma)^2$. Επομένως, $|\beta - \gamma| \leq \alpha \leq \beta + \gamma$.

Και πάλι υπάρχει ο αντίστροφος τύπος

$$\mathrm{A} = \arccos \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}\,.$$

Όμως, εδώ πρέπει να προσέξουμε. Αν η γεωμετρική φύση του παραδείγματος δεν περιόριζε τις τιμές της Α ανάμεσα στους αριθμούς 0 και π, δε θα μπορούσαμε να αντιστρέψουμε τους ρόλους των μεταβλητών Α, α. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι ο τύπος $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos \mathrm{A}}$ καθορίζει μια και μοναδική τιμή της τριγωνομετρικής ποσότητας $\cos \mathrm{A}$ για κάθε τιμή του α από $|\beta - \gamma|$ έως $\beta + \gamma$ μέσω του τύπου

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}\,,$$

διότι από τη διπλή ανισότητα $|\beta - \gamma| \leq \alpha \leq \beta + \gamma$ συνεπάγεται $\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \leq \alpha^2 \leq \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma$ και από αυτήν η $-1 \leq \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \leq 1$. Άρα υπάρχει μοναδική τιμή του Α στο διάστημα $[0, \pi]$ ώστε να είναι $\cos \mathrm{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$. Όμως, ο τύπος αυτός δεν καθορίζει μια και μοναδική τιμή του Α: καθορίζει μια και μοναδική τιμή από 0 έως π αλλά καθορίζει μια ακόμη (και μοναδική) τιμή – την αντίθετη της προηγούμενης – από $-\pi$ έως 0 καθώς και κάθε άλλη τιμή που διαφέρει από οποιαδήποτε από αυτές τις δυο κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

(4) Ήταν γνωστό ήδη από την αρχαιότητα ότι ο λόγος του μήκους ενός κύκλου προς τη διάμετρό του είναι ένας σταθερός (δηλαδή ο ίδιος για κάθε κύκλο) αριθμός που συμβολίζεται με το γράμμα π. Επομένως, το μήκος s ενός κύκλου και η ακτίνα του r συνδέονται με τις σχέσεις

$$s = 2\pi r, \qquad r = \frac{1}{2\pi}\, s.$$

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι το μήκος ενός κύκλου είναι το όριο των μηκών των εγγεγραμμένων σ′ αυτόν κανονικών πολυγώνων με 2^n πλευρές. Είδαμε, επίσης, ότι αν συμβολίσουμε p_n αυτά τα μήκη των πολυγώνων για κύκλο ακτίνας 1, τότε το όριό τους, δηλαδή το μήκος κύκλου ακτίνας 1, ισούται με 2π διότι με το γράμμα π συμβολίζουμε το μισό μήκος του κύκλου ακτίνας 1. Αν, τώρα, θεωρήσουμε οποιονδήποτε κύκλο ακτίνας r και τα αντίστοιχα εγγεγραμμένα σ′ αυτόν κανονικά πολύγωνα με 2^n πλευρές, τότε, λόγω ομοιότητας, τα αντίστοιχα μήκη αυτών των πολυγώνων είναι ίσα με rp_n. Άρα το μήκος του κύκλου ακτίνας r είναι ίσο με $\lim_{n\to+\infty}(rp_n) = r\lim_{n\to+\infty} p_n = r2\pi$.

Άρα το s είναι συνάρτηση της r, οπότε η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η r και η εξαρτημένη είναι το s, και, αντιστρόφως, η r είναι συνάρτηση του s, οπότε η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το s και η εξαρτημένη είναι η r.

(5) Αν A είναι το εμβαδό ενός κύκλου και r είναι η ακτίνα του, τότε το A είναι συνάρτηση της r μέσω του τύπου

$$A = \pi r^2\,.$$

Αν V είναι ο όγκος οποιασδήποτε σφαίρας και r είναι η ακτίνα της, τότε ο V είναι συνάρτηση της r μέσω της σχέσης

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3\,.$$

(6) Ο νόμος διάσπασης μιας ραδιενεργού ουσίας είναι ο εξής: «κάθε χρονική στιγμή t η ταχύτητα διάσπασης μιας ραδιενεργού ουσίας είναι ανάλογη (με κάποια σταθερά αναλογίας k που εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ουσία) της ποσότητας q της ουσίας η οποία έχει απομείνει μέχρι εκείνη την στιγμή». Βάσει αυτού του νόμου αποδεικνύεται ο μαθηματικός τύπος που συνδέει τις ποσότητες q και t:

$$q = e^{-kt}q_0\,,$$

όπου q_0 είναι η ποσότητα της ουσίας κατά την αρχική χρονική στιγμή 0. Θα δούμε την απόδειξη αυτού του τύπου αργότερα, στο Κεφάλαιο 8. Έτσι κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να προσδιορίσουμε την εναπομένουσα ποσότητα και, επομένως, λέμε ότι η μεταβλητή q – η εξαρτημένη μεταβλητή – είναι συνάρτηση της μεταβλητής t – της ανεξάρτητης μεταβλητής. Ο αντίστροφος τύπος είναι ο

$$t = \frac{1}{k}\log\frac{q_0}{q}\,,$$

όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η q και η εξαρτημένη είναι ο χρόνος t.

3.2 Συνάρτηση, πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών.

Αν μια μεταβλητή ποσότητα x παίρνει με αυθαίρετο τρόπο τιμές μέσα από κάποιο σύνολο – συνήθως τα στοιχεία αυτού του συνόλου, οι τιμές της x, είναι αριθμοί – και υπάρχει ένας *συγκεκριμένος κανόνας* – συνήθως ένας *μαθηματικός τύπος* – που για **κάθε** τιμή της x καθορίζει **μια μοναδική** τιμή μιας άλλης μεταβλητής ποσότητας y μέσα από κάποιο άλλο σύνολο – συνήθως τα στοιχεία και αυτού του δεύτερου συνόλου, οι τιμές της y, είναι αριθμοί – τότε λέμε ότι **η μεταβλητή** y **είναι συνάρτηση της μεταβλητής** x και συμβολίζουμε

$$y = f(x) \qquad \text{ή} \qquad y = F(x) \qquad \text{ή} \qquad y = g(x)$$

ή με οποιαδήποτε άλλη παρόμοια έκφραση. Το σύμβολο f ή οποιοδήποτε παρόμοιο με αυτό χρησιμοποιείται στη θέση της λέξης *συνάρτηση* και λέμε, επίσης, **η συνάρτηση** f **με τύπο** ή **κανόνα** $y = f(x)$. Λέμε ακόμη ότι η x είναι η **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η y είναι η **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Η γενική έκφραση $y = f(x)$ ή οποιαδήποτε παρόμοια με αυτήν χρησιμοποιείται, ειδικά, αν δε γνωρίζουμε τον συγκεκριμένο τύπο ή κανόνα που καθορίζει τις τιμές της y από τις τιμές της x. Μερικές φορές γνωρίζουμε τον τύπο αλλά προτιμάμε να συντομεύουμε, κάνοντας χρήση των απλούστερων συμβόλων.

Παράδειγμα: Ο συγκεκριμένος τύπος

$$y = x^3 + \sin(e^{2x} + \log_2(x+3))$$

καθορίζει την y ως συνάρτηση της x, αλλά για να μην επαναλαμβάνουμε αυτόν τον κουραστικό τύπο προτιμάμε να συμφωνήσουμε ότι θα γράφουμε

$$f(x) \quad \text{αντί} \quad x^3 + \sin(e^{2x} + \log_2(x+3)),$$

οπότε μιλάμε για τη *συνάρτηση* f με *τύπο*

$$y = f(x)$$

που, φυσικά, δεν είναι άλλος από τον $y = x^3 + \sin(e^{2x} + \log_2(x+3))$.

Πολλές φορές, χάριν συντομίας, αντί «η συνάρτηση f με τύπο $y = f(x)$» λέμε «η συνάρτηση $y = f(x)$». Ακριβώς αυτό θα κάνουμε σ' αυτές τις σημειώσεις.

Τα πιο συνηθισμένα σύμβολα είναι το x για την ανεξάρτητη μεταβλητή και το y για την εξαρτημένη μεταβλητή. Δεν είναι, όμως, τα αποκλειστικά σύμβολα. Εξ άλλου στα παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας οι μεταβλητές έχουν άλλα σύμβολα αλλά και, όπως επισημάναμε, η ανεξάρτητη και η εξαρτημένη μεταβλητή μπορεί να αλλάξουν ρόλους. Οποιαδήποτε σύμβολα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμη και για την ίδια συνάρτηση: $u = f(v)$, $t = f(x)$, $y = f(t)$ κλπ.

Το σύνολο των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και το σύνολο των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής ονομάζεται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης.

Συνήθως οι τιμές της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής είναι αριθμοί χωρίς, όμως, αυτό να είναι αποκλειστικό.

Παράδειγμα: Θεωρούμε τους κατοίκους μιας πόλης και μετράμε το ύψος κάθε κατοίκου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Επειδή κάθε κάτοικος έχει ένα μοναδικό ύψος, μπορούμε να πούμε ότι το ύψος είναι συνάρτηση του κατοίκου της πόλης. Η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει τιμές από το σύνολο των κατοίκων – το πεδίο ορισμού – και η εξαρτημένη μεταβλητή παίρνει τιμές από το σύνολο των υψών (δηλαδή σύνολο αριθμών) όλων αυτών των κατοίκων – το σύνολο τιμών.

Στα πλαίσια του Απειροστικού Λογισμού εξετάζουμε συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών είναι σύνολα αριθμών. Τα πιο συνηθισμένα τέτοια σύνολα είναι διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων.

Υπάρχουν δυο τρόποι καθορισμού του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης: ο μαθηματικός και ο φυσικός.

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε τον τύπο $V = \frac{c}{p}$ στο πρώτο μας παράδειγμα. Η p μπορεί να πάρει μόνο θετικές τιμές, οπότε το πεδίο ορισμού της συγκεκριμένης συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$. Στα πλαίσια κάποιου συγκεκριμένου πειράματος ίσως η πίεση να μη μπορεί να πάρει κάποιες θετικές τιμές, οπότε το πεδίο ορισμού θα πρέπει να περιοριστεί αναλόγως σε κάποιο μικρότερο διάστημα.

Αν, όμως, δούμε τον τύπο $V = \frac{c}{p}$ ανεξάρτητα από το φυσικό του περιεχόμενο και, ειδικά, αν τον γράψουμε $y = \frac{c}{x}$, αποφεύγοντας τα σύμβολα που παραπέμπουν στις φυσικές έννοιες της πίεσης και του όγκου, τότε ο 0 είναι η μοναδική τιμή που δε μπορεί να πάρει η ανεξάρτητη μεταβλητή (p ή x), οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Γενικότερα, αν δεν προκαθορίζεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης – ίσως από τη φυσική σημασία της – τότε *θεωρούμε ως πεδίο ορισμού της το μεγαλύτερο σύνολο που είναι συμβατό με τον κανόνα που καθορίζει την εξαρτημένη μεταβλητή ως συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής.*

Για παράδειγμα, για τη συνάρτηση με τύπο $y = \frac{c}{x}$, αν δεν αναφέρεται ότι η x συμβολίζει πίεση αερίου ή αν δεν προκαθορίζεται – για οποιοδήποτε λόγο – κάποιο σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η x, θα θεωρούμε πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Ας δούμε τώρα πώς καθορίζεται το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης. Έστω η συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και με γνωστό πεδίο ορισμού. Όπως είπαμε προηγουμένως, συνήθως μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με απλή παρατήρηση του τύπου της. Το ότι ένα στοιχείο b ανήκει στο σύνολο τιμών είναι ισοδύναμο με το ότι υπάρχει κάποιο (τουλάχιστον ένα) στοιχείο a στο πεδίο ορισμού ώστε να είναι $f(a) = b$. Με άλλα λόγια,

Στο σύνολο τιμών της $y = f(x)$ ανήκουν ακριβώς εκείνες οι τιμές της μεταβλητής y για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x έχει μια τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού.

Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση με τύπο $y = 3x - 1$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και θα βρούμε το σύνολο τιμών της.

Θεωρούμε την $3x - 1 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και θα βρούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση αυτή έχει μια τουλάχιστον λύση. Για κάθε y μπορούμε εύκολα να λύσουμε την εξίσωση βρίσκοντας ως λύση $x = \frac{y+1}{3}$. Άρα κάθε y ανήκει στο σύνολο τιμών, οπότε το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Όπως έχουμε πει, μερικές φορές προκαθορίζεται το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης και είναι μικρότερο από αυτό που υπαγορεύει ο τύπος της. Επίσης, μερικές φορές μας ενδιαφέρει να βρούμε το σύνολο των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής που αντιστοιχούν σε τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής από κάποιο *υποσύνολο* του πεδίου ορισμού. Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει να βρούμε **το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί σε κάποιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού** της συνάρτησης.

Παραδείγματα: (1) Έστω πάλι η $y = 3x - 1$. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και θα βρούμε το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο υποδιάστημα $[-2, 5)$ του $(-\infty, +\infty)$.

Θεωρούμε την $3x - 1 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και θα βρούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση αυτή έχει μια τουλάχιστον λύση στο $[-2, 5)$. Λύνουμε όπως πριν την εξίσωση βρίσκοντας ως λύση $x = \frac{y+1}{3}$ και πρέπει να ελέγξουμε για ποιες τιμές του y η λύση ανήκει στο $[-2, 5)$, δηλαδή $-2 \leq \frac{y+1}{3} < 5$ ή, ισοδύναμα, $-7 \leq y < 14$. Άρα ακριβώς οι y στο διάστημα $[-7, 14)$ ανήκουν στο σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[-2, 5)$ και, επομένως, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[-2, 5)$ είναι το $[-7, 14)$.

(2) Έστω η $y = \frac{x}{x-1}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Θεωρούμε την $\frac{x}{x-1} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και θα δούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση αυτή έχει μια τουλάχιστον λύση. Η $\frac{x}{x-1} = y$ ισοδυναμεί με την $(y - 1)x = y$, οπότε, αν $y = 1$, η εξίσωση δεν έχει καμιά λύση και, αν $y \neq 1$, η εξίσωση έχει τη λύση $x = \frac{y}{y-1}$. *Πρέπει, επίσης, να ελέγξουμε αν αυτή η λύση ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης*, δηλαδή αν $\frac{y}{y-1} \neq 1$. Αυτό, όμως, ισχύει διότι είναι $y \neq y - 1$.

Άρα ακριβώς οι $y \neq 1$ ανήκουν στο σύνολο τιμών και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ας δούμε, επίσης, ποια είναι τα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$ του πεδίου ορισμού.

Για το $(1, +\infty)$ θεωρούμε την $\frac{x}{x-1} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και θα δούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση αυτή έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, +\infty)$. Όπως πριν, αφού αποκλείσουμε την τιμή $y = 1$, βρίσκουμε τη λύση $x = \frac{y}{y-1}$ και πρέπει να ελέγξουμε αν αυτή ανήκει στο $(1, +\infty)$, δηλαδή αν $\frac{y}{y-1} > 1$. Αυτό ισοδυναμεί με $\frac{1}{y-1} > 0$ κι αυτό με $y > 1$. Άρα ακριβώς οι $y > 1$ ανήκουν στο σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(1, +\infty)$ και, επομένως, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(1, +\infty)$ είναι το $(1, +\infty)$.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 1)$ είναι το $(-\infty, 1)$.

(3) Έστω η $y = e^{-2x}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.

Θα βρούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση $e^{-2x} = y$ με άγνωστο x έχει μια τουλάχιστον λύση. Παρατηρούμε ότι για κανένα $y \leq 0$ η $e^{-2x} = y$ δεν έχει λύση ενώ για κάθε $y > 0$ έχει τη λύση $x = -\frac{1}{2}\log y$. Άρα ακριβώς οι $y > 0$ ανήκουν στο σύνολο τιμών, οπότε το σύνολο τιμών είναι το $(0, +\infty)$.

(4) Έστω η $y = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$. Το πεδίο ορισμού της αποτελείται από τις τιμές του x για τις οποίες είναι $1 + \frac{1}{x} \geq 0$ ή, ισοδύναμα, $x \leq -1$ ή $x > 0$. Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $(-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

Θα βρούμε για ποιες τιμές του y η $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = y$ με άγνωστο x έχει μια τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού. Προφανώς, η $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = y$ δεν έχει λύση, αν $y < 0$. Αν $y \geq 0$, η $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = y$ ισοδυναμεί με την $(y^2 - 1)x = 1$. Αν $y = 1$, η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση και, αν $y \geq 0$ και $y \neq 1$, έχει τη λύση $x = \frac{1}{y^2-1}$. Πρέπει τώρα να ελέγξουμε αν η λύση ανήκει στο πεδίο ορισμού, δηλαδή αν $\frac{1}{y^2-1} \leq -1$ ή $\frac{1}{y^2-1} > 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτό ισχύει, οπότε ακριβώς οι $y \geq 0$, $y \neq 1$ ανήκουν στο σύνολο τιμών της συνάρτησης. Δηλαδή, το σύνολο τιμών είναι το $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Ας δούμε ποιο είναι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο διάστημα $(0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού. Πρέπει να βρούμε τους y για τους οποίους η $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = y$ με άγνωστο x έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0, +\infty)$. Όπως πριν, αφού αποκλείσουμε τους $y < 0$ και $y = 1$, βρίσκουμε τη λύση $x = \frac{1}{y^2-1}$ και πρέπει να ελέγξουμε αν αυτή ανήκει στο $(0, +\infty)$, δηλαδή αν $\frac{1}{y^2-1} > 0$. Αυτό ισοδυναμεί με $y^2 > 1$, το οποίο ισχύει για κάθε $y > 1$. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι το $(1, +\infty)$.

Ομοίως, δηλαδή βρίσκοντας τους y για τους οποίους η $\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = y$ με άγνωστο x έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-\infty, -1]$, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, -1]$ είναι το $[0, 1)$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = \frac{2}{3}x - 4, \quad y = x^2 - 4x + 3, \quad y = \frac{2x-1}{x+4}, \quad y = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad y = \frac{x^2+1}{x^2-1},$$

$$y = 2^x, \quad y = \log_{10} x + 4, \quad y = e^{2x} - 2e^x + 3, \quad y = \frac{e^x+1}{e^x-1} \quad y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}.$$

2. Θεωρήστε τις παρακάτω συναρτήσεις και τα διάφορα υποδιαστήματα του πεδίου ορισμού τους και βρείτε τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

   (i) $y = x^2 - 4x + 3$ και $(-\infty, 1]$, $(1, 3]$, $(3, +\infty)$, $(-\infty, 2]$, $[2, +\infty)$.

   (ii) $y = \frac{2x-1}{x+4}$ και $(-\infty, -4)$, $(-4, +\infty)$.

   (iii) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ και $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

(*iv*) $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
(*v*) $y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$ και $[0, 1)$, $(1, +\infty)$.

3.3 Αναλυτικές εκφράσεις.

Πολλές φορές ο κανόνας που συσχετίζει την εξαρτημένη μεταβλητή y και την ανεξάρτητη μεταβλητή x μιας συνάρτησης καθορίζεται με μια **αναλυτική έκφραση**. Δείτε, για παράδειγμα, τέσσερις αναλυτικές εκφράσεις:

$$y = x^2\,, \qquad y = \sin x, \qquad xy = 2, \qquad y^2 - x^3 = 0.$$

Με τις δυο πρώτες αναλυτικές εκφράσεις οι τιμές της y υπολογίζονται άμεσα από τις τιμές της x· ο μαθηματικός τύπος που καθορίζει την y από την x ταυτίζεται με την αναλυτική έκφραση. Με την τρίτη αναλυτική έκφραση οι τιμές της y υπολογίζονται έμμεσα από τις τιμές της x· θεωρούμε την έκφραση $xy = 2$ ως εξίσωση με άγνωστο y και λύνουμε ως προς y για να βρούμε τον τύπο που καθορίζει την y από την x. Αυτό γίνεται εύκολα· ο μαθηματικός τύπος που ορίζει την y από την x είναι ο

$$y = \frac{2}{x}\,.$$

Με την τέταρτη αναλυτική έκφραση οι τιμές της y υπολογίζονται και πάλι έμμεσα από τις τιμές της x. Όμως, τώρα η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη. Λύνοντας την εξίσωση $y^2 - x^3 = 0$ με άγνωστο y, βρίσκουμε εν γένει δυο διαφορετικές λύσεις. Οι $x < 0$ δεν προσδιορίζουν καμιά τιμή της y. Ο $x = 0$ προσδιορίζει ακριβώς μια τιμή της y, την $y = 0$. Κάθε $x > 0$ προσδιορίζει δυο διαφορετικές τιμές της y και όχι μόνο μία: την $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ και την $y = -\sqrt{x^3} = -x^{\frac{3}{2}}$. Μπορούμε να πούμε ότι η αναλυτική έκφραση $y^2 - x^3 = 0$ δεν καθορίζει μια συνάρτηση αλλά δυο συναρτήσεις, τις

$$y = x^{\frac{3}{2}}\,, \qquad y = -x^{\frac{3}{2}}$$

με κοινό πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

Μερικές φορές χρησιμοποιούνται οι όροι **πλειότιμη συνάρτηση** και **μονότιμη συνάρτηση**. Ο όρος *μονότιμη συνάρτηση* ταυτίζεται με τον όρο *συνάρτηση*, όπως τον έχουμε περιγράψει: από κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής καθορίζεται *μια μοναδική* τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Ο όρος *πλειότιμη συνάρτηση* σημαίνει: από κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής καθορίζεται *τουλάχιστον μια* τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Άρα η αναλυτική έκφραση $y^2 - x^3 = 0$ καθορίζει είτε δυο (μονότιμες) συναρτήσεις, αυτές που περιγράψαμε πιο πριν, είτε μια πλειότιμη συνάρτηση με τύπο

$$y = \pm x^{\frac{3}{2}}\,.$$

Ασκήσεις.

1. Μελετήστε τις παρακάτω αναλυτικές εκφράσεις. Ποιες ορίζουν μια μόνο συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y; Ποιες

ορίζουν τουλάχιστον δυο συναρτήσεις – και πόσες ακριβώς; – ή μια πλειότιμη συνάρτηση; Βρείτε σε κάθε περίπτωση τα πεδία ορισμού των οριζόμενων συναρτήσεων.

$$x+y=1, \quad x^2-2yx+1=0, \quad \frac{y-x}{y+x}=-2, \quad x^3+y^3=0, \quad x^2-y^2=0,$$

$$(xy)^2=1, \quad e^{(x-1)y^2}=x, \quad y^4-2xy^2+x^2=1, \quad \sin(x+y)=1.$$

3.4 Γράφημα συνάρτησης.

Πολύ μεγάλη βοήθεια στην κατανόηση των ιδιοτήτων μιας συνάρτησης $y=f(x)$, της οποίας το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών είναι σύνολα αριθμών, προσφέρει η *γραφική παράστασή* της ή *γράφημά* της.

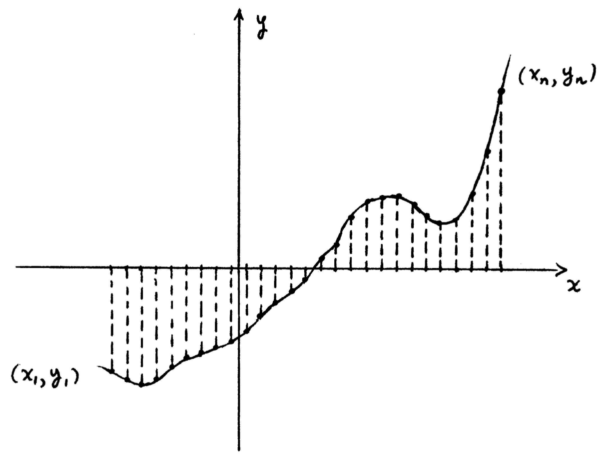
Ζωγραφίζουμε δυο κάθετες μεταξύ τους πραγματικές ευθείες στο ίδιο επίπεδο, μια οριζόντια και μια κατακόρυφη, ώστε το σημείο τομής τους να αναπαριστά τον 0 και στις δυο ευθείες. Στην οριζόντια πραγματική ευθεία τοποθετούμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ και στην κατακόρυφη τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y που ανήκουν στο σύνολο τιμών (οι θετικές τιμές της x προς τα δεξιά και οι θετικές τιμές της y προς τα πάνω). Την οριζόντια ευθεία την ονομάζουμε **x-άξονα** και την κατακόρυφη **y-άξονα**. Κατόπιν, για κάθε τιμή της x από το πεδίο ορισμού βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή $y=f(x)$ από το σύνολο τιμών και σχεδιάζουμε το σημείο $(x,y)=(x,f(x))$. Φυσικά, αυτό γίνεται σχεδιάζοντας την κατακόρυφη ευθεία από το σημείο x και την οριζόντια ευθεία από το σημείο $y=f(x)$, οπότε το $(x,y)=(x,f(x))$ είναι το σημείο τομής τους. Όλα αυτά τα σημεία $(x,y)=(x,f(x))$ σχηματίζουν τη **γραφική παράσταση** ή **γράφημα** της συνάρτησης. Δηλαδή

$$\text{γράφημα της } f=\{(x,f(x)) : x \text{ στο πεδίο ορισμού της } f\}.$$

Συνήθως, το γράφημα μιας συνάρτησης εμφανίζεται ως μια ένωση καμπυλών.

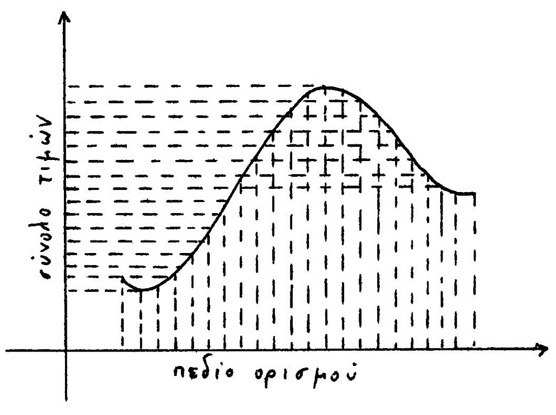
Πρακτικά είναι αδύνατο να επαναλάβουμε τη διαδικασία αυτή για όλες τις τιμές της x, ειδικά αν αυτές είναι άπειρες, όπως στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού περιέχει ένα ολόκληρο διάστημα. Φροντίζουμε να σχεδιάσουμε σημεία $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, ..., $(x_n,f(x_n))$ για όσο το δυνατό μεγαλύτερο πλήθος n τιμών της x οι οποίες κατανέμονται όσο το δυνατό πυκνότερα στο πεδίο ορισμού. Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, από αυτά τα σημεία που θα ζωγραφίσουμε μπορούμε να μαντέψουμε όλα τα ενδιάμεσα σημεία που λείπουν και να ζωγραφίσουμε με καλή προσέγγιση το γράφημα της συνάρτησης.

Αν γνωρίζουμε το γράφημα της $y=f(x)$, μπορούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να ακολουθήσουμε την αντίστροφη διαδικασία απ΄ αυτήν με την οποία σχεδιάζουμε το γράφημα της $y=f(x)$. Από κάθε σημείο $(x,f(x))$ του γραφήματος φέρνουμε μια κατακόρυφη και μια οριζόντια ευθεία. Η κατακόρυφη ευθεία τέμνει τον x-άξονα στο σημείο x του πεδίου ορισμού και η οριζόντια ευθεία τέμνει τον y-άξονα στο σημείο $y=f(x)$ του συνόλου τιμών. Επομένως,



Σχήμα 3.1: Προσεγγιστική σχεδίαση γραφήματος.

Το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ είναι η κατακόρυφη προβολή του γραφήματός της πάνω στον x-άξονα και το σύνολο τιμών της είναι η οριζόντια προβολή του γραφήματος πάνω στον y-άξονα.



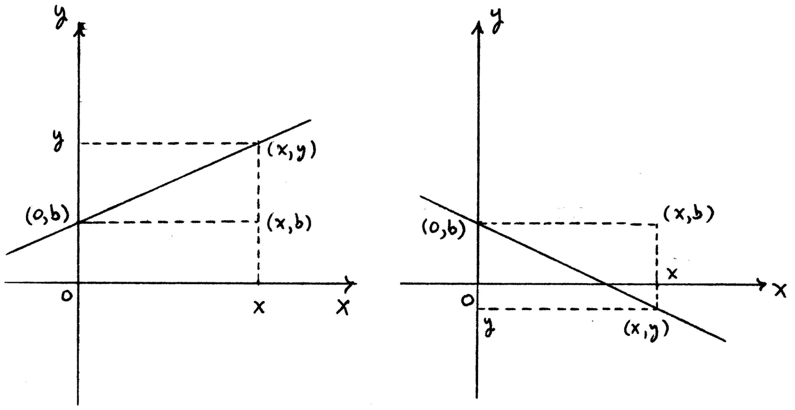
Σχήμα 3.2: Πεδίο ορισμού – σύνολο τιμών.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$\boxed{y = ax + b,}$$

όπου a, b είναι σταθεροί αριθμοί, έχει ως πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.

Ένα από τα σημεία του γραφήματος είναι το $(0,b)$. Για κάθε σημείο (x,y) του γραφήματος είναι $y = ax + b$ και, επομένως, $y - b = a(x - 0)$. Άρα η κλίση του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $(0,b)$ και (x,y) είναι ίση με $\frac{y-b}{x-0} = a$. Επομένως, κάθε σημείο (x,y) του γραφήματος ανήκει στην **ευθεία** l που περιέχει το σημείο $(0,b)$ και έχει κλίση a. Το αντίστροφο είναι τώρα προφανές. Για κάθε σημείο (x,y) της ευθείας l η κλίση $\frac{y-b}{x-0}$ του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $(0,b)$ και (x,y) είναι ίση με a, οπότε είναι $\frac{y-b}{x-0} = a$, δηλαδή $y = ax + b$ και, επομένως, το σημείο (x,y) ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το γράφημα της συνάρτησης ταυτίζεται με την ευθεία l.



Σχήμα 3.3: Το γράφημα της $y = ax + b$. Οι περιπτώσεις: $a > 0$ και $a < 0$.

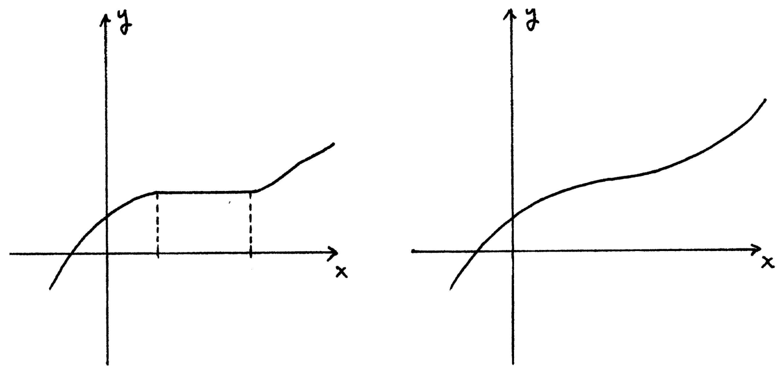
Αν $a > 0$, η κλίση της l είναι θετική και η l έχει κατεύθυνση από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω ενώ, αν $a < 0$, η κλίση της l είναι αρνητική και η l έχει κατεύθυνση από τα αριστερά και πάνω προς τα δεξιά και κάτω. Αν $a = 0$, η κλίση της l είναι μηδενική και η l είναι οριζόντια. Στις δυο πρώτες περιπτώσεις (δηλαδή, αν $a \neq 0$) η οριζόντια προβολή της l στον y-άξονα είναι ολόκληρος ο y-άξονας, οπότε το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$. (Αυτό αποδεικνύεται και με μαθηματικό τρόπο, όπως στο παράδειγμα $y = 3x - 1$ της ενότητας 3.2.) Στην τρίτη περίπτωση (δηλαδή, αν $a = 0$) η l είναι οριζόντια, οπότε η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι μόνο το σημείο b, οπότε το σύνολο τιμών είναι το $\{b\}$.

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **αύξουσα** σε ένα διάστημα I του πεδίου ορισμού της αν για κάθε x_1, x_2 στο I η ανισότητα $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) \leq f(x_2)$. Αν η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) < f(x_2)$, τότε η συνάρτηση χαρακτηρίζεται **γνησίως αύξουσα** στο I.

Ομοίως, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **φθίνουσα** σε ένα διάστημα I του πεδίου ορισμού της αν για κάθε x_1, x_2 στο I η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) \geq f(x_2)$. Αν η $x_1 < x_2$ συνεπάγεται την $f(x_1) > f(x_2)$, τότε η συνάρτηση χαρακτηρίζεται **γνησίως φθίνουσα** στο I.

Μια συνάρτηση χαρακτηρίζεται **μονότονη** σε ένα διάστημα αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα αυτό και χαρακτηρίζεται **γνησίως μονότονη** αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο διάστημα.

Το γράφημα μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω. Ενώ το γράφημα μιας αύξουσας συνάρτησης ανεβαίνει αλλά μπορεί και να μένει οριζόντιο σε υποδιαστήματα. Αντιθέτως, το γράφημα μιας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης κατεβαίνει από τα αριστερά και πάνω προς τα δεξιά και κάτω ενώ το γράφημα μιας φθίνουσας συνάρτησης κατεβαίνει αλλά μπορεί και να μένει οριζόντιο σε υποδιαστήματα.



Σχήμα 3.4: Γραφήματα αύξουσας και γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

Είναι φανερό ότι η εξαρτημένη μεταβλητή y μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $y = f(x)$ δε μπορεί να έχει την ίδια τιμή για διαφορετικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x (στο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη). Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο τον x έχει για κάθε τιμή του y *το πολύ μια* λύση (στο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη).

Παράδειγμα: Η $y = ax+b$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, αν $a > 0$, και γνησίως φθίνουσα, αν $a < 0$. Αν $a = 0$, η συνάρτηση είναι **σταθερή** στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή για κάθε τιμή της x στο διάστημα αυτό η y έχει την ίδια τιμή b.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **άνω φραγμένη** σε κάποιο υποσύνολο A του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει αριθμός u ώστε να είναι $f(x) \leq u$ για κάθε x στο A. Ένας τέτοιος αριθμός u χαρακτηρίζεται **άνω φράγμα** της συνάρτησης στο σύνολο A. Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **κάτω φραγμένη** στο υποσύνολο A του πεδίου ορισμού της αν υπάρχει αριθμός l ώστε να είναι $f(x) \geq l$ για κάθε x στο A και ένας τέτοιος l χαρακτηρίζεται **κάτω φράγμα** της συνάρτησης στο A. Τέλος, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **φραγμένη** στο υποσύνολο A του πεδίου ορισμού της αν είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη στο A, δηλαδή αν υπάρχουν u και l ώστε να είναι $l \leq f(x) \leq u$ για κάθε x στο A.

Αν ο u είναι άνω φράγμα της $y = f(x)$ στο σύνολο A, τότε κάθε $u' \geq u$ είναι κι αυτός άνω φράγμα της συνάρτησης στο A. Ομοίως, αν ο l είναι κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο σύνολο A, τότε κάθε $l' \leq l$ είναι κι αυτός κάτω φράγμα της συνάρτησης στο A.

Το ότι ο u είναι άνω φράγμα της $y = f(x)$ στο σύνολο A σημαίνει ότι το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο σύνολο A δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από την οριζόντια ευθεία $y = u$. Ομοίως, το ότι ο l είναι κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο σύνολο A σημαίνει ότι το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο σύνολο A δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από την οριζόντια ευθεία $y = l$. Αν, λοιπόν, οι u και l είναι άνω φράγμα και κάτω φράγμα, αντιστοίχως, της $y = f(x)$ στο σύνολο A, τότε το μέρος του γραφήματος της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο A είναι υποσύνολο της οριζόντιας ζώνης που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = u$ και $y = l$.

Μπορούμε, επίσης, να πούμε ότι ο u είναι άνω φράγμα της $y = f(x)$ στο σύνολο A αν και μόνο αν το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο A είναι υποσύνολο του διαστήματος $(-\infty, u]$ και ότι ο l είναι κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο σύνολο A αν και μόνο αν το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο A είναι υποσύνολο του $[l, +\infty)$. Ομοίως, οι u και l είναι άνω φράγμα και κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο σύνολο A, αντιστοίχως, αν και μόνο αν το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο A είναι υποσύνολο του $[l, u]$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$\boxed{y = x^2}$$

έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.

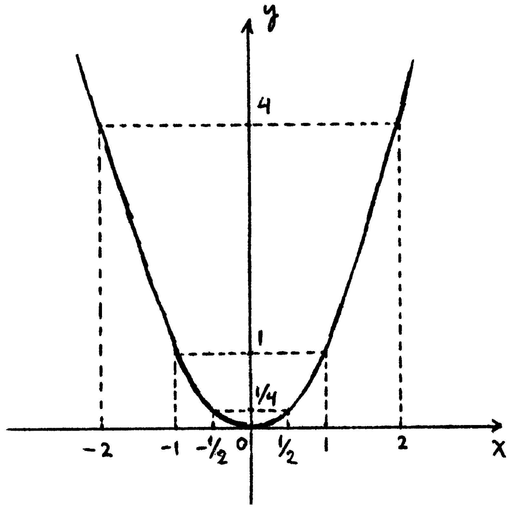
Η $y = x^2$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Ας δούμε ποια είναι τα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν στα διαστήματα μονοτονίας $[0, +\infty)$ και $(-\infty, 0]$ της συνάρτησης.

Θα βρούμε για ποιες τιμές του y η εξίσωση $x^2 = y$ με άγνωστο x έχει μια τουλάχιστον λύση στο $[0, +\infty)$. Όλα είναι γνωστά και απλά: αν $y < 0$, δεν υπάρχει λύση και, αν $y \geq 0$, υπάρχει η λύση $x = \sqrt{y}$ στο $[0, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι το $[0, +\infty)$.

Ομοίως, η εξίσωση $x^2 = y$ με άγνωστο x δεν έχει καμιά λύση, αν $y < 0$, και έχει τη λύση $x = -\sqrt{y}$ στο $(-\infty, 0]$, αν $y \geq 0$. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0]$ είναι το $[0, +\infty)$.

Είναι φανερό ότι η $y = x^2$ είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ και ο 0 είναι κάτω φράγμα της συνάρτησης αφού το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$. Από την άλλη μεριά, η $y = x^2$ δεν είναι άνω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$ ούτε και σε κανένα από τα $(-\infty, 0]$, $[0, +\infty)$, διότι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα είναι το $[0, +\infty)$ και δεν είναι υποσύνολο κανενός διαστήματος $(-\infty, u]$.

Κατόπιν σχεδιάζουμε το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο διάστημα $[0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού. Αυτό είναι μια καμπύλη που αρχίζει από το σημείο $(0, 0)$ και ανεβαίνει από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω και περιέχει τα σημεία $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(1, 1)$, $(2, 4)$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x-άξονα πρέπει να είναι το διάστημα $[0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα πρέπει να είναι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$, δηλαδή το $[0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη ανεβαίνει



Σχήμα 3.5: Το γράφημα της $y = x^2$.

προς **απεριόριστα** δεξιά και πάνω. Με άλλα λόγια, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μεγάλες θετικές, τα ύψη των αντίστοιχων σημείων (x, x^2), δηλαδή οι τιμές της $y = x^2$, γίνονται όσο μεγάλα θετικά θέλουμε.

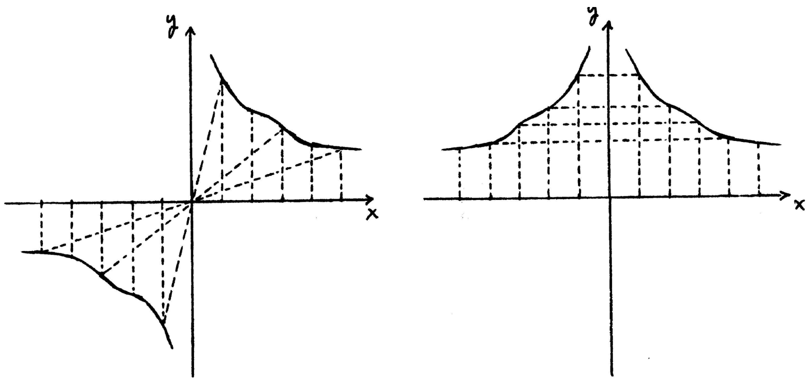
Τέλος, σχεδιάζουμε το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο διάστημα $(-\infty, 0]$ του πεδίου ορισμού. Αυτό είναι καμπύλη που κατεβαίνει από τα αριστερά και πάνω προς τα δεξιά και κάτω, καταλήγει στο σημείο $(0, 0)$ και περιέχει τα σημεία $(0, 0)$, $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης στον x-άξονα είναι το διάστημα $(-\infty, 0]$ του πεδίου ορισμού και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0]$, δηλαδή το $[0, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη κατεβαίνει από **απεριόριστα** αριστερά και πάνω. Με άλλα λόγια, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μεγάλες αρνητικές, τα ύψη των αντίστοιχων σημείων (x, x^2), δηλαδή οι τιμές της $y = x^2$, γίνονται όσο μεγάλα θετικά θέλουμε.

Το γράφημα της $y = x^2$ είναι η γνωστή μας **(τετραγωνική) παραβολή**. Η τετραγωνική παραβολή έχει ένα ακόμη χαρακτηριστικό.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **άρτια** αν ισχύει $f(-x) = f(x)$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Αν το σημείο (a, b) είναι στο γράφημα της συνάρτησης, δηλαδή αν $b = f(a)$, τότε είναι $b = f(-a)$, οπότε και το σημείο $(-a, b)$ ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης. Τα σημεία (a, b) και $(-a, b)$ είναι συμμετρικά ως προς τον y-άξονα. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος μιας άρτιας συνάρτησης, τότε το συμμετρικό του ως προς τον y-άξονα είναι κι αυτό σημείο του γραφήματος. Αυτό σημαίνει ότι

Το γράφημα άρτιας συνάρτησης $y = f(x)$ είναι συμμετρικό ως προς τον

y-άξονα.



Σχήμα 3.6: Γραφήματα περιττής και άρτιας συνάρτησης.

Η συνάρτηση με τύπο $y = x^2$ είναι άρτια, οπότε η τετραγωνική παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον y-άξονα.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$\boxed{y = x^3}$$

έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σ΄ ολόκληρο το διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Το γράφημά της είναι μια καμπύλη που ανεβαίνει από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω και περιέχει τα σημεία $(-2, -8)$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$, $(1, 1)$, $(2, 8)$.

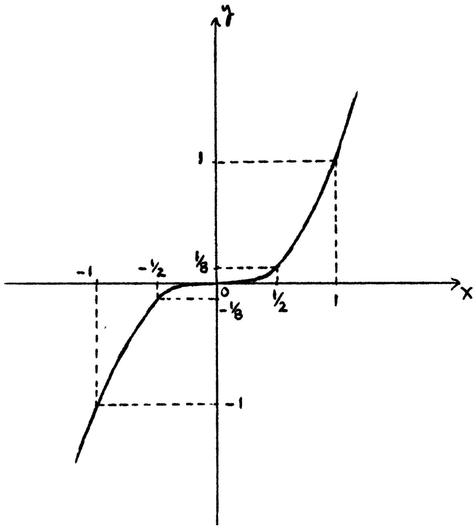
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της $y = x^3$, θεωρώντας την $x^3 = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x. Για κάθε y η εξίσωση έχει λύση, τον $x = \sqrt[3]{y}$, οπότε κάθε y ανήκει στο σύνολο τιμών και, επομένως, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Η $y = x^3$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένη ούτε κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αφού το σύνολο τιμών είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$.

Η κατακόρυφη προβολή του γραφήματος στον x-άξονα είναι ίση με το πεδίο ορισμού, δηλαδή το $(-\infty, +\infty)$, και η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών, δηλαδή το $(-\infty, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα ανεβαίνει από *απεριόριστα* αριστερά και κάτω προς *απεριόριστα* δεξιά και πάνω. Με άλλα λόγια, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μεγάλες αρνητικές, τα ύψη των αντίστοιχων σημείων (x, x^3) γίνονται όσο μεγάλα αρνητικά θέλουμε και, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μεγάλες θετικές, τα ύψη των σημείων (x, x^3) γίνονται όσο μεγάλα θετικά θέλουμε.

Το γράφημα της $y = x^3$ ονομάζεται **κυβική παραβολή**.

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **περιττή** αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x



Σχήμα 3.7: Το γράφημα της $y = x^3$.

στο πεδίο ορισμού της. Αν το σημείο (a, b) ανήκει στο γράφημα της $y = f(x)$, δηλαδή αν $b = f(a)$, τότε είναι $-b = f(-a)$, οπότε και το σημείο $(-a, -b)$ ανήκει στο γράφημα της $y = f(x)$. Τα σημεία (a, b) και $(-a, -b)$ είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(0, 0)$. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο του γραφήματος μιας περιττής συνάρτησης, τότε το συμμετρικό του ως προς το σημείο $(0, 0)$ είναι κι αυτό σημείο του γραφήματος. Άρα

Το γράφημα μιας περιττής συνάρτησης $y = f(x)$ είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Επειδή η συνάρτηση $y = x^3$ είναι περιττή, η κυβική παραβολή είναι συμμετρική ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$\boxed{y = \frac{1}{x}}$$

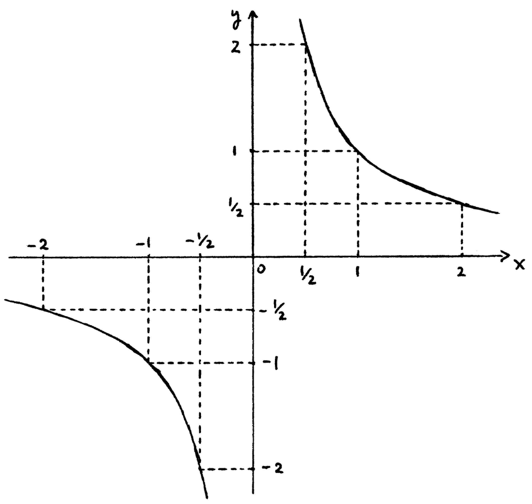
έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Η $y = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα και στα δυο διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$. Θα βρούμε τα σύνολα τιμών που αντιστοιχούν σ' αυτά τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης.

Θεωρούμε την $\frac{1}{x} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x. Αν $y \leq 0$, η εξίσωση δεν έχει λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$ και, αν $y > 0$, έχει τη λύση $x = \frac{1}{y}$ στο $(0, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$.

Ομοίως, η εξίσωση $\frac{1}{x} = y$ με άγνωστο x δεν έχει καμιά λύση στο $(-\infty, 0)$, αν $y \geq 0$, και έχει τη λύση $x = \frac{1}{y}$ στο $(-\infty, 0)$, αν $y < 0$. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι το $(-\infty, 0)$.

Η $y = \frac{1}{x}$ είναι κάτω φραγμένη στο $(0, +\infty)$ με κάτω φράγμα, για παράδειγμα, τον 0 αλλά δεν είναι άνω φραγμένη στο $(0, +\infty)$. Η συνάρτηση είναι άνω φραγμένη στο $(-\infty, 0)$ με άνω φράγμα, για παράδειγμα, τον 0 αλλά δεν είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, 0)$.



Σχήμα 3.8: Το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$.

Σχεδιάζουμε το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο διάστημα $(0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού. Αυτό είναι μια καμπύλη που κατεβαίνει από τα αριστερά και πάνω προς τα δεξιά και κάτω και περιέχει τα σημεία $(\frac{1}{2}, 2)$, $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x-άξονα είναι το διάστημα $(0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$, δηλαδή το $(0, +\infty)$. Άρα, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μικρές θετικές, τα ύψη των αντίστοιχων σημείων $(x, \frac{1}{x})$ (δηλαδή οι τιμές της $y = \frac{1}{x}$) γίνονται όσο μεγάλα θετικά θέλουμε και, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μεγάλες θετικές, τα ύψη των αντίστοιχων σημείων $(x, \frac{1}{x})$ γίνονται όσο μικρά θετικά θέλουμε. Δηλαδή, η καμπύλη κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα.

Τέλος, σχεδιάζουμε το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο διάστημα $(-\infty, 0)$ του πεδίου ορισμού. Αυτό είναι καμπύλη που κατεβαίνει από τα αριστερά και πάνω προς τα δεξιά και κάτω και περιέχει τα σημεία $(-2, -\frac{1}{2})$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$. Η κατακόρυφη προβολή της καμπύλης αυτής στον x-άξονα είναι το διάστημα $(-\infty, 0)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$, δηλαδή το $(-\infty, 0)$. Άρα, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μεγάλες αρνητικές, τα ύψη των αντίστοιχων σημείων $(x, \frac{1}{x})$ γίνονται όσο μικρά αρνητικά θέλουμε και, καθώς οι τιμές της x γίνονται αρκετά μικρές αρνητικές, τα ύψη των αντίστοιχων σημείων $(x, \frac{1}{x})$ γίνονται όσο μεγάλα αρνητικά θέλουμε. Επομένως, η καμπύλη κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα κάτω και κοντά στον y-άξονα.

Το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$ ονομάζεται **υπερβολή** και, όπως είδαμε, αποτελείται από δυο καμπύλες που ονομάζονται **κλάδοι της υπερβολής**.

Η $y = \frac{1}{x}$ είναι περιττή, οπότε η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς το σημείο $(0, 0)$: καθένας από τους δυο κλάδους είναι συμμετρικός του άλλου ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Η υπερβολή έχει κι άλλο ένα χαρακτηριστικό. Αν το σημείο (a, b) ανήκει στην υπερβολή, δηλαδή αν $b = \frac{1}{a}$, τότε $a = \frac{1}{b}$, οπότε και το σημείο (b, a) ανήκει στην υπερβολή. Τα σημεία (a, b) και (b, a) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$, την *κύρια διαγώνιο.* Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο της υπερβολής, τότε το συμμετρικό του ως προς την κύρια διαγώνιο είναι κι αυτό σημείο της υπερβολής. Μπορούμε, επομένως, να πούμε ότι η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς την κύρια διαγώνιο.

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα προηγούμενα παραδείγματα τα γραφήματα των συναρτήσεων είναι **συνεχή**. Αυτό σημαίνει ότι *το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε* ***διάστημα*** *του πεδίου ορισμού της συνάρτησης είναι μια συνεχής, μη διακοπτόμενη καμπύλη.*

Δεν πρέπει να μας παραξενεύει το ότι χαρακτηρίζουμε το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$ συνεχές ενώ αποτελείται από δυο ασύνδετες μεταξύ τους καμπύλες. Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{1}{x}$ αποτελείται από δυο ασύνδετα μεταξύ τους διαστήματα: $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Ο 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Γράψαμε λίγο πριν «... συνεχής, μη διακοπτόμενη καμπύλη». Πρέπει να τονιστεί ότι ο χαρακτηρισμός «καμπύλη» εμπεριέχει τις ιδιότητες *συνεχής* και *μη διακοπτόμενη.* Άρα ο χαρακτηρισμός μιας καμπύλης ως συνεχούς και μη διακοπτόμενης αποτελεί πλεονασμό και τον γράψαμε μόνο για να δώσουμε έμφαση σ' αυτές τις δυο ιδιότητες μιας καμπύλης. Θα δούμε την έννοια της καμπύλης λίγο πιο μεθοδικά – αλλά και συνοπτικά – αργότερα στην ενότητα 6.7.

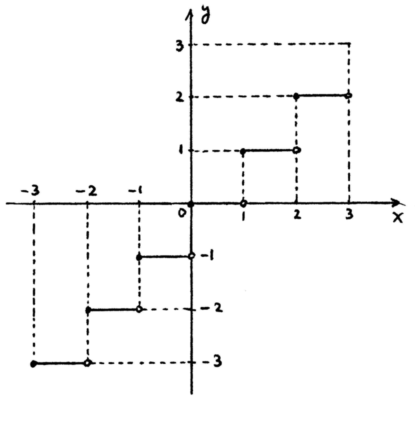
Θα ασχοληθούμε διεξοδικότερα με την έννοια της συνέχειας αργότερα, αλλά ας έχουμε υπ' όψη ότι η συνέχεια του γραφήματος μιας συνάρτησης είναι ουσιαστικό χαρακτηριστικό του και δεν εμφανίζεται πάντοτε. Μερικές συναρτήσεις δεν έχουν συνεχή γραφήματα, τουλάχιστον όχι σε οποιοδήποτε διάστημα του πεδίου ορισμού τους.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση

$$\boxed{y = [x],}$$

το ακέραιο μέρος του x, έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και είναι αύξουσα.

Η $y = [x]$ είναι σταθερή στο διάστημα $[k, k + 1)$, όπου k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος: είναι $y = k$ για κάθε x στο διάστημα $[k, k + 1)$. Άρα το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο διάστημα $[k, k+1)$ είναι ένα οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα που του λείπει το δεξιό άκρο. Επομένως, αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $y = [x]$ σε οποιοδήποτε διάστημα $[k, k+1)$, τότε το γράφημά της είναι συνεχές.



Σχήμα 3.9: Το γράφημα της $y = [x]$.

Όμως, το γράφημα της $y = [x]$ (με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$) *δεν* είναι συνεχές διότι δεν εμφανίζει την εικόνα *μιας* μη διακοπτόμενης καμπύλης αλλά την εικόνα ασύνδετων μεταξύ τους ευθύγραμμων τμημάτων.

Απλές τεχνικές σχεδίασης γραφημάτων.

Α. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε μερικά απλά βήματα που βοηθούν στη σχεδίαση γραφημάτων συναρτήσεων και που τα έχουμε ακολουθήσει στα προηγούμενα παραδείγματα. Σε επόμενα κεφάλαια, και ειδικά στο κεφάλαιο των παραγώγων, θα γνωρίσουμε ισχυρότερα εργαλεία σχεδίασης.

Κατ΄ αρχάς αναγνωρίζουμε το πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και το χωρίζουμε, αν αυτό είναι δυνατό, σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης.

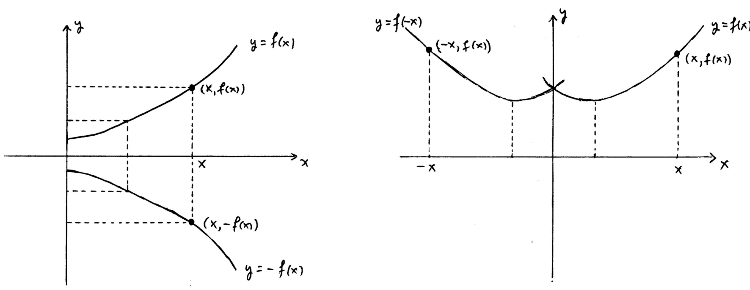
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διάστημα μονοτονίας της $y = f(x)$ και σχεδιάζουμε το αντίστοιχο μέρος του γραφήματος το οποίο είναι, συνήθως, μια καμπύλη. Αυτή η καμπύλη είτε ανεβαίνει από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω είτε κατεβαίνει από τα αριστερά και πάνω προς τα δεξιά και κάτω. Επίσης, προσέχουμε ώστε η κατακόρυφη προβολή της στον x-άξονα να είναι το ίδιο το διάστημα μονοτονίας και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα να είναι το αντίστοιχο σύνολο τιμών. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για κάθε διάστημα μονοτονίας της συνάρτησης.

Επιπλέον βοηθητικά στοιχεία είναι το αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Αν ισχύει ένα από τα δυο, τότε αρκεί να σχεδιάσουμε το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο μέρος του πεδίου ορισμού που περιέχεται στο $[0, +\infty)$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι άρτια το υπόλοιπο μέρος του γραφήματος είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς τον y-άξονα ενώ στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι περιττή το υπόλοιπο μέρος του γραφήματος είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς το σημείο $(0,0)$.

Β. Έστω ότι γνωρίζουμε το γράφημα της $y = f(x)$. Θα δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε γραφήματα μερικών άλλων συναρτήσεων που σχετίζονται με την $y = f(x)$.

(1) Τα σημεία $(x, -f(x))$ του γραφήματος της $y = -f(x)$ είναι τα συμμετρικά ως προς τον x-άξονα των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:

Το γράφημα της $y = -f(x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον x-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$.



Σχήμα 3.10: Τα γραφήματα των $y = -f(x)$ και $y = f(-x)$.

(2) Τα σημεία $(-x, f(x)) = (x', f(-x'))$ του γραφήματος της $y = f(-x)$ είναι τα συμμετρικά ως προς τον y-άξονα των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Δηλαδή:

Το γράφημα της $y = f(-x)$ είναι το συμμετρικό ως προς τον y-άξονα του γραφήματος της $y = f(x)$.

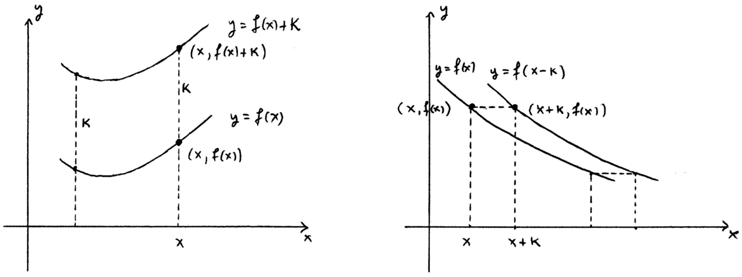
(3) Έστω αριθμός κ. Η **κατακόρυφη μεταφορά κατά** κ οποιουδήποτε σημείου (a, b) του επιπέδου είναι το σημείο $(a, b + \kappa)$.

Τα σημεία $(x, f(x) + \kappa)$ του γραφήματος της $y = f(x) + \kappa$ είναι οι κατακόρυφες μεταφορές κατά κ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:

Το γράφημα της $y = f(x) + \kappa$ είναι η κατακόρυφη μεταφορά κατά κ του γραφήματος της $y = f(x)$.

(4) Έστω αριθμός κ. Η **οριζόντια μεταφορά κατά** κ οποιουδήποτε σημείου (a, b) του επιπέδου είναι το σημείο $(a + \kappa, b)$.

Τα σημεία $(x + \kappa, f(x)) = (x', f(x' - \kappa))$ του γραφήματος της $y = f(x - \kappa)$



Σχήμα 3.11: Τα γραφήματα των $y = f(x) + \kappa$ και $y = f(x - \kappa)$.

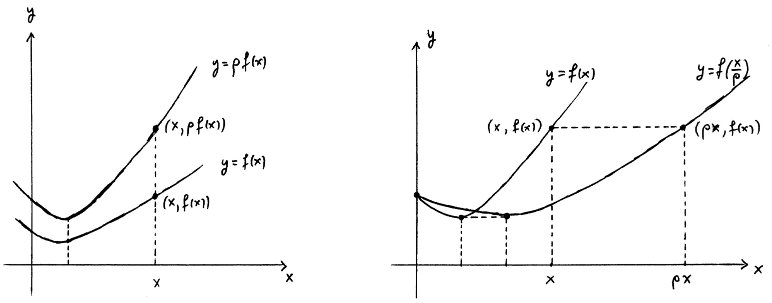
είναι οι οριζόντιες μεταφορές κατά κ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:

Το γράφημα της $y = f(x - \kappa)$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά κ του γραφήματος της $y = f(x)$.

(5) Έστω ρ ένας *θετικός* αριθμός. Το **κατακόρυφο ομοιόθετο με λόγο** ρ οποιουδήποτε σημείου (a, b) είναι το σημείο $(a, \rho b)$.

Τα σημεία $(x, \rho f(x))$ του γραφήματος της $y = \rho f(x)$ είναι τα κατακόρυφα ομοιόθετα με λόγο ρ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Επομένως:

Το γράφημα της $y = \rho f(x)$ είναι το κατακόρυφο ομοιόθετο με λόγο ρ του γραφήματος της $y = f(x)$.



Σχήμα 3.12: Τα γραφήματα των $y = \rho f(x)$ και $y = f(\frac{x}{\rho})$.

(6) Έστω ρ ένας θετικός αριθμός. Το **οριζόντιο ομοιόθετο με λόγο** ρ οποιουδήποτε σημείου (a, b) είναι το σημείο $(\rho a, b)$.

Τα σημεία $(\rho x, f(x)) = \big(x', f\big(\frac{x'}{\rho}\big)\big)$ του γραφήματος της $y = f\big(\frac{x}{\rho}\big)$ είναι τα οριζόντια ομοιόθετα με λόγο ρ των σημείων $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$. Με άλλα λόγια:

Το γράφημα της $y = f(\frac{x}{\rho})$ είναι το οριζόντιο ομοιόθετο με λόγο ρ του γραφήματος της $y = f(x)$.

Ασκήσεις.

1. Θεωρήστε τις παρακάτω συναρτήσεις.

$$y = |x|, \quad y = \frac{|x|}{x}, \quad y = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } x > 0, \\ 0\,, & \text{αν } x = 0, \\ -1\,, & \text{αν } x < 0, \end{cases} \quad y = x - [x],$$

$$y = (-1)^{[x]}\,, \quad y = x(-1)^{[x]}\,, \quad y = (-1)^{[\frac{1}{x}]}\,, \quad y = x(-1)^{[\frac{1}{x}]}\,.$$

Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους; Σε ποια διαστήματα είναι οι συναρτήσεις αυτές μονότονες και ποια είναι τα αντίστοιχα σύνολα τιμών; Είναι οι συναρτήσεις άρτιες ή περιττές; Σχεδιάστε τα γραφήματά τους. Είναι τα γραφήματά τους συνεχή; Ποιες από αυτές τις συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες στο πεδίο ορισμού τους;

2. Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων $y = \sqrt{-x^2}$ και $y = \sqrt{-x^2 - 1}\,$.

3. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = x^2$, σχεδιάστε τα γραφήματα των:

$$y = 3x^2\,, \quad y = x^2 - 4, \quad y = (x+4)^2\,, \quad y = (3x+4)^2\,, \quad y = 4-(3x+4)^2\,.$$

Από τα γραφήματα των συναρτήσεων να διακρίνετε τα πεδία ορισμού τους, τα σύνολα τιμών τους, τα διαστήματα μονοτονίας τους και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών τους. Να διακρίνετε, επίσης, (αν υπάρχουν) τα άνω φράγματα ή τα κάτω φράγματά τους στο $(-\infty, +\infty)$.

4. Έστω αριθμοί $a \neq 0$ και b, c. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = x^2$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της

$$y = ax^2 + bx + c.$$

(Υπόδειξη: Γράψτε $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$.)

Σε ποια περίπτωση είναι η συνάρτηση άνω φραγμένη και σε ποια περίπτωση είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$;

5. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των:

$$y = \frac{1}{x} + 2, \quad y = \frac{1}{x+2}\,, \quad y = \frac{1}{3x+2}\,, \quad y = \frac{3}{x+2}\,.$$

6. Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$. Αρχίζοντας με το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

(Υπόδειξη: Γράψτε $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2}\frac{1}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$.)

Η $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ονομάζεται **γραμμική κλασματική** συνάρτηση.

Εφαρμόστε τα προηγούμενα για να σχεδιάσετε το γράφημα της $y = \frac{2x+3}{3x-1}$. Από το γράφημα να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

7. Έστω αριθμοί κ και $\rho > 0$. Αν το γράφημα της $y = f(x)$ είναι συνεχές, τί συμπεραίνετε για τα γραφήματα των $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(x) + \kappa$, $y = f(x-\kappa)$, $y = \rho f(x)$ και $y = f(\frac{x}{\rho})$;

8. Σχεδιάστε το γράφημα της $y = x^2 - 3x + 2$ και, κατόπιν, τα γραφήματα των $y = |x^2 - 3x + 2|$ και $y = |x|^2 - 3|x| + 2$. Τι παρατηρείτε;

   Γενικότερα:

   (i) συσχετίστε τα γραφήματα των $y = f(x)$ και $y = |f(x)|$.

   (ii) συσχετίστε τα γραφήματα των $y = f(x)$ και $y = f(|x|)$.

3.5 Αντίστροφη συνάρτηση.

Έχουμε δει ότι οι δυο μεταβλητές της $y = f(x)$ μπορούν, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, να αλλάξουν ρόλους, δηλαδή η y να είναι η ανεξάρτητη και η x να είναι η εξαρτημένη μεταβλητή ή, με άλλα λόγια, η x να είναι συνάρτηση της y. Αυτό, βάσει του ορισμού της έννοιας της συνάρτησης, προϋποθέτει ότι *σε κάθε τιμή της y από το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή της x από το πεδίο ορισμού.* Δηλαδή, πρέπει για κάθε τιμή της y από το σύνολο τιμών η εξίσωση $f(x) = y$ με άγνωστο x να έχει μια μοναδική λύση από το πεδίο ορισμού. Αν αυτή η προϋπόθεση ισχύει, τότε καθορίζεται μια νέα συνάρτηση που ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f, συμβολίζεται f^{-1} και έχει τύπο

$$x = f^{-1}(y).$$

Δηλαδή:

$$\boxed{y = f(x) \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad x = f^{-1}(y)}$$

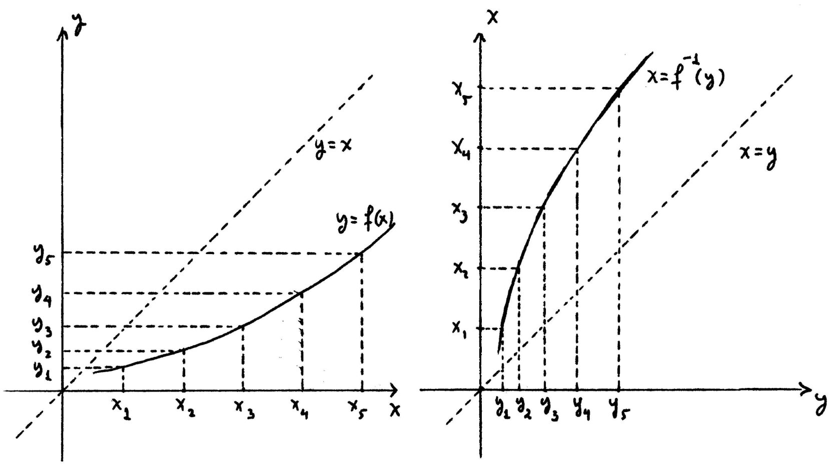
για κάθε x στο πεδίο ορισμού και κάθε y στο σύνολο τιμών της f.

Έτσι *το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης μετατρέπεται σε σύνολο τιμών της αντίστροφης και το σύνολο τιμών της αρχικής μετατρέπεται σε πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.*

Ας τονίσουμε πάλι ότι η εξίσωση $f(x) = y$ πρέπει να έχει μοναδική λύση ως προς x. Αν η συνάρτηση δεν έχει την ίδια τιμή y για περισσότερους από έναν x, δηλαδή η ισότητα $y = f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται την $x_1 = x_2$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **ένα-προς-ένα** και τότε μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση. Είδαμε προηγουμένως ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα και, επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της.

Η ισοδυναμία «$y = f(x)$ *αν και μόνο αν* $x = f^{-1}(y)$» αναδιατυπώνεται ως εξής: *το σημείο* (x, y) *ανήκει στο γράφημα της* $y = f(x)$ *αν και μόνο αν το σημείο* (y, x) *ανήκει στο γράφημα της* $x = f^{-1}(y)$. Και, επειδή τα σημεία (x, y) και (y, x) είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο, δηλαδή την ευθεία $y = x$, συνεπάγεται:

Τα γραφήματα μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο.



Σχήμα 3.13: Το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$.

Σχηματίζοντας την αντίστροφη $x = f^{-1}(y)$ της $y = f(x)$, οι μεταβλητές αλλάζουν ρόλους. Επομένως, όταν σχεδιάζουμε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$ η οριζόντια πραγματική ευθεία πρέπει να είναι ο y-άξονας και η κατακόρυφη πραγματική ευθεία πρέπει να είναι ο x-άξονας. Αυτό επιβεβαιώνει και τον προηγούμενο κανόνα για τη σχέση ανάμεσα στα γραφήματα της συνάρτησης και της αντίστροφής της· όταν κάνουμε ανάκλαση ως προς την κύρια διαγώνιο αυτό έχει ως αποτέλεσμα, όχι μόνο να βρούμε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$ από το γράφημα της $y = f(x)$, αλλά και να μετατραπεί ο x-άξονας από οριζόντια σε κατακόρυφη ευθεία και ο y-άξονας από κατακόρυφη σε οριζόντια ευθεία.

Επειδή είναι πολύ συνηθισμένο η ανεξάρτητη μεταβλητή να συμβολίζεται x και η εξαρτημένη μεταβλητή y, πολλές φορές μετατρέπουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης σε $y = f^{-1}(x)$, αφού έχει προηγηθεί ο υπολογισμός του στη μορφή $x = f^{-1}(y)$ από τον τύπο $y = f(x)$. Τότε, φυσικά, πρέπει να γίνει και η ανάλογη αλλαγή στον συμβολισμό των αξόνων: ο x-άξονας είναι η οριζόντια ευθεία και ο y-άξονας η κατακόρυφη ευθεία.

Είναι απλό να δούμε ότι:

`Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, τότε και η αντίστροφή της συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, αντιστοίχως.`

Πράγματι, έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και έστω y_1, y_2 οποιαδήποτε στοιχεία του πεδίου ορισμού της $x = f^{-1}(y)$ με την ιδιότητα $y_1 < y_2$. Τα αντίστοιχα στοιχεία $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ στο σύνολο τιμών της $x = f^{-1}(y)$ ικανοποιούν τις ισότητες $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$. Αν $x_1 = x_2$, τότε, προφανώς, είναι $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Αν είναι $x_1 > x_2$, τότε, επειδή η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεπάγεται $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ και πάλι καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως, πρέπει να είναι $x_1 < x_2$ ή, ισοδύναμα, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Ο προηγούμενος κανόνας επιβεβαιώνεται και από τα γραφήματα των $y = f(x)$ και $x = f^{-1}(y)$. Αν το γράφημα της $y = f(x)$ ανεβαίνει από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω, τότε το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$, ως συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο του προηγούμενου, ανεβαίνει κι αυτό από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω.

Ένας ακόμη απλός κανόνας είναι ο εξής.

`Αν το γράφημα μιας συνάρτησης είναι συνεχές, τότε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι κι αυτό συνεχές.`

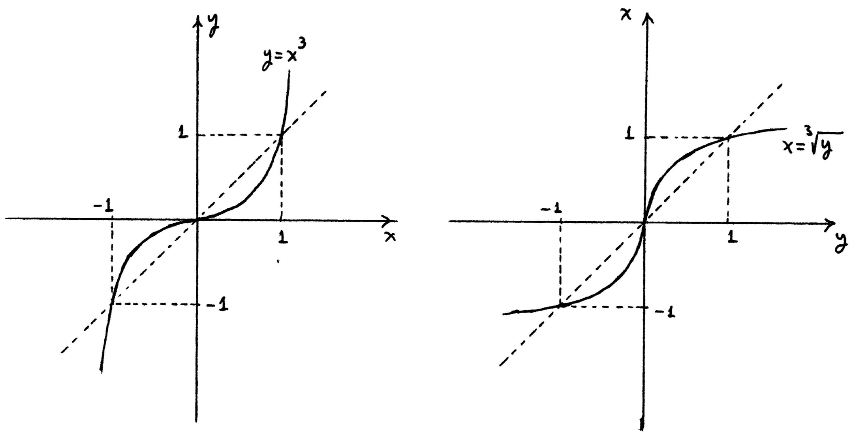
Πράγματι, αν το γράφημα της $y = f(x)$ παρουσιάζει την εικόνα μιας καμπύλης, τότε και το γράφημα της $x = f^{-1}(y)$, ως συμμετρικό ως προς την κύρια διαγώνιο του προηγούμενου, παρουσιάζει κι αυτό την εικόνα μιας καμπύλης.

Παράδειγμα: Έστω η $y = x^3$.

Η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, το $(-\infty, +\infty)$, με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$, πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα. Επειδή το γράφημα της αρχικής συνάρτησης είναι συνεχές, συνεπάγεται ότι και το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι συνεχές.

Μπορούμε, φυσικά, να αλλάξουμε τα σύμβολα των μεταβλητών και να πούμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Αν η $y = f(x)$ δεν είναι ένα-προς-ένα, τότε δεν ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση. Όμως, μερικές φορές μπορούμε να προσδιορίσουμε κάποιο συγκεκριμένο διάστημα I του πεδίου ορισμού της $y = f(x)$ ώστε, αν περιορίσουμε τις τιμές της x στο I, τότε η $y = f(x)$ μετατρέπεται σε ένα-προς-ένα: δηλαδή για κάθε x_1, x_2 στο I η ισότητα $f(x_1) = f(x_2)$ συνεπάγεται την $x_1 = x_2$. Τότε μπορούμε

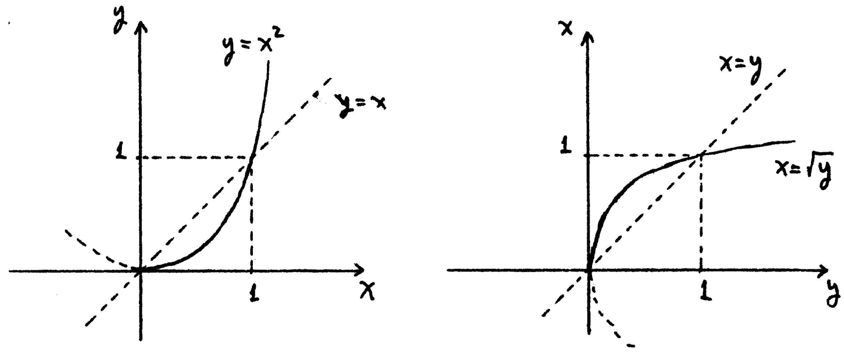


Σχήμα 3.14: Το γράφημα της $x = \sqrt[3]{y}$.

να θεωρήσουμε ως πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ το διάστημα I (παραλείποντας το υπόλοιπο του αρχικού πεδίου ορισμού) και ως σύνολο τιμών το σύνολο τιμών (υποσύνολο του αρχικού συνόλου τιμών) που αντιστοιχεί στο I. Μετά από αυτή τη συρρίκνωση του πεδίου ορισμού και του συνόλου τιμών η νέα συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ένα-προς-ένα και, επομένως, ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση. Αυτό, ανάλογα με την αρχική συνάρτηση, είναι δυνατό να γίνεται με περισσότερα από ένα διαστήματα I του πεδίου ορισμού της.

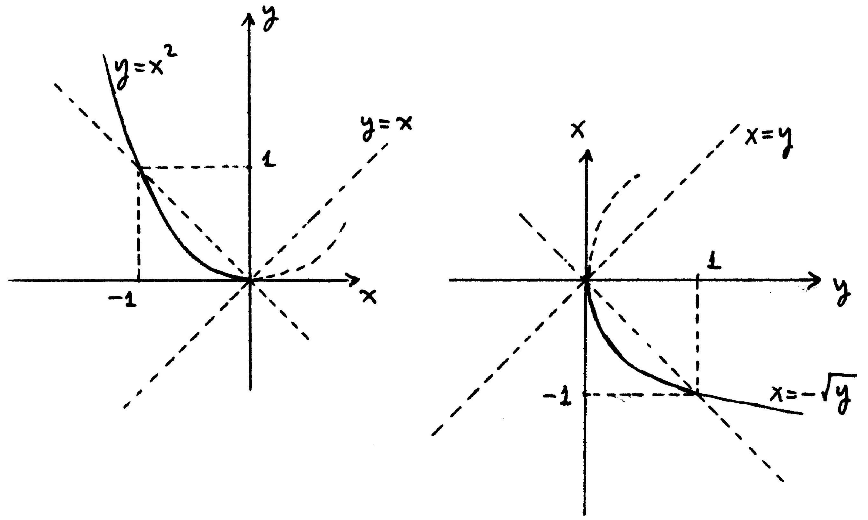
Παράδειγμα: Έστω η $y = x^2$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$.

Η $y = x^2$ δεν είναι ένα-προς-ένα διότι για κάθε $y > 0$ η εξίσωση $x^2 = y$ έχει ακριβώς δύο λύσεις: $x = \sqrt{y}$ και $x = -\sqrt{y}$.



Σχήμα 3.15: Το γράφημα της $x = \sqrt{y}$.

Όμως, στο διάστημα $[0,+\infty)$ του πεδίου ορισμού της η $y=x^2$ είναι γνησίως αύξουσα – και, επομένως, ένα-προς-ένα – με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x=\sqrt{y}$, με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή το γράφημα της συνάρτησης (μισή παραβολή) είναι συνεχές, συνεπάγεται ότι και το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι συνεχές.



Σχήμα 3.16: Το γράφημα της $x=-\sqrt{y}$.

Ομοίως, στο διάστημα $(-\infty,0]$ του πεδίου ορισμού της η $y=x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα – και, επομένως, ένα-προς-ένα – με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$. Άρα πάλι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x=-\sqrt{y}$, με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,0]$ και είναι γνησίως φθίνουσα. Το γράφημα της συνάρτησης (μισή παραβολή) είναι συνεχές, οπότε και το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης είναι συνεχές.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον όρο *πλειότιμη συνάρτηση* που γνωρίσαμε στην ενότητα 3.3 και να πούμε ότι η $y=x^2$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ έχει ως αντίστροφη συνάρτηση την *πλειότιμη συνάρτηση* $x=\pm\sqrt{y}$ με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$.

Ασκήσεις.

1. Θεωρήστε τη συνάρτηση $y=\frac{1}{3x+1}$.

   Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.

Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, καθώς και το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.

2. Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$ και η γραμμική κλασματική συνάρτηση $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ στην άσκηση 6 της προηγούμενης ενότητας. Βρείτε την αντίστροφή της συνάρτηση, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

   Σχεδιάστε το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης της $y = \frac{2x+3}{3x-1}$.

3. Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = x^2 + 4x + 1$.

   Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.

   Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση;

   Χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, «μοιράστε» την σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις. Βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις τους, τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

   Μήπως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^2 + 4x + 1$ ως πλειότιμη συνάρτηση;

3.6 Πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις.

Πολυωνυμική συνάρτηση ονομάζουμε κάθε συνάρτηση με τύπο

$$\boxed{y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N \,.}$$

Αν $a_N \neq 0$, ο ακέραιος N ονομάζεται **βαθμός** της πολυωνυμικής συνάρτησης. Το πεδίο ορισμού κάθε πολυωνυμικής συνάρτησης είναι, φυσικά, το $(-\infty, +\infty)$. Οι πιο απλές πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι οι δυνάμεις

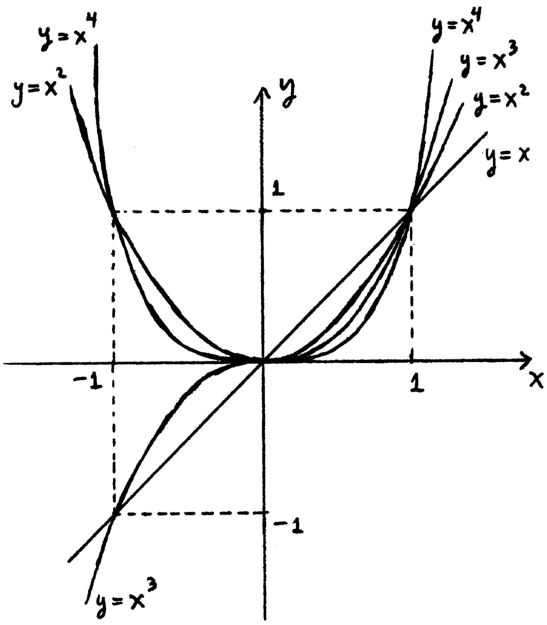
$$\boxed{y = x^n}$$

με θετικό ακέραιο (δηλαδή, φυσικό) εκθέτη n.

Όπως το παράδειγμα $y = x^3$, αν ο n είναι περιττός, τότε η $y = x^n$ είναι περιττή, γνησίως αύξουσα με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Το γράφημά της είναι καμπύλη, συμμετρική ως προς το σημείο $(0, 0)$, περιέχει τα σημεία $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Επίσης, όπως η $y = x^2$, αν ο n είναι άρτιος, τότε η $y = x^n$ είναι άρτια, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Το γράφημά της είναι καμπύλη, συμμετρική ως προς τον y-άξονα, περιέχει τα σημεία $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και πάνω προς το σημείο $(0, 0)$ και μετά ανεβαίνει από το σημείο $(0, 0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Όπως είπαμε, τα γραφήματα των $y = x^n$ περιέχουν τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$. Στο διάστημα $(0, 1)$ τα γραφήματα των $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, ... είναι το καθένα κάτω από το προηγούμενό του ενώ στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι το καθένα πάνω



Σχήμα 3.17: Τα γραφήματα των $y = x^n$.

από το προηγούμενό του. Αυτό, φυσικά, συμβαίνει διότι για κάθε x στο διάστημα $(0, 1)$ τα ύψη των γραφημάτων πάνω από το σημείο x του x-άξονα φθίνουν: $x > x^2 > x^3 > \cdots$. Ενώ για κάθε x στο διάστημα $(1, +\infty)$ τα ύψη των γραφημάτων πάνω από το σημείο x αυξάνουν: $x < x^2 < x^3 < \cdots$.

Ρητή συνάρτηση ονομάζουμε κάθε συνάρτηση με τύπο

$$\boxed{y = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_M x^M}\,.}$$

Το πεδίο ορισμού της αποτελείται από όλες τις τιμές της x εκτός από εκείνες που μηδενίζουν τον παρονομαστή, το πλήθος των οποίων είναι $\leq M$.

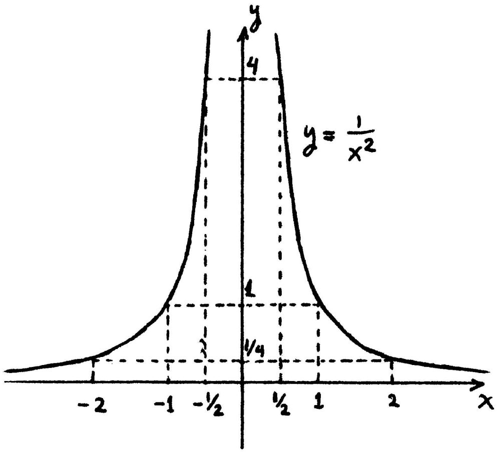
Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραδείγματα ρητών συναρτήσεων.

Φυσικά, οι πιο απλές ρητές συναρτήσεις που δεν είναι πολυωνυμικές είναι οι δυνάμεις

$$\boxed{y = \frac{1}{x^n} = x^{-n}}$$

με θετικό ακέραιο (δηλαδή, φυσικό) n. Όλες έχουν πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Αν ο n είναι περιττός, η $y = \frac{1}{x^n}$ είναι περιττή, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο $(-\infty,0)$ είναι καμπύλη που περιέχει το σημείο $(-1,-1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα κάτω και κοντά στον y-άξονα. Ομοίως, το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο $(0,+\infty)$ είναι καμπύλη που περιέχει το σημείο $(1,1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα. Τα δυο αυτά μέρη του γραφήματος είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $(0,0)$.



Σχήμα 3.18: Το γράφημα της $y=\frac{1}{x^2}$.

Αν ο n είναι άρτιος, τότε η $y=\frac{1}{x^n}$ είναι άρτια, γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο $(-\infty,0)$ είναι καμπύλη που περιέχει το σημείο $(-1,1)$ και ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα. Ομοίως, το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο $(0,+\infty)$ είναι καμπύλη που περιέχει το σημείο $(1,1)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα. Τα δυο αυτά μέρη του γραφήματος είναι συμμετρικά ως προς τον y-άξονα.

Ασκήσεις.

1. Είναι ίδιες οι συναρτήσεις $y=\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}}$ και $y=\frac{x^2(x-2)}{(x-1)^2(x+1)}$; Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους; Είναι ίδιες στην τομή των πεδίων ορισμού τους;

2. Πώς συσχετίζονται τα γραφήματα των $y=\frac{1}{x^n}$ για τις διάφορες τιμές του φυσικού n;

3. Αρχίζοντας με τα γραφήματα των $y=\frac{1}{x^2}$, $y=\frac{1}{x^3}$ και $y=\frac{1}{x^4}$, σχεδιάστε

τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = \frac{1}{(x-1)^2}\,, \quad y = \frac{1}{(2-3x)^3} + 4, \quad y = -\frac{3}{(2x+1)^4} + 2.$$

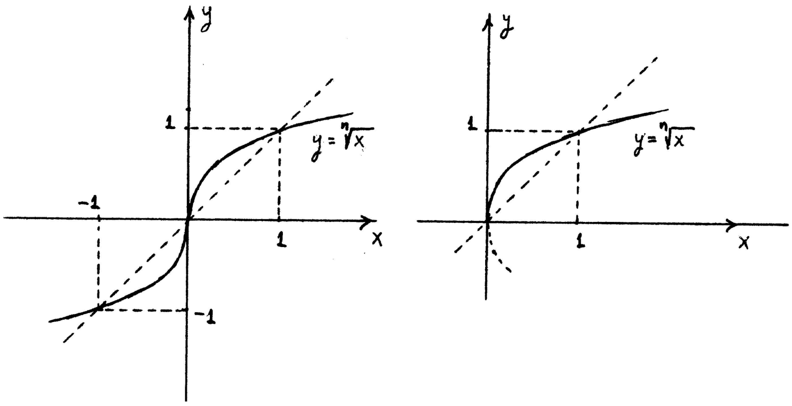
Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

3.7 Αλγεβρικές συναρτήσεις.

Έστω περιττός φυσικός n. Αφού η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$, υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $x = \sqrt[n]{y}$. Αυτή την μετατρέπουμε σε

$$\boxed{y = \sqrt[n]{x}}$$

και είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Το γράφημα της $y = \sqrt[n]{x}$ είναι μια καμπύλη που περιέχει τα σημεία $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή της στον x-άξονα είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι πάλι το $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή η καμπύλη ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.



Σχήμα 3.19: Τα γραφήματα των $y = \sqrt[n]{x}$. Περιπτώσεις: περιττός n, άρτιος n.

Έστω άρτιος φυσικός n. Η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$, οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $x = \sqrt[n]{y}$ που την μετατρέπουμε σε

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Αυτή είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Το γράφημα της $y = \sqrt[n]{x}$ είναι μια καμπύλη που περιέχει τα σημεία $(0, 0)$,

$(1,1)$ και η κατακόρυφη προβολή της στον x-άξονα είναι το $[0,+\infty)$ και η οριζόντια προβολή της στον y-άξονα είναι πάλι το $[0,+\infty)$. Άρα η καμπύλη ανεβαίνει από το σημείο $(0,0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Οι ρητές συναρτήσεις και οι συναρτήσεις $y=\sqrt[n]{x}$ που μόλις αναφέραμε είναι τα απλούστερα παραδείγματα των λεγόμενων **αλγεβρικών συναρτήσεων**. Άλλα τέτοια παραδείγματα είναι, γενικά, συναρτήσεις που προκύπτουν από ρητές συναρτήσεις με συνδυασμό των τεσσάρων αλγεβρικών πράξεων και την εξαγωγή ριζών οποιασδήποτε τάξης. Για παράδειγμα:

$$y=\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x-1}}\,.$$

Χωρίς να δώσουμε έμφαση, ας δούμε ποιος είναι ο γενικός ορισμός των αλγεβρικών συναρτήσεων. Θεωρούμε οποιαδήποτε εξίσωση της μορφής

$$p_0(x)+p_1(x)y+\cdots+p_N(x)y^N=0$$

με άγνωστο y, όπου κάθε $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\dots$, $p_N(x)$ είναι πολυώνυμο, $N\geq 1$ και το $p_N(x)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Έστω, επίσης, μια συνάρτηση $y=g(x)$ με πεδίο ορισμού οποιαδήποτε ένωση διαστημάτων, η οποία «επαληθεύει» την παραπάνω εξίσωση, δηλαδή ισχύει

$$p_0(x)+p_1(x)g(x)+\cdots+p_N(x)g(x)^N=0$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=g(x)$. Τότε η $y=g(x)$ χαρακτηρίζεται *αλγεβρική συνάρτηση*. Υπάρχει μια ακόμη προϋπόθεση για να είναι η $y=g(x)$ αλγεβρική: πρέπει να είναι *συνεχής*. Για το τι ακριβώς σημαίνει *συνεχής συνάρτηση* θα μιλήσουμε στο Κεφάλαιο 5. Ισχύει, όμως, ότι το να είναι η $y=g(x)$ συνεχής ισοδυναμεί με το να έχει συνεχές γράφημα.

Παραδείγματα: (1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $y=p(x)$ είναι αλγεβρική συνάρτηση στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$.

Πράγματι, η $y=p(x)$ επαληθεύει την εξίσωση $-p(x)+1y=0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, 1 είναι πολυώνυμα.

(2) Κάθε ρητή συνάρτηση $y=\frac{p(x)}{q(x)}$, όπου τα $p(x),q(x)$ είναι πολυώνυμα, είναι αλγεβρική συνάρτηση.

Η $y=\frac{p(x)}{q(x)}$ επαληθεύει την εξίσωση $-p(x)+q(x)y=0$, της οποίας οι συντελεστές $-p(x)$, $q(x)$ είναι πολυώνυμα.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις χαρακτηρίζονται **πολυωνυμικές αλγεβρικές συναρτήσεις** και οι ρητές συναρτήσεις χαρακτηρίζονται **ρητές αλγεβρικές συναρτήσεις**.

Παράδειγμα: Έστω η $y=\sqrt[n]{x}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$, αν ο n είναι περιττός φυσικός, και το $[0,+\infty)$, αν ο n είναι άρτιος φυσικός. Η συνάρτηση αυτή είναι αλγεβρική συνάρτηση.

Πράγματι, η $y = \sqrt[n]{x}$ επαληθεύει την εξίσωση $-x + 1y^n = 0$, της οποίας οι συντελεστές $-x, 0, \dots, 0, 1$ είναι πολυώνυμα.

Κάθε αλγεβρική συνάρτηση που δεν είναι πολυωνυμική ή ρητή χαρακτηρίζεται **άρρητη αλγεβρική συνάρτηση**.

Οι συναρτήσεις που δεν είναι αλγεβρικές χαρακτηρίζονται **υπερβατικές συναρτήσεις**. Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι δυνάμεις με άρρητο εκθέτη, οι εκθετικές, οι λογαριθμικές, οι τριγωνομετρικές, οι αντίστροφες τριγωνομετρικές, οι υπερβολικές και οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις που θα δούμε στις επόμενες ενότητες.

Ασκήσεις.

1. Αρχίζοντας με τα γραφήματα των $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = \sqrt{x-1}\,, \quad y = -\sqrt[4]{2-3x} + 3, \quad y = 2 + \sqrt[3]{2x+1}\,, \quad y = \sqrt[5]{3-x}\,.$$

   Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών.

2. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$y = \sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{x+1}\,, \quad y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\,, \quad y = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{3x+1}-4}$$

   είναι αλγεβρικές, βρίσκοντας συγκεκριμένες εξισώσεις που «επαληθεύονται» από αυτές τις συναρτήσεις. Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους;

3. Έστω φυσικός n και πολυώνυμα $p(x)$, $q(x)$. Αποδείξτε ότι η $y = \sqrt[n]{\frac{p(x)}{q(x)}}$ είναι αλγεβρική.

4. Αν ο n είναι φυσικός ≥ 2, αποδείξτε ότι η αλγεβρική συνάρτηση $y = \sqrt[n]{x}$ δεν είναι ρητή.

   (Υπόδειξη: Αν η $y = \sqrt[n]{x} = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι ρητή, καταλήξτε σε άτοπο, μελετώντας τους βαθμούς των $p(x)$ και $q(x)$.)

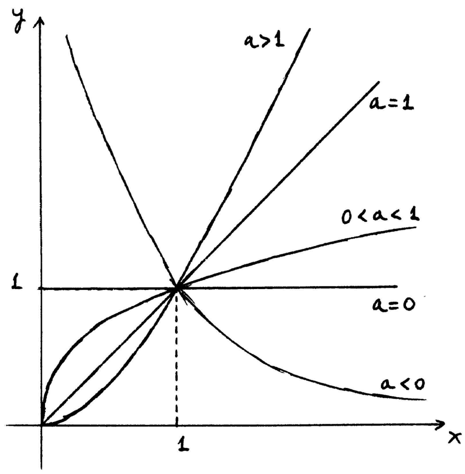
3.8 Δυνάμεις.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\boxed{y = x^a}$$

με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, αν $a > 0$, και το $(0, +\infty)$, αν $a < 0$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **δύναμη με εκθέτη** a. Το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ είναι ακριβώς αυτό που μόλις αναφέραμε αν ο a είναι άρρητος ή ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του. Γνωρίζουμε, φυσικά, ότι, αν ο a είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του (και, ειδικά, αν ο a είναι ακέραιος ή αν είναι αντίστροφος περιττού φυσικού) τότε η $y = x^a$ ορίζεται και για αρνητικές τιμές της x, οπότε το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ περιέχει και το διάστημα $(-\infty, 0)$. Επειδή, όμως, η περίπτωση που ο a είναι ακέραιος ή αντίστροφος περιττού φυσικού έχει ήδη μελετηθεί στις προηγούμενες ενότητες, για να αποφύγουμε την περιπτωσιολογία σχετικά με τον εκθέτη, θα περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ όπως ακριβώς κάναμε παραπάνω.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της $y = x^a$, θεωρούμε την εξίσωση $x^a = y$ με άγνωστο x. Αν $y < 0$, η εξίσωση δεν έχει καμιά λύση. Αν $y = 0$, η εξίσωση έχει τη λύση $x = 0$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, αν $a > 0$, και δεν έχει καμιά λύση, αν $a < 0$. Αν $y > 0$, η εξίσωση έχει τη λύση $x = y^{\frac{1}{a}}$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Επομένως, αν $a > 0$, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $y = x^a$ είναι και τα δυο ίσα με το $[0, +\infty)$ και, αν $a < 0$, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών είναι και τα δυο ίσα με το $(0, +\infty)$.



Σχήμα 3.20: Τα γραφήματα των $y = x^a$.

Η $y = x^a$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, αν $a > 0$, και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, αν $a < 0$.

Αν $a > 0$, το γράφημα της $y = x^a$ είναι μια καμπύλη που περιέχει τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή του στον x-άξονα είναι το $[0, +\infty)$ – το πεδίο ορισμού – ενώ η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το $[0, +\infty)$ – το σύνολο τιμών. Άρα το γράφημα ανεβαίνει από το σημείο $(0, 0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Ομοίως, αν $a < 0$, το γράφημα της $y = x^a$ είναι μια καμπύλη που περιέχει το σημείο $(1, 1)$ και η κατακόρυφη προβολή του στον x-άξονα είναι το $(0, +\infty)$ ενώ η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το $(0, +\infty)$. Άρα το γράφημα κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα.

Αν αντιπαραβάλουμε τα γραφήματα των $y = x^a$ και $y = x^b$ με $a < b$, βλέπουμε ότι και τα δυο γραφήματα περιέχουν το σημείο $(1, 1)$, ότι στο διάστημα $(0, 1)$ το γράφημα της $y = x^a$ είναι πάνω από το γράφημα της $y = x^b$ και ότι στο διάστημα $(1, +\infty)$ το γράφημα της $y = x^a$ είναι κάτω από το γράφημα της $y = x^b$.

Η αντίστροφη συνάρτηση της δύναμης $y = x^a$ είναι η $x = y^{\frac{1}{a}}$. Παρατηρήστε ότι οι εκθέτες a και $\frac{1}{a}$ είναι είτε και οι δυο > 0 είτε και οι δυο < 0.

Ασκήσεις.

1. Ποια είναι τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων;

$$y = x^0\,, \quad y = x^3\,, \quad y = x^{-3}\,, \quad y = x^{\frac{4}{6}}\,, \quad y = x^{-\frac{4}{6}}\,,$$

$$y = x^{\frac{6}{4}}\,, \quad y = x^{-\frac{6}{4}}\,, \quad y = x^{\sqrt{2}}\,, \quad y = x^{-\sqrt{2}}\,.$$

Σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

2. Με βάση τα γραφήματα των $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = x^{-\sqrt{2}}$, σχεδιάστε τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = (2x-3)^{\sqrt{2}}\,, \quad y = 2-(2-3x)^{\sqrt{2}}, \quad y = (1-x)^{-\sqrt{2}}, \quad y = 3+(2x+1)^{\sqrt{2}}.$$

Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών.

3.9 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Για οποιονδήποτε $a > 0$ η συνάρτηση

$$\boxed{y = a^x}$$

με πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ ονομάζεται **εκθετική συνάρτηση με βάση** a.

Αν $a = 1$, η εκθετική συνάρτηση είναι σταθερή, $y = 1^x = 1$, και έχει σύνολο τιμών το $\{1\}$.

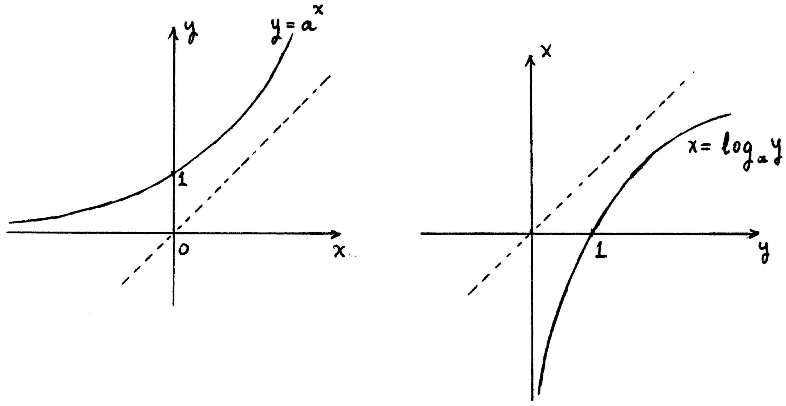
Αν $a > 1$ ή $0 < a < 1$, τότε το σύνολο τιμών της $y = a^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Πράγματι, η εξίσωση $a^x = y$ με άγνωστο x δεν έχει καμιά λύση, αν $y \leq 0$, και έχει τη λύση $x = \log_a y$, αν $y > 0$. Επίσης, η εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, αν $a > 1$, και γνησίως φθίνουσα, αν $0 < a < 1$.

Το γράφημα της $y = a^x$ είναι καμπύλη που περιέχει τα σημεία $(0, 1)$, $(1, a)$. Αν $a > 1$, η κατακόρυφη προβολή στον x-άξονα του γραφήματος είναι το $(-\infty, +\infty)$ – το πεδίο ορισμού – ενώ η οριζόντια προβολή του στον y-άξονα είναι το $(0, +\infty)$ – το σύνολο τιμών. Άρα το γράφημα ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στον x-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Ομοίως, αν $0 < a < 1$, το γράφημα κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και πάνω προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στον x-άξονα.

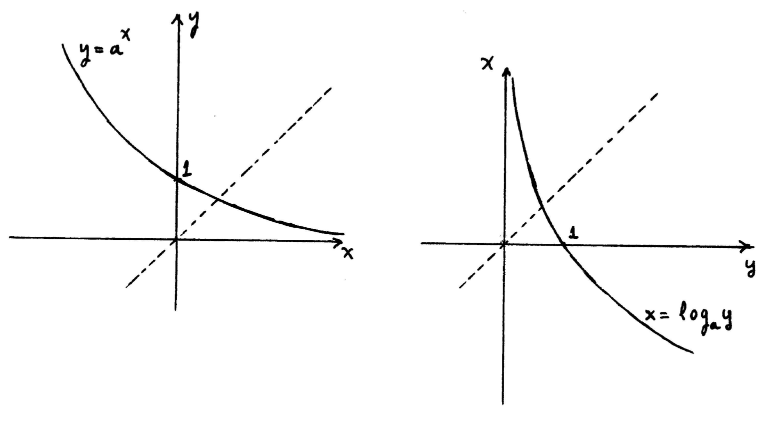
Αν $a = 1$, η $y = a^x$ είναι, όπως είδαμε, σταθερή και, επομένως, δεν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση.

Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$, η $y = a^x$ είναι γνησίως μονότονη, οπότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση. Για να υπολογίσουμε τον τύπο της λύνουμε την $x^a = y$ ως προς x και βρίσκουμε $x = \log_a y$. Αφού εναλλάξουμε τα σύμβολα των μεταβλητών, ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι ο

$$\boxed{y = \log_a x\,.}$$



Σχήμα 3.21: Τα γραφήματα των $y = a^x$ και $x = \log_a y$ όταν $a > 1$.



Σχήμα 3.22: Τα γραφήματα των $y = a^x$ και $x = \log_a y$ όταν $0 < a < 1$.

Την $y = \log_a x$, δηλαδή την αντίστροφη της $y = a^x$, την ονομάζουμε **λογαριθμική συνάρτηση με βάση** a. Το πεδίο ορισμού της είναι το $(0, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της το $(-\infty, +\infty)$.

Αν $a > 1$, η $y = \log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ, αν $0 < a < 1$, είναι γνησίως φθίνουσα.

Το γράφημα της $y = \log_a x$ είναι καμπύλη που περιέχει τα σημεία $(1, 0)$, $(a, 1)$. Αν $a > 1$, το γράφημα ανεβαίνει από απεριόριστα κάτω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και πάνω ενώ, αν $0 < a < 1$, το γράφημα κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στον y-άξονα προς απεριόριστα δεξιά και κάτω.

Ασκήσεις.

1. Σχεδιάστε τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = 3e^{-x} - 2\,, \quad y = 1 + 2^{3-x}\,, \quad y = e^{|x|}\,, \quad y = e^{-|x|}\,,$$

$$y = \log(-x), \quad y = \log|x|, \quad y = \log_{\frac{1}{2}}(2 - x), \quad y = \log_{10}(2x - 1).$$

2. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων. Βρείτε, επίσης, τα διαστήματα μονοτονίας τους και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

$$y = \log\frac{x-1}{x+1}\,, \quad y = \log\frac{1-x}{1+x}\,, \quad y = \log(1 - x^2), \quad y = \log(x^2 - 1).$$

   Για ποιες από αυτές ορίζονται οι αντίστροφες συναρτήσεις;

   Για εκείνες τις συναρτήσεις που έχουν αντίστροφες, βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις και τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

   Τι μπορείτε να πείτε για εκείνες τις συναρτήσεις που δεν έχουν αντίστροφες; Μήπως γι αυτές ορίζονται περισσότερες από μία «αντίστροφες» συναρτήσεις ή πλειότιμες αντίστροφες συναρτήσεις;

3.10 Τριγωνομετρικές και αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

A. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **περιοδική** αν υπάρχει $T > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x \pm T) = f(x)$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Αυτό, φυσικά, προϋποθέτει ότι, αν ο x είναι οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της $y = f(x)$, τότε και οι $x \pm T$ είναι στοιχεία του πεδίου ορισμού της. Ένας τέτοιος αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** της $y = f(x)$.

Παραδείγματα: (1) Οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π, αφού ισχύει $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ και $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.

(2) Οι συναρτήσεις $y = \tan x$ και $y = \cot x$ είναι περιοδικές με περίοδο π, αφού ισχύει $\tan(x \pm \pi) = \tan x$ και $\cot(x \pm \pi) = \cot x$.

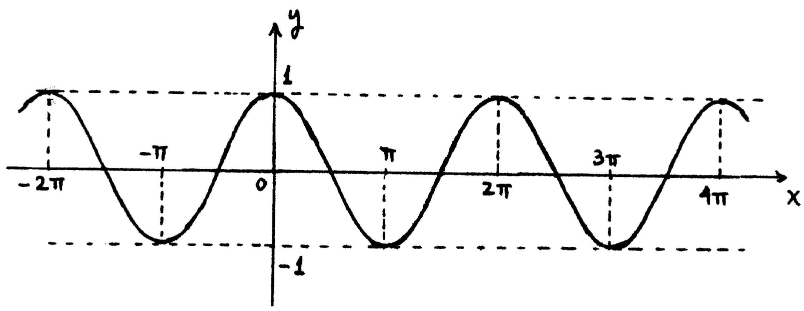
Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο T. Από τη σχέση $f(x - T) = f(x)$ συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $y = f(x - T)$ και $y = f(x)$ είναι ίδιες και, επομένως, έχουν τα ίδια γραφήματα. Το ίδιο, φυσικά, ισχύει και για τις συναρτήσεις $y = f(x + T)$ και $y = f(x)$. Άρα *οι οριζόντιες μεταφορές κατά* $\pm T$ *του γραφήματος της* f *ταυτίζονται με το γράφημα της* f. Από αυτό βγάζουμε το εξής χρήσιμο συμπέρασμα. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο T. Παίρνουμε οποιονδήποτε a και θεωρούμε το μέρος του γραφήματος της $y = f(x)$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, a + T]$. Τότε για κάθε ακέραιο k το μέρος του γραφήματος της $y = f(x)$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $[a + kT, a + (k + 1)T]$ είναι η οριζόντια μεταφορά κατά kT του μέρους του γραφήματος που αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, a + T]$. Επομένως,

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο T. Μπορούμε να σχεδιάσουμε ολόκληρο το γράφημα της συνάρτησης αν σχεδιάσουμε το μέρος του που αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, a + T]$ και το μεταφέρουμε οριζοντίως κατά όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του T.

Όλα αυτά βρίσκουν εφαρμογή στις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** που περιγράφονται ευθύς αμέσως.

1. Η συνάρτηση **συνημίτονο** με τύπο

$$\boxed{y = \cos x.}$$



Σχήμα 3.23: Το γράφημα της $y = \cos x$.

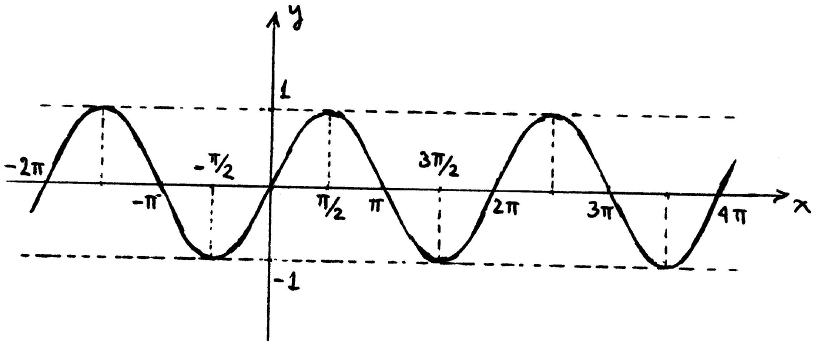
Έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Είναι περιοδική με περίοδο 2π και το γράφημά της είναι κυματοειδής καμπύλη. Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\pi, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$. Το σύνολο τιμών το οποίο αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα είναι το

$[-1, 1]$. Στο διάστημα $[-\pi, \pi]$: το γράφημα ανεβαίνει από το σημείο $(-\pi, -1)$ στο σημείο $(0, 1)$ και κατεβαίνει από το σημείο $(0, 1)$ στο σημείο $(\pi, -1)$ και περιέχει και τα σημεία $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

2. Η συνάρτηση **ημίτονο** με τύπο

$$\boxed{y = \sin x.}$$

Έχει πεδίο ορισμού $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Είναι περιοδική με περίοδο 2π και το γράφημά της είναι κυματοειδής καμπύλη. Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί σε καθένα από αυτά τα διαστήματα είναι το $[-1, 1]$. Στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: το γράφημα ανεβαίνει από το σημείο $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 1)$ και κατεβαίνει από το σημείο $(\frac{\pi}{2}, 1)$ στο σημείο $(\frac{3\pi}{2}, -1)$ και περιέχει και τα σημεία $(0, 0)$, $(\pi, 0)$.



Σχήμα 3.24: Το γράφημα της $y = \sin x$.

3. Η συνάρτηση **εφαπτόμενη** με τύπο

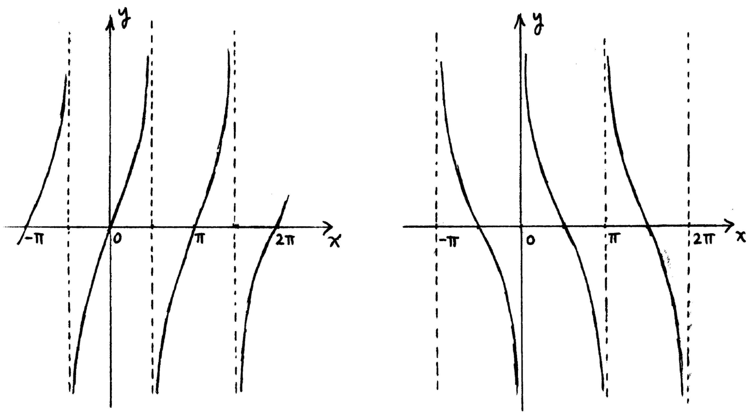
$$\boxed{y = \tan x.}$$

Έχει πεδίο ορισμού την ένωση των διαστημάτων $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Είναι περιοδική με περίοδο π. Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό είναι το $(-\infty, +\infty)$. Στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$: το γράφημα είναι καμπύλη που περιέχει το σημείο $(0, 0)$ και ανεβαίνει από απεριόριστα κάτω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x = -\frac{\pi}{2}$ προς απεριόριστα πάνω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

4. Η συνάρτηση **συνεφαπτόμενη** με τύπο

$$\boxed{y = \cot x.}$$

Έχει πεδίο ορισμού την ένωση των διαστημάτων $(k\pi, (k+1)\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$. Είναι περιοδική με περίοδο π. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi)$ και το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό είναι το $(-\infty, +\infty)$. Στο διάστημα $(0, \pi)$: το γράφημα είναι καμπύλη που περιέχει το σημείο $(\frac{\pi}{2}, 0)$ και κατεβαίνει από απεριόριστα πάνω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x = 0$ προς απεριόριστα κάτω και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x = \pi$.



Σχήμα 3.25: Τα γραφήματα των $y = \tan x$ και $y = \cot x$.

Οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι φραγμένες στο $(-\infty, +\infty)$ και έχουν άνω φράγμα τον 1 και κάτω φράγμα τον -1.

B. Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Καμιά από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση, εκτός αν περιορίσουμε τα πεδία ορισμού σε κατάλληλα διαστήματα όπου οι συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες ή γνησίως φθίνουσες. Κάνουμε τις εξής επιλογές.

Η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, \pi]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \arccos y$, πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \arcsin y$, πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \arctan y$, πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

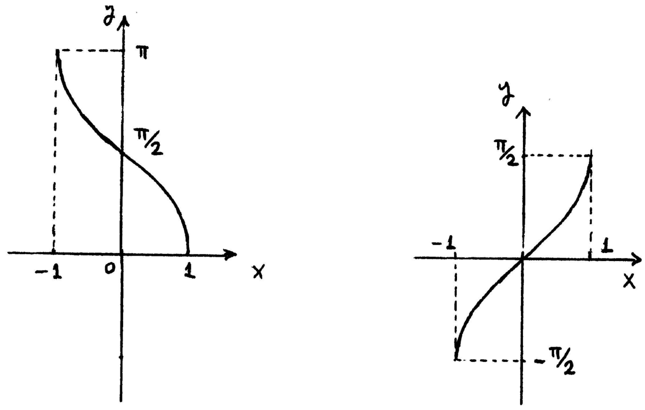
Η $y = \cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \pi)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο $x = \operatorname{arccot} y$, πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$.

Έχουμε, λοιπόν, ορίσει τις λεγόμενες **αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις**, οι οποίες, μετά από τη συνηθισμένη εναλλαγή των συμβόλων x και y, είναι:

1. Η συνάρτηση **τόξο-συνημίτονο** με τύπο

$$\boxed{y = \arccos x.}$$

Έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και το γράφημά της είναι καμπύλη που κατεβαίνει από το σημείο $(-1, \pi)$ προς το σημείο $(1, 0)$ και περιέχει το σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$.



Σχήμα 3.26: Τα γραφήματα των $y = \arccos x$ και $y = \arcsin x$.

2. Η συνάρτηση **τόξο-ημίτονο** με τύπο

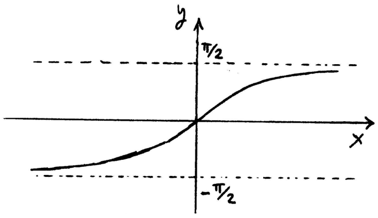
$$\boxed{y = \arcsin x.}$$

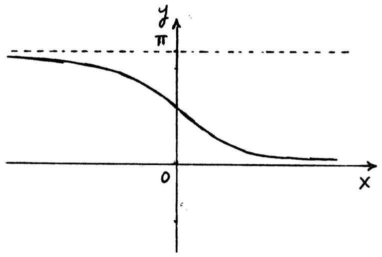
Έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και το γράφημά της είναι καμπύλη που ανεβαίνει από το σημείο $(-1, -\frac{\pi}{2})$ προς το σημείο $(1, \frac{\pi}{2})$ και περιέχει το σημείο $(0, 0)$.

3. Η συνάρτηση **τόξο-εφαπτόμενη** με τύπο

$$\boxed{y = \arctan x.}$$

Έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και το γράφημά της είναι καμπύλη που ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = -\frac{\pi}{2}$ προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = \frac{\pi}{2}$ και περιέχει το σημείο $(0, 0)$.





Σχήμα 3.27: Τα γραφήματα των $y = \arctan x$ και $y = \operatorname{arccot} x$.

4. Η συνάρτηση **τόξο-συνεφαπτόμενη** με τύπο

$$\boxed{y = \operatorname{arccot} x.}$$

Έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, \pi)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και το γράφημά της είναι καμπύλη που κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = \pi$ προς απεριόριστα δεξιά και κοντά στην οριζόντια ευθεία $y = 0$ και περιέχει το σημείο $(0, \frac{\pi}{2})$.

Ασκήσεις.

1. Σχεδιάστε τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = \cos(2x), \quad y = \tan\Big(\frac{x}{2} - 1\Big), \quad y = 1 + 2\sin(1 - 3x), \quad y = \cot(1 - x),$$

$$x = 2\arccos(2y + 1), \quad x = \frac{\pi}{2} + \arctan(1 - y), \quad x = \arctan\Big(\frac{y + 1}{2}\Big).$$

2. Θυμηθείτε την άσκηση Α5 στην ενότητα 1.4 και περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της συνάρτησης

$$y = a\cos x + b\sin x.$$

Σχεδιάστε τα γραφήματα των

$$y = \cos x + \sin x, \quad y = \sqrt{3}\cos x + \sin x, \quad y = \sqrt{3}\cos x - \sin x.$$

3. Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = \sqrt{\sin x}\,, \quad y = \frac{1}{1 + \sin x}\,, \quad y = \log(\sin x), \quad y = \arcsin\frac{x}{x - 1}\,.$$

4. Ποιες είναι οι αντίστροφες συναρτήσεις των $y = \arcsin x$ και $y = \arctan x$; Ποια είναι τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους;

   (Υπόδειξη: *Δεν* είναι οι $x = \sin y$ και $x = \tan y$.)

5. Σχεδιάστε τα γραφήματα των

   $y = \arccos(\cos x)$, $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arctan(\tan x)$, $y = \operatorname{arccot}(\cot x)$.

6. Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = x\sin x$ στο $[0,+\infty)$. Παρατηρήστε ότι, λόγω των ανισοτήτων $-x \leq x\sin x \leq x$, το γράφημα της $y = x\sin x$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = -x$ και $y = x$ και ότι στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 1$, δηλαδή στους $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\,(k = 0,1,2,\dots)$, το γράφημα της $y = x\sin x$ «ακουμπά» την ευθεία $y = x$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = -1$, δηλαδή στους $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi\,(k = 0,1,2,\dots)$, το γράφημα της $y = x\sin x$ «ακουμπά» την ευθεία $y = -x$. Σε ποια σημεία το γράφημα της $y = x\sin x$ τέμνει τον x-άξονα;

   Σχεδιάστε το γράφημα της $y = x\sin x$ που αντιστοιχεί στο $[0,+\infty)$ και, χρησιμοποιώντας το ότι η $y = x\sin x$ είναι άρτια, σχεδιάστε και το γράφημά της που αντιστοιχεί στο $(-\infty,0]$.

7. Θεωρήστε την $y = \sin\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$. Παρατηρήστε ότι το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = -1$ και $y = 1$.

   Βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων $\sin\frac{1}{x} = 1$ και $\sin\frac{1}{x} = -1$ στο $(0,+\infty)$. Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών ορίζουν άπειρα διαδοχικά υποδιαστήματα του $(0,+\infty)$ τα οποία «συσσωρεύονται» στον 0 και στα οποία η $y = \sin\frac{1}{x}$ είναι εναλλάξ γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x} = 1$ το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ «ακουμπά» την ευθεία $y = 1$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin\frac{1}{x} = -1$ το γράφημα «ακουμπά» την ευθεία $y = -1$. Σε ποια σημεία το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ τέμνει τον x-άξονα;

   Σχεδιάστε το γράφημα της $y = \sin\frac{1}{x}$ που αντιστοιχεί στο $(0,+\infty)$ και, χρησιμοποιώντας το ότι η $y = \sin\frac{1}{x}$ είναι περιττή, σχεδιάστε και το γράφημά της που αντιστοιχεί στο $(-\infty,0)$.

8. Συμβουλευόμενοι τις δυο προηγούμενες ασκήσεις, σχεδιάστε τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων.

   $$y = x^2\sin x, \qquad y = \sqrt{x}\sin x, \qquad y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,.$$

3.11 Υπερβολικές και αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Α. Υπερβολικές συναρτήσεις.

Για κάθε x συμβολίζουμε

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,, \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,.$$

Οι αριθμοί αυτοί ονομάζονται **υπερβολικό συνημίτονο**, **υπερβολικό ημίτονο**, **υπερβολική εφαπτόμενη** και **υπερβολική συνεφαπτόμενη** του x, αντιστοίχως.

Πρόταση 3.1 (1) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$.
(2) $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$.
(3) $\cosh(-x) = \cosh x$, $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\tanh(-x) = -\tanh x$, $\coth(-x) = -\coth x$.
(4) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$, $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.
(5) $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\frac{x-y}{2}\sinh\frac{x+y}{2}$, $\sinh x - \sinh y = 2\sinh\frac{x-y}{2}\cosh\frac{x+y}{2}$.
(6) (i) $1 \leq \cosh x < \cosh x'$, *αν* $0 \leq x < x'$ (ii) $1 \leq \cosh x < \cosh x'$, *αν* $x' < x \leq 0$.
(7) $\sinh x < \sinh x'$, *αν* $x < x'$.

Όλες οι ιδιότητες στην Πρόταση 3.1 αποδεικνύονται με λίγες πράξεις.

Είναι εμφανής η ομοιότητα πολλών από τις ιδιότητες στην Πρόταση 3.1 με ιδιότητες στην Πρόταση 1.12. Πίσω από αυτήν την ομοιότητα κρύβονται δυο ισότητες ανάλογες των $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Αυτές είναι οι

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

και οι ισοδύναμές τους $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ και $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$. Αυτές οι ισότητες εντάσσονται στο πλαίσιο της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών και δε θα επεκταθούμε επ΄ αυτών.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$\boxed{y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **υπερβολικό συνημίτονο**. Είναι σαφές από την Πρόταση 3.1 ότι η συνάρτηση $y = \cosh x$ είναι άρτια και ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της $y = \cosh x$ θεωρούμε την $\frac{e^x+e^{-x}}{2} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και την γράφουμε $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$. Ορίζουμε $t = e^x$, οπότε η εξίσωση γράφεται $t^2 - 2yt + 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 4y^2 - 4$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.
(i) Έστω $y^2 < 1$. Τότε η εξίσωση $t^2 - 2yt + 1 = 0$ δεν έχει καμιά λύση.
(ii) Έστω $y^2 = 1$. Αν $y = -1$, η $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχει λύση $e^x = t = -1$ που, προφανώς, απορρίπτεται. Αν $y = 1$, η $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχει λύση $e^x = t = 1$ που δίνει λύση $x = 0$ για την αρχική εξίσωση $\cosh x = 1$.
(iii) Έστω $y^2 > 1$. Τότε η $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχει δυο (διαφορετικές) λύσεις με άθροισμα $2y$ και γινόμενο 1. Αν $y < -1$, τότε οι δυο αυτές λύσεις έχουν αρνητικό

άθροισμα και θετικό γινόμενο, οπότε είναι *αρνητικές* και απορρίπτονται. Τέλος, αν $y > 1$, τότε οι δυο λύσεις της $t^2 - 2yt + 1 = 0$ έχουν θετικό άθροισμα και θετικό γινόμενο, οπότε είναι *θετικές*. Επειδή το γινόμενό τους είναι 1, η μεγαλύτερη είναι μεγαλύτερη από τον 1 και η μικρότερη είναι ανάμεσα στον 0 και τον 1. Οι δυο αυτές λύσεις είναι οι $t = y \pm \sqrt{y^2-1}$ και ισχύει $0 < y - \sqrt{y^2-1} < 1 < y + \sqrt{y^2-1}$. Αυτές δίνουν δυο λύσεις τις αρχικής εξίσωσης, τις $x = \log(y \pm \sqrt{y^2-1})$, οι οποίες είναι αντίθετες. Μάλιστα, ισχύει $\log(y - \sqrt{y^2-1}) < 0 < \log(y + \sqrt{y^2-1})$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το σύνολο τιμών της $y = \cosh x$, δηλαδή το σύνολο των y για τους οποίους η εξίσωση $\cosh x = y$ έχει τουλάχιστον μια λύση, είναι το $[1, +\infty)$. Μάλιστα, είναι φανερό από την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου ότι για κάθε y στο $[1, +\infty)$ η εξίσωση $\cosh x = y$ έχει μια λύση στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και μια λύση στο $[0, +\infty)$. Άρα το $[1, +\infty)$ είναι το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί και στα δυο διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Βάσει των παραπάνω, το γράφημα της $y = \cosh x$ είναι καμπύλη, η οποία κατεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και πάνω προς το σημείο $(0, 1)$ και κατόπιν ανεβαίνει από το σημείο $(0, 1)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς τον y-άξονα.

Κατόπιν θεωρούμε την

$$\boxed{y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **υπερβολικό ημίτονο**. Η $y = \sinh x$ είναι περιττή και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$.

Για να βρούμε το σύνολο τιμών της $y = \sinh x$ θεωρούμε την $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ ως εξίσωση με άγνωστο x και την γράφουμε $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. Ορίζουμε $t = e^x$ και η εξίσωση γράφεται $t^2 - 2yt - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = 4y^2 + 4$. Επομένως, η $t^2 - 2yt - 1 = 0$ έχει δυο (διαφορετικές) λύσεις με άθροισμα $2y$ και γινόμενο -1, οπότε μια λύση είναι θετική και η άλλη είναι αρνητική. Οι δυο αυτές λύσεις είναι οι $t = y \pm \sqrt{y^2+1}$ και ισχύει $y - \sqrt{y^2+1} < 0 < y + \sqrt{y^2+1}$. Η αρνητική λύση, προφανώς, απορρίπτεται και από τη θετική λύση προκύπτει η λύση $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$ της εξίσωσης $\sinh x = y$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το σύνολο τιμών της $y = \sinh x$, δηλαδή το σύνολο των y για τους οποίους η εξίσωση $\sinh x = y$ έχει τουλάχιστον μια λύση, είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Άρα το γράφημα της $y = \sinh x$ είναι μια καμπύλη η οποία ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω. Το γράφημα αυτό περιέχει το σημείο $(0, 0)$ και είναι συμμετρικό ως προς το σημείο $(0, 0)$.

Α. Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις.

Θα μελετήσουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις των $y = \cosh x$ και $y = \sinh x$.

Η $y = \cosh x$ δεν είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$· για κάθε $y > 1$ υπάρχουν δυο (διαφορετικές) λύσεις της εξίσωσης $\cosh x = y$. Όμως, στο διάστημα $[0, +\infty)$ του πεδίου ορισμού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[1,+\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$. Για κάθε y στο $[1,+\infty)$ λύσουμε την $\cosh x = y$ και κρατάμε τη λύση που ανήκει στο $[0,+\infty)$. Όπως έχουμε δει, η λύση αυτή είναι η $x = \log(y+\sqrt{y^2-1})$. Άρα ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι, μετά από τη συνηθισμένη εναλλαγή των x και y,

$$y = \log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Κατά παράδοση και κατ΄ αναλογία με την αντίστροφη συνάρτηση της $y = \cos x$, που συμβολίζεται $y = \arccos x$ και ονομάζεται τόξο-συνημίτονο, η παράσταση $\log(x+\sqrt{x^2-1})$ συμβολίζεται $\operatorname{arccosh} x$ και ονομάζεται **τόξο-υπερβολικό συνημίτονο** του x, οπότε ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης γράφεται

$$\boxed{y = \operatorname{arc}\cosh x.}$$

Βάσει των προηγουμένων το γράφημα της $y = \operatorname{arc}\cosh x$ είναι μια καμπύλη της οποίας η κατακόρυφη προβολή στον x-άξονα είναι το πεδίο ορισμού $[1,+\infty)$ και η οριζόντια προβολή στον y-άξονα είναι το σύνολο τιμών $[0,+\infty)$. Δηλαδή η καμπύλη ανεβαίνει από το σημείο $(1,0)$ προς απεριόριστα δεξιά και πάνω.

Ομοίως, επειδή η $y = \cosh x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $[1,+\infty)$, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,0]$ και ο τύπος της είναι $y = \log(x-\sqrt{x^2-1})$. Μάλιστα, επειδή είναι $\log(x-\sqrt{x^2-1}) = -\log(x+\sqrt{x^2-1}) = -\operatorname{arc}\cosh x$, ο τύπος αυτής της αντίστροφης συνάρτησης γράφεται και $y = -\operatorname{arc}\cosh x$.

Η $y = \sinh x$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty,+\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$ και ο τύπος της, σύμφωνα με τα παραπάνω, είναι

$$y = \log(x+\sqrt{x^2+1}).$$

Κατά παράδοση και κατ΄ αναλογία με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, η έκφραση $\log(x+\sqrt{x^2+1})$ συμβολίζεται $\operatorname{arcsinh} x$ και ονομάζεται **τόξο-υπερβολικό ημίτονο** του x, οπότε ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης γράφεται

$$\boxed{y = \operatorname{arc}\sinh x.}$$

Το γράφημα της $y = \operatorname{arc}\sinh x$ είναι μια καμπύλη που ανεβαίνει από απεριόριστα αριστερά και κάτω προς απεριόριστα δεξιά και πάνω και περιέχει το σημείο $(0,0)$.

Ασκήσεις.

1. Μελετήστε τις συναρτήσεις

$$y = \tanh x, \qquad y = \coth x.$$

Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους, τα διαστήματα μονοτονίας τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

Βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις που αντιστοιχούν στα διαστήματα μονοτονίας, τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.

2. Αποδείξτε ότι

$$1-(\tanh x)^2=\frac{1}{(\cosh x)^2}\,,\qquad (\coth x)^2-1=\frac{1}{(\sinh x)^2}\,.$$

3. Αποδείξτε ότι

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}\,,\qquad \coth(x+y)=\frac{\coth x\coth y+1}{\coth x+\coth y}\,.$$

4. Αποδείξτε ότι

$$\cosh(2x)=(\cosh x)^2+(\sinh x)^2=2(\cosh x)^2-1=1+2(\sinh x)^2\,,$$

$$\sinh(2x)=2\sinh x\cosh x,$$

$$\tanh(2x)=\frac{2\tanh x}{1+(\tanh x)^2}\,,\qquad \coth(2x)=\frac{(\coth x)^2+1}{2\coth x}\,.$$

5. Αποδείξτε ότι

$$\cosh x=\frac{1+(\tanh\frac{x}{2})^2}{1-(\tanh\frac{x}{2})^2}\,,\qquad \sinh x=\frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-(\tanh\frac{x}{2})^2}\,,$$

$$\tanh x=\frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1+(\tanh\frac{x}{2})^2}\,,\qquad \coth x=\frac{1+(\tanh\frac{x}{2})^2}{2\tanh\frac{x}{2}}\,.$$

Κεφάλαιο 4

Όρια συναρτήσεων.

Όριο συνάρτησης: ορισμός «με τους ϵ και δ» και παραλλαγές, παραδείγματα. Όρια και γραφήματα. Ασύμπτωτες ευθείες. Όρια και αλγεβρικές πράξεις. Αλλαγή μεταβλητής. Όρια και ανισότητες. Όρια και φραγμένες συναρτήσεις. Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες. Όρια ρητών συναρτήσεων, δυνάμεων, εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Όρια μονότονων συναρτήσεων.

4.1 Ορισμοί, παραδείγματα.

Περίπτωση 1. Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στην ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ δυο διαστημάτων αριστερά *και* δεξιά του ξ. Δε μας ενδιαφέρει αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη ή όχι εκτός της ένωσης αυτής και, ειδικότερα, στον ξ.

Υποπερίπτωση 1_α*: Όριο = αριθμός.*

Παραδείγματα: (1) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Για κάθε $x \neq 1$ ο τύπος της συνάρτησης απλοποιείται σε

$$y = 3x + 2.$$

Προσέξτε: η $y = \frac{3x^2-x-2}{x-1}$ δεν ταυτίζεται με την $y = 3x + 2$. Η πρώτη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ενώ η δεύτερη το $(-\infty, +\infty)$. Οι δυο συναρτήσεις ταυτίζονται στην τομή των πεδίων ορισμού τους, δηλαδή στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι, αν η ανεξάρτητη μεταβλητή x πάρει τιμές «αρκετά κοντά» στην τιμή 1 και, υποχρεωτικά, διαφορετικές από την τιμή 1, τότε οι αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής $y = \frac{3x^2-x-2}{x-1} = 3x + 2$ θα είναι «όσο θέλουμε κοντά» στην τιμή 5. Αυτό μας το λέει η απλή εμπειρία από αριθμητικές πράξεις.

Για παράδειγμα, αν $x = 1,00023$, τότε $y = 5,00069$ και, αν $x = 1,000000035$, τότε $y = 5,000000105$ και, αν $x = 0,999999999913$, τότε $y = 4,999999999739$.

(2) Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση $y = 3x + 2$.

Παρατηρούμε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ότι, αν η ανεξάρτητη μεταβλητή x πάρει τιμές «αρκετά κοντά» στην τιμή 1 και διαφορετικές από την τιμή 1, τότε οι αντίστοιχες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής $y = 3x + 2$ θα είναι «όσο θέλουμε κοντά» στην τιμή 5. Τα αριθμητικά στοιχεία του προηγούμενου παραδείγματος ισχύουν και σ' αυτό το παράδειγμα. Προσέξτε, όμως, μια διαφορά από το προηγούμενο παράδειγμα. Για την $y = \frac{3x^2-x-2}{x-1}$, από τις τιμές που μπορεί να πάρει ο x «αρκετά κοντά» στον 1 εξαιρείται η τιμή 1. Για την $y = 3x + 2$, από τις τιμές που μπορεί να πάρει ο x «αρκετά κοντά» στον 1 *δεν* εξαιρείται η τιμή 1. Εν τούτοις, και στις δυο περιπτώσεις, *εξετάζουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο x «αρκετά κοντά» στον 1 εξαιρώντας την τιμή 1.*

Και στα δυο προηγούμενα παραδείγματα είχαμε μια συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη, τουλάχιστον, σε δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά ενός αριθμού ξ, δηλαδή σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ και παρατηρήσαμε ότι η συνάρτηση έχει την εξής ιδιότητα:

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή πάρει τιμές «αρκετά κοντά» στην τιμή ξ, τότε η εξαρτημένη μεταβλητή θα πάρει αντίστοιχες τιμές $f(x)$ «όσο θέλουμε κοντά» σε έναν άλλο αριθμό η.

Αυτήν την κατάσταση θα τη θέσουμε σε πιο θεωρητική βάση ώστε να μπορούμε να χειριστούμε πιο περίπλοκες συναρτήσεις όπου οι αριθμητικοί υπολογισμοί είναι δύσκολοι ή και ανέφικτοι και, μάλιστα, ώστε να μπορούμε εκ των προτέρων να βγάλουμε και συμπεράσματα για αριθμητικούς υπολογισμούς. Σ' αυτό θα μας βοηθήσει η εμπειρία μας από τα όρια ακολουθιών.

Όταν λέμε ότι ο $f(x)$ θα είναι «όσο θέλουμε κοντά» στον η, εννοούμε ότι η απόσταση $|f(x) - \eta|$ θα είναι «μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό». Όταν λέμε «αν ο x είναι αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$», εννοούμε «αν η απόσταση $|x - \xi|$ είναι μικρότερη από κάποιον κατάλληλο θετικό αριθμό και θετική». Άρα η προηγούμενη ιδιότητα αναδιατυπώνεται ως εξής:

Η απόσταση $|f(x) - \eta|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ αν ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και η απόσταση $|x-\xi|$ γίνει μικρότερη από κάποιον κατάλληλο $\delta > 0$ και είναι $\neq 0$.

Ή, ισοδύναμα,

Για οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος κατάλληλος $\delta > 0$ ώστε, αν είναι $0 < |x - \xi| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$.

Παραδείγματα: (1) Θεωρούμε και πάλι τη συνάρτηση $y = \frac{3x^2-x-2}{x-1}$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε (αλλά γενικό και όχι συγκεκριμένο) $\epsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε, αν $0 < |x-1| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, να συνεπάγεται $|\frac{3x^2-x-2}{x-1} - 5| < \epsilon$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι, αν $0 < |x-1| < \delta$, τότε αυτομάτως ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, διότι από τις ανισότητες αυτές αποκλείεται η τιμή 1 για τον x και το πεδίο ορισμού περιέχει κάθε άλλη τιμή του x. Άρα πρέπει να βρούμε κάποιον κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε, αν $0 < |x-1| < \delta$, να συνεπάγεται $|\frac{3x^2-x-2}{x-1} - 5| < \epsilon$. Τώρα, με την προϋπόθεση $x \neq 1$, για να είναι $|\frac{3x^2-x-2}{x-1} - 5| < \epsilon$ αρκεί να είναι $|(3x+2)-5| < \epsilon$ αρκεί να είναι $3|x-1| < \epsilon$ αρκεί να είναι $|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$. Επομένως, αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ ή και οποιονδήποτε άλλον μικρότερο θετικό αριθμό, τότε από την $0 < |x-1| < \delta$ συνεπάγεται $|x-1| < \frac{\epsilon}{3}$ και από αυτήν συνεπάγεται $|\frac{3x^2-x-2}{x-1} - 5| < \epsilon$.

(2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = x^2 + 3$. Αυτή έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και, επομένως, ορίζεται σε δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά του 0. Βλέπουμε ότι, αν ο x πάρει τιμές αρκετά κοντά στην τιμή 0 και όχι ίσες με 0, τότε οι αντίστοιχες τιμές του $y = x^2 + 3$ θα είναι όσο θέλουμε κοντά στην τιμή 3. Για παράδειγμα, αν $x = 0,004$, τότε $y = 3,000016$ και, αν $x = -0,000005$, τότε $y = 3,000000000025$. Γενικότερα, παίρνουμε έναν οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε, αν $0 < |x-0| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, να συνεπάγεται $|(x^2+3)-3| < \epsilon$. Δηλαδή, πρέπει, αν $0 < |x| < \delta$, να συνεπάγεται $x^2 < \epsilon$. Τώρα, βλέπουμε ότι για να είναι $x^2 < \epsilon$ αρκεί να είναι $|x| < \sqrt{\epsilon}$. Άρα, αν επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\epsilon}$ ή και οποιονδήποτε άλλον μικρότερο θετικό αριθμό, τότε από την $0 < |x| < \delta$ συνεπάγεται $|x| < \sqrt{\epsilon}$ και από αυτήν συνεπάγεται $|(x^2+3)-3| < \epsilon$.

Μετά από αυτά τα παραδείγματα, μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό.

Έστω ότι *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος κατάλληλος $\delta > 0$ ώστε, αν είναι $0 < |x-\xi| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα είναι $|f(x)-\eta| < \epsilon$*. Ισοδύναμα: *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε από το $0 < |x-\xi| < \delta$ και από το ότι ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης να συνεπάγεται $|f(x)-\eta| < \epsilon$*. Ισοδύναμα: *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x)-\eta| < \epsilon$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$*. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **συγκλίνει στον** η ή **τείνει στον** η ή **έχει όριο τον** η **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ.

Όταν γράφουμε $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο x παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$. Αυτό είναι ανεξάρτητο από το αν η συνάρτηση ορίζεται ή όχι στον ξ.

Δείτε την ομοιότητα με τον ορισμό του ορίου ακολουθίας $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Στην ανισότητα $|x_n - x| < \epsilon$ ο ϵ αποτελεί το «μέτρο» του πόσο μικρή *θέλουμε να είναι* η απόσταση $|x_n - x|$ και στην ανισότητα $n \geq n_0$ ο n_0 αποτελεί το «μέτρο» του πόσο μεγάλος *αρκεί να είναι* ο n ώστε να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$. Στην περίπτωση του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, στην ανισότητα $|f(x)-\eta| < \epsilon$ ο ϵ αποτελεί το «μέτρο» του πόσο μικρή *θελουμε να είναι* η απόσταση $|f(x)-\eta|$ και στην ανισότητα $0 < |x-\xi| < \delta$ ο δ αποτελεί το «μέτρο» του πόσο μικρή *αρκεί να είναι* η απόσταση $|x-\xi|$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta| < \epsilon$. Θα παρατηρήσετε την ίδια ομοιότητα και στις άλλες περιπτώσεις ορίου συνάρτησης που θα εξετάσουμε.

Στα επόμενα παραδείγματα για να αποδείξουμε το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, *χρησιμοποιώντας τον ορισμό*, θα ακολουθούμε την εξής διαδικασία (παρόμοια με την ανάλογη διαδικασία για το όριο ακολουθίας). Θα παίρνουμε $\epsilon > 0$ (γενικό και όχι συγκεκριμένο) και θα δημιουργούμε μια «αλυσίδα» από ανισότητες, αρχίζοντας από την $|f(x)-\eta| < \epsilon$ και καταλήγοντας στην $0 < |x-\xi| < \delta$, παίρνοντας υπ᾽ όψη ότι ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και προσέχοντας ώστε κάθε ανισότητα να συνεπάγεται την προηγούμενή της. Δηλαδή, θα περνάμε από ανισότητα σε ανισότητα ως εξής: «είναι ανισότητα$_1$ αρκεί να είναι ανισότητα$_2$» ή, συμβολικά, «ανισότητα$_1$ $\Longleftarrow$ ανισότητα$_2$». Τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, $|f(x)-\eta| < \epsilon$.

Μερικές φορές, αρχίζοντας από την ανισότητα $|f(x)-\eta| < \epsilon$ και πριν καταλήξουμε στην $0 < |x-\xi| < \delta$, φτάνουμε σε μια ανισότητα $x > a$ (με κάποιον συγκεκριμένο a). Τότε ελέγχουμε αν $\xi > a$ και στην περίπτωση αυτή συνεχίζουμε ως εξής. Παρατηρούμε ότι, αν επιλέξουμε δ ίσο με την απόσταση του ξ από τον a, δηλαδή $\delta = \xi - a > 0$, τότε είναι $x > a$ αρκεί να είναι $0 < |x-\xi| < \delta$ ή, ισοδύναμα, για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ συνεπάγεται $x > a$, οπότε, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, συνεπάγεται $|f(x)-\eta| < \epsilon$.

Επίσης, μερικές φορές, αρχίζοντας από την $|f(x)-\eta| < \epsilon$, φτάνουμε σε μια ανισότητα $x < b$ (με κάποιον συγκεκριμένο b). Τότε ελέγχουμε αν $\xi < b$ και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι, αν επιλέξουμε δ ίσο με την απόσταση του ξ από τον b, δηλαδή $\delta = b - \xi > 0$, τότε είναι $x < b$ αρκεί να είναι $0 < |x-\xi| < \delta$ ή, ισοδύναμα, για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ συνεπάγεται $x < b$, οπότε, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, συνεπάγεται $|f(x)-\eta| < \epsilon$.

Τέλος, μερικές φορές από την $|f(x)-\eta| < \epsilon$ φτάνουμε σε μια διπλή ανισότητα $a < x < b$ (με κάποιους συγκεκριμένους a, b). Τότε ελέγχουμε αν $a < \xi < b$ και στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι, αν επιλέξουμε δ ίσο με την μικρότερη από τις αποστάσεις του ξ από τους a και b, δηλαδή $\delta = \min\{\xi - a, b - \xi\}$, τότε είναι $a < x < b$ αρκεί να είναι $0 < |x-\xi| < \delta$ ή, ισοδύναμα, για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ συνεπάγεται $a < x < b$, οπότε, λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών, συνεπάγεται $|f(x)-\eta| < \epsilon$.

Παραδείγματα: (1) Θεωρούμε μια σταθερή συνάρτηση $y = c$ και θα αποδείξουμε με τον ορισμό του ορίου ότι για κάθε ξ είναι

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} c = c.}$$

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι για κάθε x η απόσταση της τιμής c της συνάρτησης από τον αριθμό c είναι $|c-c| = 0$. Μπορούμε, λοιπόν, να επιλέξουμε οποιονδήποτε $\delta > 0$ (για παράδειγμα, $\delta = 1$) και τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $|c-c| = 0 < \epsilon$.

(2) Έστω $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της $y = |x - \xi|^a$ είναι το $(-\infty, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση είναι ορισμένη σε δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά του ξ. Από την απλή εμπειρία μας με υπολογισμούς και με τις ιδιότητες των δυνάμεων (τουλάχιστον σε απλές περιπτώσεις, όπως $a = 1$ ή $a = 2$ ή $a = \frac{1}{2}$) καταλαβαίνουμε ότι, αν ο x παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον ξ οι οποίες είναι $\neq \xi$, τότε ο αντίστοιχος $y = |x-\xi|^a$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον 0. Πρέπει, επομένως, να ισχύει $\lim_{x\to\xi} |x-\xi|^a = 0$ και θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ να ισχύει $\big||x - \xi|^a - 0\big| < \epsilon$.

Για να είναι $\big||x - \xi|^a - 0\big| < \epsilon$ αρκεί να είναι $|x - \xi|^a < \epsilon$ αρκεί να είναι $|x - \xi| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$ αρκεί να είναι $0 < |x - \xi| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$. Είναι προφανές ότι, αν επιλέξουμε $\delta = \epsilon^{\frac{1}{a}}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $0 < |x-\xi| < \epsilon^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, ισχύει $\big||x - \xi|^a - 0\big| < \epsilon$. Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^a = 0 \qquad (a > 0).}$$

Ειδικώτερα: $\lim_{x\to\xi} |x - \xi| = 0$, $\lim_{x\to\xi}(x - \xi)^2 = 0$, $\lim_{x\to\xi} \sqrt{|x - \xi|} = 0$.

(3) Η $y = x^2 + 3$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$, οπότε είναι ορισμένη σε δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά του 1. Κάνουμε λίγους υπολογισμούς με αριθμούς x αρκετά κοντά στον 1 και βλέπουμε ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί $y = x^2 + 3$ είναι όσο θέλουμε κοντά στον 4. Άρα μάλλον είναι $\lim_{x\to1}(x^2 + 3) = 4$ και θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε κάποιον $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $0 < |x - 1| < \delta$ να ισχύει $|(x^2 + 3) - 4| < \epsilon$.

Για να είναι $|(x^2 + 3) - 4| < \epsilon$ αρκεί να είναι $|x^2 - 1| < \epsilon$ αρκεί να είναι $1-\epsilon < x^2 < 1+\epsilon$. Τώρα μάλλον πρέπει να εξαγάγουμε τετραγωνικές ρίζες, οπότε πρέπει να προσέξουμε το πρόσημο του $1 - \epsilon$ και γι αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις.

Στην περίπτωση $\epsilon > 1$ για να είναι $1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon$ αρκεί (επειδή $x^2 \geq 0$) να είναι $x^2 < 1 + \epsilon$ αρκεί να είναι $|x| < \sqrt{1 + \epsilon}$ αρκεί να είναι $-\sqrt{1 + \epsilon} < x < \sqrt{1 + \epsilon}$. Παρατηρούμε ότι ο 1 είναι ανάμεσα στους $-\sqrt{1 + \epsilon}$ και $\sqrt{1 + \epsilon}$, οπότε, αν θεωρήσουμε δ ίσο με τη μικρότερη από τις αποστάσεις του 1 από τους δυο αυτούς αριθμούς, δηλαδή $\delta = \min\{1 + \sqrt{1 + \epsilon}, \sqrt{1 + \epsilon} - 1\} = \sqrt{1 + \epsilon} - 1$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ ισχύει $-\sqrt{1 + \epsilon} < x < \sqrt{1 + \epsilon}$, οπότε (λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών) ισχύει $1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon$.

Στην περίπτωση $0 < \epsilon \leq 1$ για να είναι $1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon$ αρκεί να είναι $\sqrt{1 - \epsilon} < |x| < \sqrt{1 + \epsilon}$ αρκεί να είναι $-\sqrt{1 + \epsilon} < x < -\sqrt{1 - \epsilon}$ ή $\sqrt{1 - \epsilon} < x < \sqrt{1 + \epsilon}$ αρκεί (προσέξτε: *μας ενδιαφέρουν οι x που είναι κοντά στον 1, οπότε περιοριζόμαστε στο διάστημα που περιέχει τον 1*) να είναι $\sqrt{1 - \epsilon} < x < \sqrt{1 + \epsilon}$. Ο 1 είναι ανάμεσα στους $\sqrt{1 - \epsilon}$ και $\sqrt{1 + \epsilon}$, οπότε, αν $\delta = \min\{1-\sqrt{1 - \epsilon}, \sqrt{1 + \epsilon}-1\} = \sqrt{1 + \epsilon} - 1$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - 1| < \delta$ ισχύει $\sqrt{1 - \epsilon} < x < \sqrt{1 + \epsilon}$, οπότε (λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών) ισχύει $1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να επιλέξουμε τον $\delta = \sqrt{1+\epsilon} - 1 > 0$ και τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ ισχύει $1-\epsilon < x^2 < 1+\epsilon$, οπότε (λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών) ισχύει $|(x^2+3)-4| < \epsilon$.

Άρα $\lim_{x\to 1}(x^2+3) = 4$.

(4) Η $y = \frac{1}{x+1}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$, οπότε είναι ορισμένη σε δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά του $1\cdot$ συγκεκριμένα, στην ένωση $(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Κάνοντας λίγους υπολογισμούς με αριθμούς x αρκετά κοντά στον 1 βλέπουμε ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί $y = \frac{1}{x+1}$ είναι όσο θέλουμε κοντά στον $\frac{1}{2}$. Δηλαδή, πρέπει να είναι $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ και θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε $x \neq -1$) που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ να ισχύει $\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.

Για να είναι $\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$. Επειδή μάλλον θα χρειαστεί να αντιστρέψουμε, πρέπει να προσέξουμε το πρόσημο του $\frac{1}{2} - \epsilon$, οπότε διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ως προς τον ϵ.

Αν $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, τότε είναι $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{2}{1+2\epsilon} < x+1 < \frac{2}{1-2\epsilon}$ αρκεί να είναι $\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon} < x < \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$. Βλέπουμε ότι ο 1 είναι ανάμεσα στους $\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$ και $\frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$, οπότε, αν θεωρήσουμε $\delta = \min\left\{1 - \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} - 1\right\} = \min\left\{\frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{4\epsilon}{1-2\epsilon}\right\} = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ ισχύει $\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon} < x < \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$ και, επομένως, ισχύει $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$.

Αν $\epsilon = \frac{1}{2}$, τότε είναι $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$ αρκεί να είναι $0 < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{2}{1+2\epsilon} < x+1$ αρκεί να είναι $x > \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$. Επειδή ο 1 είναι $> \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$, αν θεωρήσουμε $\delta = 1 - \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon} = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ ισχύει $x > \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$, οπότε ισχύει $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$.

Τέλος, αν $\epsilon > \frac{1}{2}$, τότε είναι $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$ αρκεί να είναι $x+1 < \frac{2}{1-2\epsilon}$ ή $x+1 > \frac{2}{1+2\epsilon}$ αρκεί να είναι $x < \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}$ ή $x > \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$ αρκεί (προσέξτε: *μας ενδιαφέρουν οι x που είναι κοντά στο 1, οπότε περιοριζόμαστε στο διάστημα που περιέχει τον 1*) να είναι $x > \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$. Ο 1 είναι $> \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$, οπότε, αν θεωρήσουμε $\delta = 1 - \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon} = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ ισχύει $x > \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$ και, επομένως, ισχύει $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση υπάρχει ο $\delta = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon} > 0$ ώστε για κάθε $x \neq -1$ που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \delta$ ισχύει $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x+1} < \frac{1}{2} + \epsilon$, οπότε (λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών) ισχύει $\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon$.

Άρα $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Υποπερίπτωση 1_β : Όριο $= +\infty$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι, αν ο x πάρει τιμές αρκετά κοντά στον αριθμό 1 και $\neq 1$, τότε οι αντίστοιχες τιμές του $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ θα είναι όσο θέλουμε μεγάλες θετικές. Για παράδειγμα: αν $x = 1,0003$, τότε $y = 11111111,11\ldots$ και, αν $x = 0,9999997$, τότε $y = 11111111111111,11\ldots$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε μια συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη, τουλάχιστον, σε δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά ενός αριθμού ξ, δηλαδή σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ και παρατηρήσαμε ότι η συνάρτηση έχει την εξής ιδιότητα:

Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή πάρει τιμές «αρκετά κοντά» στην τιμή ξ, τότε η εξαρτημένη μεταβλητή θα πάρει αντίστοιχες τιμές $f(x)$ «όσο θέλουμε μεγάλες θετικές».

Όταν λέμε ότι ο $f(x)$ θα είναι «όσο θέλουμε μεγάλος θετικός», εννοούμε ότι ο $f(x)$ θα είναι «μεγαλύτερος από οποιονδήποτε θετικό αριθμό». Όταν λέμε «αν ο x είναι αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$», εννοούμε «αν η απόσταση $|x - \xi|$ είναι μικρότερη από κάποιον κατάλληλο θετικό αριθμό και θετική». Άρα η προηγούμενη ιδιότητα αναδιατυπώνεται ως εξής:

Ο $f(x)$ θα γίνει μεγαλύτερος από οποιονδήποτε $M > 0$ αν ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και η απόσταση $|x-\xi|$ γίνει μικρότερη από κάποιον κατάλληλο $\delta > 0$ και είναι $\neq 0$.

Ή, ισοδύναμα,

Για οποιονδήποτε $M > 0$ υπάρχει κάποιος κατάλληλος $\delta > 0$ ώστε, αν είναι $0 < |x - \xi| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα είναι $f(x) > M$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε πάλι τη συνάρτηση $y = \frac{1}{(x-1)^2}$. Παίρνουμε έναν οποιονδήποτε (αλλά γενικό και όχι συγκεκριμένο) $M > 0$ και θα βρούμε κάποιον κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε, αν $0 < |x - 1| < \delta$ και ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, να συνεπάγεται $\frac{1}{(x-1)^2} > M$. Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι, αν $0 < |x - 1| < \delta$, τότε αυτομάτως ο x ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, διότι από τις ανισότητες αυτές αποκλείεται η τιμή 1 για τον x και το πεδίο ορισμού περιέχει κάθε άλλη τιμή του x. Άρα πρέπει να βρούμε κάποιον κατάλληλο $\delta > 0$ ώστε, αν $0 < |x - 1| < \delta$, να συνεπάγεται $\frac{1}{(x-1)^2} > M$. Βλέπουμε ότι για να είναι $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ αρκεί να είναι $(x - 1)^2 < \frac{1}{M}$ αρκεί να είναι $|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$. Συμπεραίνουμε ότι, αν επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ ή και οποιονδήποτε άλλον μικρότερο θετικό αριθμό, τότε από την $0 < |x - 1| < \delta$ συνεπάγεται $|x - 1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$ και από αυτήν συνεπάγεται $\frac{1}{(x-1)^2} > M$.

Μετά από αυτό το παράδειγμα, μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό.

Έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος κατάλληλος* $\delta > 0$ *ώστε, αν είναι* $0 < |x - \xi| < \delta$ *και ο* x *ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα είναι* $f(x) > M$. Ισοδύναμα: *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε από το* $0 < |x - \xi| < \delta$ *και από το ότι ο* x *ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης να συνεπάγεται* $f(x) > M$. Ισοδύναμα: *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) > M$ *για κάθε* x *που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και* *ικανοποιεί την* $0 < |x - \xi| < \delta$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **τείνει στο** $+\infty$ ή **έχει όριο το** $+\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ.

Παραδείγματα: (1) Έστω $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της $y = |x-\xi|^{-a} = \frac{1}{|x-\xi|^a}$ είναι το $(-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty)$, οπότε περιέχει δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά του ξ. Από την εμπειρία μας, τουλάχιστον στις απλές περιπτώσεις $a = 1$, $a = 2$ (που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα) και $a = \frac{1}{2}$, γνωρίζουμε ότι, αν ο x παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$, τότε ο αντίστοιχος $y = |x - \xi|^{-a}$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε μεγάλες θετικές. Επομένως, εικάζουμε ότι $\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^{-a} = +\infty$. Θα το αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και πρέπει να βρούμε κάποιον $\delta > 0$ ώστε να είναι $|x - \xi|^{-a} > M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή $x \neq \xi$) που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Για να είναι $|x-\xi|^{-a} > M$ αρκεί να είναι $0 < |x-\xi| < M^{-\frac{1}{a}}$, οπότε, αν επιλέξουμε $\delta = M^{-\frac{1}{a}}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $0 < |x - \xi| < M^{-\frac{1}{a}}$ και, επομένως, ισχύει $|x - \xi|^{-a} > M$. Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^{-a} = +\infty \qquad (a > 0).}$$

Ειδικότερα: $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{|x-\xi|} = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{(x-\xi)^2} = +\infty$, $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{\sqrt{|x-\xi|}} = +\infty$.

(2) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ είναι η ένωση $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και περιέχει δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά του -1. Κάνοντας στοιχειώδεις υπολογισμούς με τιμές του x αρκετά κοντά στον -1 και $\neq -1$, παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του $y = \frac{x+2}{(x+1)^2}$ είναι όσο θέλουμε μεγάλες θετικές και, επομένως, φαίνεται ότι $\lim_{x\to-1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty$. Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να είναι $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε $x \neq -1$) που ικανοποιεί την $0 < |x + 1| < \delta$.

Αν $x \neq -1$, για να είναι $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$ αρκεί να είναι $(x+1)^2 < \frac{x+2}{M}$ αρκεί να είναι $x^2 + (2 - \frac{1}{M})x + (1 - \frac{2}{M}) < 0$ αρκεί να είναι $\frac{1-2M-\sqrt{1+4M}}{2M} < x < \frac{1-2M+\sqrt{1+4M}}{2M}$. Παρατηρούμε ότι ο -1 είναι ανάμεσα στους $\frac{1-2M-\sqrt{1+4M}}{2M}$ και $\frac{1-2M+\sqrt{1+4M}}{2M}$, οπότε, αν θεωρήσουμε $\delta = \min\big\{-1 - \frac{1-2M-\sqrt{1+4M}}{2M}, \frac{1-2M+\sqrt{1+4M}}{2M} + 1\big\} = \min\big\{\frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M}, \frac{\sqrt{1+4M}+1}{2M}\big\} = \frac{\sqrt{1+4M}-1}{2M}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x + 1| < \delta$ ισχύει $\frac{1-2M-\sqrt{1+4M}}{2M} < x < \frac{1-2M+\sqrt{1+4M}}{2M}$. Άρα για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x+1| < \delta$ ισχύει (λόγω των αντίστροφων συνεπαγωγών) $\frac{x+2}{(x+1)^2} > M$.

Άρα $\lim_{x\to-1} \frac{x+2}{(x+1)^2} = +\infty$.

Υποπερίπτωση 1_γ *: Όριο* $= -\infty$.

Η υποπερίπτωση αυτή είναι η «συμμετρική» της προηγούμενης. Τώρα οι τιμές της $y = f(x)$ θα είναι όσο θέλουμε μεγάλες αρνητικές (αντί θετικές). Περνάμε κατ' ευθείαν στον ορισμό.

Έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος κατάλληλος* $\delta > 0$ *ώστε, αν είναι* $0 < |x - \xi| < \delta$ *και ο* x *ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, τότε θα είναι* $f(x) < -M$. Ισοδύναμα: *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε από το* $0 < |x - \xi| < \delta$ *και από το ότι ο* x *ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης να συνεπάγεται* $f(x) < -M$. Ισοδύναμα: *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) < -M$ *για κάθε* x *που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και ικανοποιεί την* $0 < |x - \xi| < \delta$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή **τείνει στο** $-\infty$ ή **έχει όριο το** $-\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ.

Η ανισότητα $f(x) < -M$ είναι ισοδύναμη με την $-f(x) > M$ και αυτό, προφανώς, μας επιτρέπει να αναγάγουμε το όριο $\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty$ στο όριο $\lim_{x \to \xi} \big(- f(x) \big) = +\infty$. Αυτό θα το ξαναδούμε στην επόμενη ενότητα όπου θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των ορίων. Άρα κάθε παράδειγμα της περίπτωσης 1_β μετατρέπεται σε αντίστοιχο παράδειγμα της περίπτωσης 1_γ.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x \to -1} \big(- \frac{x+2}{(x+1)^2} \big) = -\infty$.
(2) $\lim_{x \to \xi} \big(- |x - \xi|^{-a} \big) = -\infty \quad (a > 0)$.

Περίπτωση 2. Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στην ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ δυο διαστημάτων αριστερά *και* δεξιά του ξ. Και πάλι, δε μας ενδιαφέρει αν η συνάρτηση είναι ορισμένη ή όχι εκτός της ένωσης αυτής και, ειδικώτερα, στον ξ. Τώρα, όμως, υποθέτουμε ότι ο x παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον ξ *μόνο από τη μια μεριά του*, δηλαδή είτε τιμές μόνο $< \xi$ είτε τιμές μόνο $> \xi$. Περνάμε αμέσως και συνοπτικά στους σχετικούς ορισμούς. Ο αναγνώστης πρέπει μέχρι τώρα να έχει αποκτήσει την κατάλληλη εμπειρία ώστε να κατανοήσει τους ορισμούς αυτούς και να τους διατυπώσει με διάφορους εναλλακτικούς τρόπους. Θα βοηθήσουν, φυσικά, και τα παραδείγματα που ακολουθούν.

Υποπερίπτωση 2_α *: Όριο = αριθμός.*

Έστω ότι *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $|f(x) - \eta| < \epsilon$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $\xi < x < \xi + \delta$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi+} f(x) = \eta$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **συγκλίνει στον** η ή **τείνει στον** η ή **έχει όριο τον** η **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ **από τα δεξιά του**.

Ομοίως, έστω ότι *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $|f(x) - \eta| < \epsilon$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $\xi - \delta < x < \xi$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = \eta$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **συγκλίνει στον** η ή **τείνει στον** η ή **έχει όριο τον** η **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ **από τα αριστερά του**.

Υποπερίπτωση 2_β *: Όριο* $= +\infty$.

Έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) > M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $\xi < x < \xi + \delta$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi+} f(x) = +\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **τείνει στο** $+\infty$ ή **έχει όριο το** $+\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ **από τα δεξιά του**.

Ομοίως, έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) > M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $\xi - \delta < x < \xi$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = +\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **τείνει στο** $+\infty$ ή **έχει όριο το** $+\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ **από τα αριστερά του**.

Υποπερίπτωση 2_γ *: Όριο* $= -\infty$.

Έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) < -M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $\xi < x < \xi + \delta$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi+} f(x) = -\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή **τείνει στο** $-\infty$ ή **έχει όριο το** $-\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ **από τα δεξιά του**.

Ομοίως, έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $\delta > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) < -M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $\xi - \delta < x < \xi$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to \xi-} f(x) = -\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή **τείνει στο** $-\infty$ ή **έχει όριο το** $-\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στον** ξ **από τα αριστερά του**.

Σε όλες αυτές τις υποπεριπτώσεις της περίπτωσης 2 τα $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ και $\lim_{x \to \xi-} f(x)$ ονομάζονται **δεξιό πλευρικό όριο** και **αριστερό πλευρικό όριο της** $y = f(x)$ **στον** ξ, αντιστοίχως.

Το όριο $\lim_{x \to \xi} f(x)$ είναι, κατά κάποιον τρόπο, συνδυασμός των δυο πλευρικών ορίων $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ και $\lim_{x \to \xi-} f(x)$. Αυτό είναι το περιεχόμενο της Πρότασης 4.1.

Πρόταση 4.1 *Έστω ότι η* $y = f(x)$ *είναι ορισμένη (τουλάχιστον) στην ένωση* $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ *δυο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του* ξ.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, τότε υπάρχουν και τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και τα τρία όρια είναι τα ίδια:

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x).$$

Αντιστρόφως, αν υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι ίδια, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι το ίδιο με τα δυο πλευρικά όρια.

Απόδειξη: Θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση που τα διάφορα όρια είναι αριθμοί. Οι περιπτώσεις όπου τα όρια είναι $+\infty$ ή $-\infty$ είναι παρόμοιες.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ή, ισοδύναμα, που ικανοποιεί είτε την $\xi - \delta < x < \xi$ είτε την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $\xi - \delta < x < \xi$ και $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$.

Έστω $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$ και οποιοσδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $\xi - \delta' < x < \xi$. Επίσης, επειδή $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, οπότε είναι $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$. Άρα είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί είτε την $\xi - \delta < x < \xi$ είτε την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ και, επομένως, ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$.

Παραδείγματα: (1) Έστω $a > 0$. Για την $y = |x - \xi|^a$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ είναι, όπως έχουμε δει, $\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^a = 0$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} |x - \xi|^a = 0$ και $\lim_{x\to\xi-} |x - \xi|^a = 0$.

(2) Έστω $a > 0$. Για την $y = |x - \xi|^{-a}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty)$ γνωρίζουμε ότι είναι $\lim_{x\to\xi} |x - \xi|^{-a} = +\infty$. Επομένως, $\lim_{x\to\xi+} |x - \xi|^{-a} = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi-} |x - \xi|^{-a} = +\infty$.

(3) Θεωρούμε την $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{αν } x > 0, \\ x^2 + 1, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ που ορίζεται στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα η $y = f(x)$ ορίζεται σε δυο διαστήματα δεξιά και αριστερά του 0 και θα μελετήσουμε τα πλευρικά της όρια στον 0. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$ και $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, οπότε θα έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και εργαζόμαστε στο διάστημα $(-\infty, 0)$. Για να είναι $|f(x) - 1| < \epsilon$ αρκεί (επειδή $x < 0$) να είναι $|(x^2 + 1) - 1| < \epsilon$ αρκεί να είναι $x^2 < \epsilon$ αρκεί (πάλι επειδή $x < 0$) να είναι $-\sqrt{\epsilon} < x < 0$. Αν, τώρα, επιλέξουμε $\delta = \sqrt{\epsilon}$, τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $-\delta < x < 0$ ισχύει $-\sqrt{\epsilon} < x < 0$ και, επομένως, ισχύει $|f(x) - 1| < \epsilon$. Άρα είναι $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$.

Τώρα παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και εργαζόμαστε στο διάστημα $(0, +\infty)$. Για να είναι $|f(x) - 1| < \epsilon$ αρκεί (επειδή $x > 0$) να είναι $|(2x + 1) - 1| < \epsilon$ αρκεί να είναι $2x < \epsilon$ αρκεί (επειδή $x > 0$) να είναι $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$. Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $0 < x < \delta$ ισχύει $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$ και, επομένως, ισχύει $|f(x) - 1| < \epsilon$. Άρα είναι $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$.

Άμεση και χρήσιμη συνέπεια της Πρότασης 4.1 είναι η εξής παρατήρηση.

Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται (τουλάχιστον) στην ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$. Αν ένα τουλάχιστον από τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ δεν υπάρχει ή αν υπάρχουν και τα δυο αλλά είναι διαφορετικά, τότε το όριο $\lim_{x\to\xi} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παραδείγματα: (1) Η $y = \frac{|x|}{x}$ ορίζεται στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Στο $(0, +\infty)$ είναι $\frac{|x|}{x} = 1$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση είναι σταθερή 1 στο $(0, +\infty)$, είναι προφανές ότι όποιον $\delta > 0$ κι αν επιλέξουμε θα είναι $\left|\frac{|x|}{x} - 1\right| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή $x \neq 0$) που ικανοποιεί την $0 < x < \delta$. Άρα είναι $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$.

Ομοίως, στο $(-\infty, 0)$ είναι $\frac{|x|}{x} = -1$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η συνάρτηση είναι σταθερή -1 στο $(-\infty, 0)$, είναι πάλι προφανές ότι όποιον $\delta > 0$ κι αν επιλέξουμε θα είναι $\left|\frac{|x|}{x} - (-1)\right| = |(-1) - (-1)| = 0 < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή $x \neq 0$) που ικανοποιεί την $-\delta < x < 0$. Άρα είναι $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1.}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι τα δυο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά. Επομένως, *δεν υπάρχει* το $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$.

(2) Η $y = \frac{1}{x-\xi}$ ορίζεται στο $(-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty)$. Θα δούμε ότι $\lim_{x\to\xi+} \frac{1}{x-\xi} = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{x-\xi} = -\infty$, οπότε θα έχουμε αποδείξει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{x-\xi}$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και εργαζόμαστε στο $(\xi, +\infty)$. Για να είναι $\frac{1}{x-\xi} > M$ αρκεί (επειδή $x > \xi$) να είναι $\xi < x < \xi + \frac{1}{M}$. Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{M}$, τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε $x \neq \xi$) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$ ισχύει $\xi < x < \xi + \frac{1}{M}$ και, επομένως, ισχύει $\frac{1}{x-\xi} > M$. Άρα είναι $\lim_{x\to\xi+} \frac{1}{x-\xi} = +\infty$.

Πάλι παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και εργαζόμαστε στο $(-\infty, \xi)$. Για να είναι $\frac{1}{x-\xi} < -M$ αρκεί (επειδή $x < \xi$) να είναι $\xi - \frac{1}{M} < x < \xi$. Αν επιλέξουμε $\delta = \frac{1}{M}$, τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε $x \neq \xi$) που ικανοποιεί την $\xi - \delta < x < \xi$ ισχύει $\xi - \frac{1}{M} < x < \xi$ και, επομένως, ισχύει $\frac{1}{x-\xi} < -M$. Άρα είναι $\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{x-\xi} = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to\xi-} \frac{1}{x-\xi} = -\infty, \qquad \lim_{x\to\xi+} \frac{1}{x-\xi} = +\infty.}$$

`Περίπτωση 3.` Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα (ξ, b) και ότι δεν είναι ορισμένη σε κανένα σημείο κάποιου διαστήματος (a, ξ). Δε μας ενδιαφέρει αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη ή όχι εκτός των δυο αυτών διαστημάτων και, ειδικώτερα, στον ξ. Επειδή ο x πρέπει να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$, είναι προφανές ότι το να παίρνει ο x τιμές αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$ είναι ισοδύναμο με το να παίρνει ο x τιμές αρκετά κοντά στον ξ και $> \xi$. Δηλαδή, συμβολικά: το $x \to \xi$ είναι ισοδύναμο με το $x \to \xi+$.

Σ' αυτήν την περίπτωση ο ορισμός του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι ο ίδιος με τον ορισμό του πλευρικού ορίου $\lim_{x\to\xi+} f(x)$, όπως αυτός εκτέθηκε στην Περίπτωση 2, και είναι

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x).$$

Τα ανάλογα ισχύουν όταν υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, ξ) και ότι δεν είναι ορισμένη σε κανένα σημείο κάποιου διαστήματος (ξ, b). Πάλι δε μας ενδιαφέρει αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη ή όχι εκτός των δυο αυτών διαστημάτων και, ειδικώτερα, στον ξ. Τώρα, επειδή ο x περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$, το $x \to \xi$ είναι ισοδύναμο με το $x \to \xi-$.

Σ' αυτήν την περίπτωση ο ορισμός του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x)$ είναι ο ίδιος με τον ορισμό του πλευρικού ορίου $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi-} f(x).$$

Παραδείγματα: Στα παραδείγματα αυτά υποθέτουμε ότι ο $a > 0$ είναι άρρητος ή ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του.

(1) Η $y = (x-\xi)^a$ είναι ορισμένη μόνο στο $[\xi, +\infty)$ και ισχύει $(x-\xi)^a = |x-\xi|^a$ στο διάστημα αυτό. Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι $\lim_{x\to\xi+} |x-\xi|^a = 0$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^a = \lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^a = \lim_{x\to\xi+} |x-\xi|^a = 0$.

(2) Η $y = (x-\xi)^{-a}$ ορίζεται μόνο στο $(\xi, +\infty)$ και ισχύει $(x-\xi)^{-a} = |x-\xi|^{-a}$ στο διάστημα αυτό. Γνωρίζουμε από προηγούμενο παράδειγμα ότι $\lim_{x\to\xi+} |x-\xi|^{-a} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(x-\xi)^{-a} = \lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^{-a} = \lim_{x\to\xi+} |x-\xi|^{-a} = +\infty$.

(3) Η $y = (\xi - x)^a$ ορίζεται μόνο στο $(-\infty, \xi]$ και είναι $(\xi - x)^a = |x-\xi|^a$ στο $(-\infty, \xi]$. Είναι γνωστό ότι $\lim_{x\to\xi-} |x-\xi|^a = 0$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(\xi-x)^a = \lim_{x\to\xi-}(\xi-x)^a = \lim_{x\to\xi-} |x-\xi|^a = 0$.

(4) Η $y = (\xi - x)^{-a}$ ορίζεται μόνο στο $(-\infty, \xi)$ και είναι $(\xi - x)^{-a} = |x-\xi|^{-a}$ στο $(-\infty, \xi)$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to\xi-} |x-\xi|^{-a} = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(\xi-x)^{-a} = \lim_{x\to\xi-}(\xi-x)^{-a} = \lim_{x\to\xi-} |x-\xi|^{-a} = +\infty$.

`Περίπτωση 4.` Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $(a, +\infty)$, αδιαφορώντας αν είναι ορισμένη ή όχι και εκτός αυτού του διαστήματος. Υποθέτουμε ότι ο x παίρνει τιμές αρκετά μεγάλες θετικές και διακρίνουμε πάλι τρεις υποπεριπτώσεις ανάλογα με τη συμπεριφορά του αντίστοιχου $f(x)$.

Υποπερίπτωση 4_α : Όριο = αριθμός.

Έστω ότι *για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $N > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $x > N$.* Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **συγκλίνει στον** η ή **τείνει στον** η ή **έχει όριο τον** η **καθώς ο** x **τείνει στο** $+\infty$.

Υποπερίπτωση 4_β *: Όριο* $= +\infty$.

Έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $N > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) > M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $x > N$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **τείνει στο** $+\infty$ ή **έχει όριο το** $+\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στο** $+\infty$.

Υποπερίπτωση 4_γ *: Όριο* $= -\infty$.

Τέλος, έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $N > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) < -M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $x > N$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή **τείνει στο** $-\infty$ ή **έχει όριο το** $-\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στο** $+\infty$.

Παραδείγματα: (1) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{x+1}{x+3}$ είναι το $(-\infty,-3) \cup (-3,+\infty)$, οπότε περιέχει ένα διάστημα αριστερά του $+\infty$. Μετά από μερικές στοιχειώδεις πράξεις, βλέπουμε ότι, αν ο x παίρνει αρκετά μεγάλες θετικές τιμές, ο αντίστοιχος $y = \frac{x+1}{x+3}$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον 1. Εικάζουμε, λοιπόν, ότι είναι $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+3} = 1$. Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $N > 0$ ώστε να είναι $\left|\frac{x+1}{x+3} - 1\right| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε $x \neq -3$) που ικανοποιεί την $x > N$.

Για να είναι $\left|\frac{x+1}{x+3} - 1\right| < \epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{2}{|x+3|} < \epsilon$ αρκεί να είναι $|x+3| > \frac{2}{\epsilon}$ αρκεί να είναι $x < -3 - \frac{2}{\epsilon}$ ή $x > -3 + \frac{2}{\epsilon}$ αρκεί (προσέξτε: *μας ενδιαφέρουν οι* x *που είναι μεγαλύτεροι από κάποιον αριθμό*) να είναι $x > -3 + \frac{2}{\epsilon}$. Τώρα επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε $N > 0$ ο οποίος είναι $\geq -3 + \frac{2}{\epsilon}$. Αν $-3 + \frac{2}{\epsilon} > 0$ ή, ισοδύναμα, αν $\epsilon < \frac{2}{3}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε $N = -3 + \frac{2}{\epsilon}$ και, αν $-3 + \frac{2}{\epsilon} \leq 0$ ή, ισοδύναμα, αν $\epsilon \geq \frac{2}{3}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε $N = 1$. Τότε για κάθε $x > N$ (επειδή είναι $N \geq -3 + \frac{2}{\epsilon}$) ισχύει $x > -3 + \frac{2}{\epsilon}$ και, επομένως, ισχύει $\left|\frac{x+1}{x+3} - 1\right| < \epsilon$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x+3} = 1$.

(2) Το πεδίο ορισμού της $y = x - \frac{7}{x}$ είναι το $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, οπότε περιέχει ένα διάστημα αριστερά του $+\infty$. Δοκιμάζοντας αρκετά μεγάλες θετικές τιμές του x, παρατηρούμε ότι οι αντίστοιχοι αριθμοί $y = x - \frac{7}{x}$ γίνονται όσο θέλουμε μεγάλοι

θετικοί. Άρα εικάζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{7}{x}\right)=+\infty$ και θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$ και θέλουμε να βρούμε $N>0$ ώστε να είναι $x-\frac{7}{x}>M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε $x\neq 0$) που ικανοποιεί την $x>N$.

Για να είναι $x-\frac{7}{x}>M$ αρκεί να είναι $\frac{x^2-Mx-7}{x}>0$ αρκεί να είναι $x(x^2-Mx-7)>0$ αρκεί να είναι $\frac{M-\sqrt{M^2+28}}{2}<x<0$ ή $x>\frac{M+\sqrt{M^2+28}}{2}$ αρκεί (προσέξτε: *μας ενδιαφέρουν οι x που είναι μεγαλύτεροι από κάποιον αριθμό*) να είναι $x>\frac{M+\sqrt{M^2+28}}{2}$. Αν επιλέξουμε $N=\frac{M+\sqrt{M^2+28}}{2}>0$, τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε $x\neq 0$) που ικανοποιεί την $x>N$ ισχύει $x>\frac{M+\sqrt{M^2+28}}{2}$ και, επομένως, ισχύει $x-\frac{7}{x}>M$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{7}{x}\right)=+\infty$.

(3) Έστω σταθερή συνάρτηση $y=c$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$ και παρατηρούμε ότι όποιον $N>0$ κι αν επιλέξουμε είναι $|y-c|=|c-c|=0<\epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $x>N$. Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} c=c.}$$

(4) Έστω $a>0$. Η $y=x^a$ είναι ορισμένη τουλάχιστον στο $[0,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}x^a=+\infty$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$ και πρέπει να βρούμε $N>0$ ώστε να είναι $x^a>M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $x>N$.

Αν $x>0$, για να είναι $x^a>M$ αρκεί να είναι $x>M^{\frac{1}{a}}$, οπότε, αν επιλέξουμε $N=M^{\frac{1}{a}}>0$, τότε για κάθε $x>N$ ισχύει $x>M^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, ισχύει $x^a>M$. Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^a=+\infty \qquad (a>0).}$$

Ειδικότερα: $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x}=+\infty$.

(5) Έστω $a>0$. Η $y=x^{-a}$ είναι ορισμένη τουλάχιστον στο $(0,+\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}x^{-a}=0$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$ και θα βρούμε $N>0$ ώστε να είναι $|x^{-a}-0|<\epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $x>N$.

Αν $x>0$, για να είναι $|x^{-a}-0|<\epsilon$ αρκεί να είναι $x>\epsilon^{-\frac{1}{a}}$, οπότε, αν επιλέξουμε $N=\epsilon^{-\frac{1}{a}}>0$, τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού που ικανοποιεί την $x>N$ ισχύει $x>\epsilon^{-\frac{1}{a}}$ και, επομένως, ισχύει $|x^{-a}-0|<\epsilon$. Άρα:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^{-a}=0 \qquad (a>0).}$$

Ειδικότερα: $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}=0$.

`Περίπτωση 5.` Υποθέτουμε ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $(-\infty,b)$, αδιαφορώντας αν είναι ορισμένη ή όχι και εκτός αυτού του διαστήματος. Υποθέτουμε ότι ο x παίρνει τιμές αρκετά μεγάλες αρνητικές και διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις ανάλογα με το πώς συμπεριφέρεται ο αντίστοιχος $f(x)$.

Υποπερίπτωση 5_α *: Όριο = αριθμός.*

Έστω ότι *για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει κάποιος* $N > 0$ *ώστε να είναι* $|f(x) - \eta| < \epsilon$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $x < -N$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \eta$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **συγκλίνει στον** η ή **τείνει στον** η ή **έχει όριο τον** η **καθώς ο** x **τείνει στο** $-\infty$.

Υποπερίπτωση 5_β *: Όριο* $= +\infty$.

Έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $N > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) > M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $x < -N$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **τείνει στο** $+\infty$ ή **έχει όριο το** $+\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στο** $-\infty$.

Υποπερίπτωση 5_γ *: Όριο* $= -\infty$.

Τέλος, έστω ότι *για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει κάποιος* $N > 0$ *ώστε να είναι* $f(x) < -M$ *για κάθε* x *στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την* $x < -N$. Αυτό το συμβολίζουμε

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

και λέμε ότι **η** $y = f(x)$ **αποκλίνει στο** $-\infty$ ή **τείνει στο** $-\infty$ ή **έχει όριο το** $-\infty$ **καθώς ο** x **τείνει στο** $-\infty$.

Παραδείγματα: (1) Έστω σταθερή συνάρτηση $y = c$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και παρατηρούμε ότι για οποιονδήποτε $N > 0$ είναι $|y - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $x < -N$. Άρα:

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} c = c.}$$

(2) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{3-x}{7+x}$ είναι το $(-\infty, -7) \cup (-7, +\infty)$, οπότε περιέχει ένα διάστημα δεξιά του $-\infty$. Δοκιμάζοντας αρκετά μεγάλες αρνητικές τιμές του x, βλέπουμε ότι οι αντίστοιχες τιμές του $y = \frac{3-x}{7+x}$ είναι όσο θέλουμε κοντά στον -1, οπότε μαντεύουμε ότι $\lim_{x \to -\infty} \frac{3-x}{7+x} = -1$. Θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θέλουμε να βρούμε $N > 0$ ώστε να είναι $\left|\frac{3-x}{7+x} - (-1)\right| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης (δηλαδή για κάθε $x \neq -7$) που ικανοποιεί την $x < -N$.

Για να είναι $\left|\frac{3-x}{7+x}-(-1)\right|<\epsilon$ αρκεί να είναι $\frac{10}{|7+x|}<\epsilon$ αρκεί να είναι $|x+7|>\frac{10}{\epsilon}$ αρκεί να είναι $x<-7-\frac{10}{\epsilon}$ ή $x>-7+\frac{10}{\epsilon}$ αρκεί (προσέξτε: *μας ενδιαφέρουν οι x που είναι μικρότεροι από κάποιον αριθμό*) να είναι $x<-7-\frac{10}{\epsilon}$. Αν επιλέξουμε $N=7+\frac{10}{\epsilon}>0$, τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού (δηλαδή για κάθε $x\neq -7$) που ικανοποιεί την $x<-N$ ισχύει $x<-7-\frac{10}{\epsilon}$ και, επομένως, ισχύει $\left|\frac{3-x}{7+x}-(-1)\right|<\epsilon$.

Άρα $\lim_{x\to-\infty}\frac{3-x}{7+x}=-1$.

Ασκήσεις.

1. Έχουν νόημα τα παρακάτω όρια;

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}\,,\qquad \lim_{x\to 0}\sqrt{-x^2}\,,\qquad \lim_{x\to 1-}\log(x-1),$$

$$\lim_{x\to 1+}\sqrt{1-x^2}\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\log(3-x)}\,,\qquad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+3x-x^2}\,.$$

2. Ποιες πρέπει να είναι οι τιμές των παρακάτω ορίων; Δώστε «απλοϊκή» αλλά όσο το δυνατό πειστικότερη εξήγηση της απάντησής σας χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους αυστηρούς ορισμούς των ορίων. Για να αποκτήσετε «αίσθηση» των ορίων αυτών υπολογίστε αρκετές τιμές των συναρτήσεων επιλέγοντας τυχαία σκόρπιες τιμές της μεταβλητής x αρκετά κοντά στο όριό της.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+1),\quad \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}\,,\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}\,,\quad \lim_{x\to 1-}\frac{1}{x^2-1},\quad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x^2-1},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+5}}\,,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\,,\quad \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3}\,.$$

3. Αποδείξτε βάσει των ορισμών τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to 1}3x=3,\quad \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}-7\right)=-6,\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 1}x^2=1,$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x-1}=3,\quad \lim_{x\to 1}\log x=0,\quad \lim_{x\to 0}e^x=1,\quad \lim_{x\to 2}\sqrt{x}=\sqrt{2}\,,$$

$$\lim_{x\to 1}\left|\frac{x}{x-1}\right|=+\infty,\quad \lim_{x\to-3}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2=+\infty,\quad \lim_{x\to 2}\frac{1-x}{(x-2)^2}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to-1+}(3x-2)=-5,\quad \lim_{x\to 2+}x^2=4,\quad \lim_{x\to 0-}\frac{x}{x+1}=0,$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{-3}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to 2+}\frac{x}{2-x}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1-}\frac{x+2}{1-x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+}\log x=-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-3}{2x+1}=\frac{1}{2}\,,\quad \lim_{x\to\pm\infty}(3x^2+x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-x^2}{x+1}=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{2-x^2}{x+1}=+\infty.$$

4. Υπολογίστε τα πλευρικά όρια των παρακάτω συναρτήσεων στον 1. Χρησιμοποιήστε τους ορισμούς για να τα αποδείξετε.

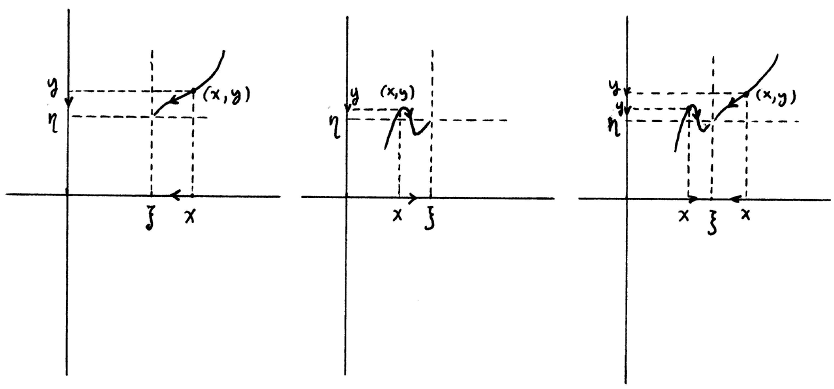
   Υπάρχουν τα όρια καθώς $x \to 1$ και, αν υπάρχουν, ποια είναι η τιμή τους;

$$y = \begin{cases} 2x+3, & \text{αν } x > 1, \\ 1-2x, & \text{αν } x < 1, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 2x-1, & \text{αν } x > 1, \\ \frac{x}{x-1}, & \text{αν } x < 1, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x \geq 1, \\ x^2, & \text{αν } x < 1, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \frac{2x}{x-1}, & \text{αν } x > 1, \\ (x-1)^{-2}, & \text{αν } x < 1. \end{cases}$$

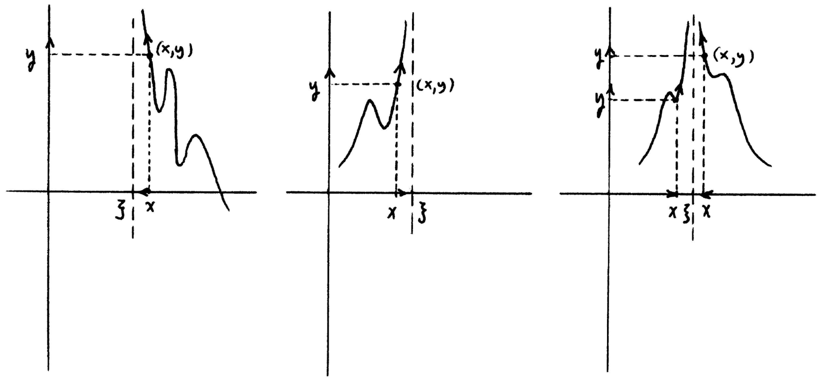
4.2 Όριο και γράφημα.

Το γεωμετρικό περιεχόμενο του ορίου μιας συνάρτησης «αποτυπώνεται» καθαρά στο γράφημά της.

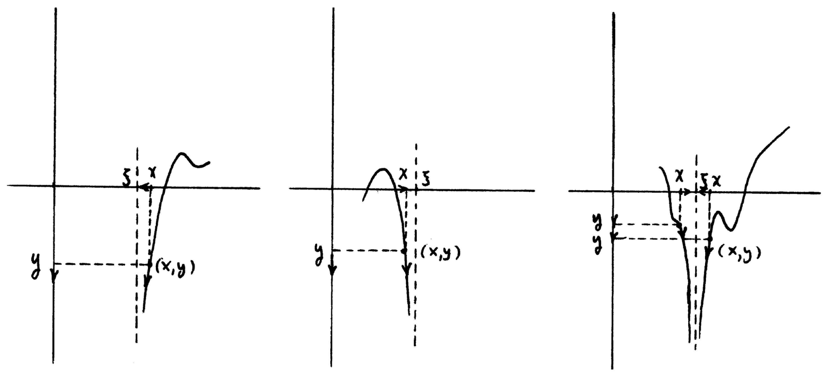


Σχήμα 4.1: $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$.

Έστω ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στην ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ και ότι ο x πλησιάζει απεριόριστα τον ξ μέσα από τα διαστήματα (a, ξ) και (ξ, b). Αυτή η μετακίνηση του x στον x-άξονα συνεπάγεται την αντίστοιχη μετακίνηση του $f(x)$ στον y-άξονα και, επομένως, την αντίστοιχη μετακίνηση του σημείου $(x, f(x))$ στο επίπεδο. Είναι φανερό ότι η συμπεριφορά του $f(x)$ και η συμπεριφορά του $(x, f(x))$ αλληλοκαθορίζονται. Για παράδειγμα, ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα τον αριθμό η καθώς ο x πλησιάζει τον ξ παραμένοντας $\neq \xi$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει απεριόριστα το σημείο (ξ, η) παραμένοντας εκτός της κατακόρυφης ευθείας $x = \xi$. Ομοίως, ο $f(x)$ γίνεται μεγαλύτερος από κάθε θετικό αριθμό καθώς ο x πλησιάζει τον ξ παραμένοντας $\neq \xi$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{x \to \xi} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ ανεβαίνει απεριόριστα ψηλά και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$ παραμένοντας εκτός της ευθείας αυτής. Παρομοίως: $\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ κατεβαίνει



Σχήμα 4.2: $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Κατακόρυφη ασύμπτωτη.



Σχήμα 4.3: $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$. Κατακόρυφη ασύμπτωτη.

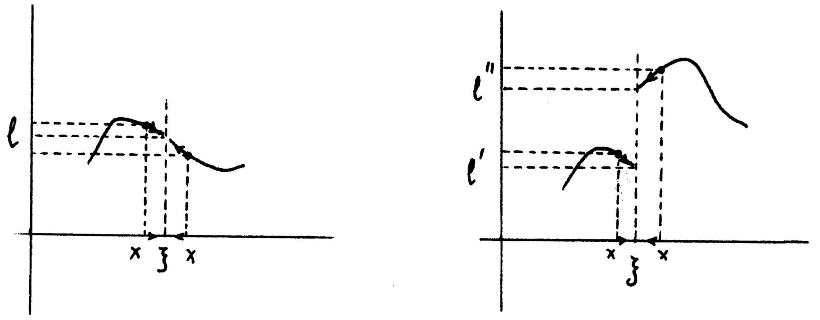
απεριόριστα χαμηλά και κοντά στην κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$ παραμένοντας εκτός της ευθείας αυτής.

Στις δυο τελευταίες περιπτώσεις, δηλαδή όταν $\lim_{x\to\xi} f(x) = \pm\infty$, η κατακόρυφη ευθεία $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της $y = f(x)$.

Με τους ίδιους συλλογισμούς καταλήγουμε σε ανάλογα συμπεράσματα για τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to\xi\pm} f(x)$. Στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ η μόνη αλλαγή από τα προηγούμενα είναι ότι το σημείο $(x, f(x))$ παραμένει δεξιά της κατακόρυφης ευθείας $x = \xi$ ενώ στην περίπτωση του $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ το σημείο $(x, f(x))$ παραμένει αριστερά της κατακόρυφης ευθείας $x = \xi$.

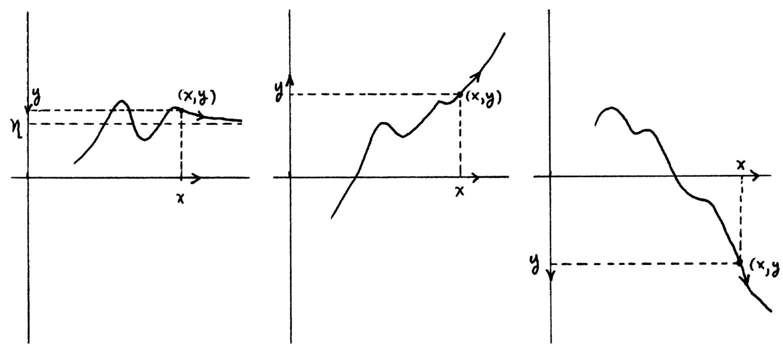
Η ευθεία $x = \xi$ χαρακτηρίζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη** του γραφήματος της $y = f(x)$ σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi\pm} f(x) = \pm\infty$.

Παρεμπιπτόντως, μπορεί κανείς να δει στο γράφημα της συνάρτησης γιατί, αν τα όρια $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ είναι διαφορετικά, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.



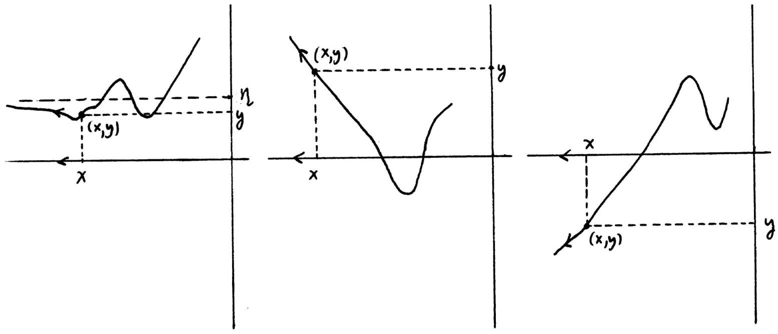
Σχήμα 4.4: $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x) \neq \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Έστω τώρα ότι η $y = f(x)$ ορίζεται στο $(a, +\infty)$ και ότι ο x απομακρύνεται απεριόριστα προς τα δεξιά πάνω στον x-άξονα. Πάλι η μετακίνηση του $f(x)$ στον y-άξονα και η μετακίνηση του σημείου $(x, y) = (x, f(x))$ στο επίπεδο αλληλοκαθορίζονται. Για παράδειγμα, ο $f(x)$ πλησιάζει απεριόριστα τον αριθμό η ή, ισοδύναμα, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει απεριόριστα την οριζόντια ευθεία $y = \eta$. Στην περίπτωση αυτή η οριζόντια ευθεία $y = \eta$ χαρακτηρίζεται **οριζόντια ασύμπτωτη (στο $+\infty$)** του γραφήματος της $y = f(x)$. Ομοίως: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα δεξιά και πάνω. Τέλος: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα δεξιά και κάτω.



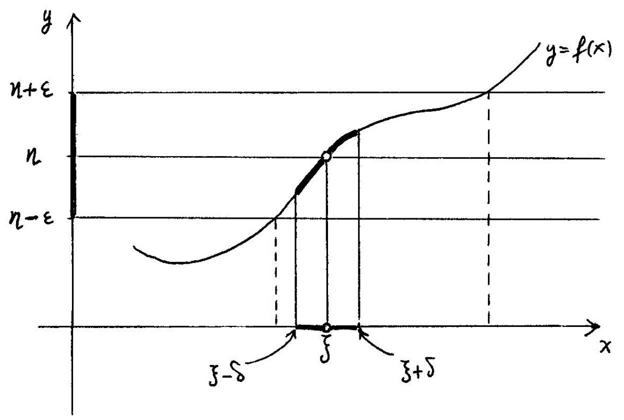
Σχήμα 4.5: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Με τον ίδιο συλλογισμό βλέπουμε ότι, αν η $y = f(x)$ ορίζεται στο $(-\infty, b)$, τότε είναι $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα αριστερά και κοντά στην ευθεία $y = \eta$. Σ' αυτήν την πε-



Σχήμα 4.6: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \eta$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

ρίπτωση η ευθεία $y = \eta$ χαρακτηρίζεται **οριζόντια ασύμπτωτη (στο $-\infty$)** του γραφήματος της $y = f(x)$. Ομοίως: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα αριστερά και πάνω. Και: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ αν και μόνο αν το σημείο $(x, f(x))$ απομακρύνεται απεριόριστα προς τα αριστερά και κάτω.



Σχήμα 4.7: $\eta - \epsilon < f(x) < \eta + \epsilon$ για κάθε x με $\xi - \delta < x < \xi$ ή $\xi < x < \xi + \delta$.

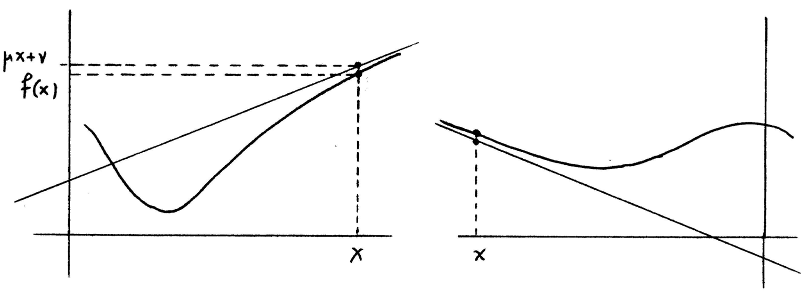
Ένας τρόπος να «δούμε» την ποσοτική έκφραση – με τους ϵ και δ – της έννοιας του ορίου $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ στο γράφημα της $y = f(x)$ είναι ο εξής. Το να ισχύει το όριο αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ο οποίος ανήκει στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ του σημείου $(x, f(x))$, βρίσκεται γνησίως ανάμεσα στα ύψη $\eta-\epsilon$ και $\eta+\epsilon$ ή, με άλλα λόγια, *το μέρος του γραφήματος* *που αντιστοιχεί στην ένωση* $(\xi-\delta,\xi)\cup(\xi,\xi+\delta)$ *είναι υποσύνολο της οριζόντιας ζώνης που είναι γνησίως ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες* $y=\eta-\epsilon$ *και* $y=\eta+\epsilon$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να «δούμε» κάθε άλλη περίπτωση ορίου. Για παράδειγμα, το να ισχύει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $M>0$ υπάρχει κάποιος $N>0$ ώστε *το μέρος του γραφήματος της* $y=f(x)$ *που αντιστοιχεί στην ημιευθεία* $(N,+\infty)$ *είναι υποσύνολο του κάτω ημιεπιπέδου που ορίζεται από την οριζόντια ευθεία* $y=-M$.

Θα μελετήσουμε τώρα και τις λεγόμενες *πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες*. Μια ευθεία l με εξίσωση $y=\mu x+\nu$ χαρακτηρίζεται **(πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο** $+\infty$ του γραφήματος της $y=f(x)$ αν η $y=f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a,+\infty)$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-\mu x-\nu\big)=0.$$

Αυτή η ισότητα σημαίνει ότι *το μεταβλητό σημείο* $(x,f(x))$ *του γραφήματος της* $y=f(x)$ *και το αντίστοιχο σημείο* $(x,\mu x+\nu)$ *της* l *πλησιάζουν το ένα το άλλο καθώς τα σημεία αυτά κινούνται απεριόριστα προς τα δεξιά.* Πιο απλοϊκά: το γράφημα της συνάρτησης προσεγγίζει την ευθεία l κοντά στο $+\infty$.



Σχήμα 4.8: Πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται η **(πλάγια) ασύμπτωτη ευθεία στο** $-\infty$ του γραφήματος της $y=f(x)$ η οποία είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(-\infty,b)$. Αυτή είναι μια ευθεία l με εξίσωση $y=\mu x+\nu$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-\mu x-\nu\big)=0.$$

Θα δούμε τώρα ένα τρόπο να βρίσκουμε, αν υπάρχουν, τις πλάγιες ασύμπτωτες ευθείες στο γράφημα μιας συνάρτησης.

Ας υποθέσουμε ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a,+\infty)$ και έστω ότι υπάρχει η ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$ με εξίσωση $y=\mu x+\nu$. Θα βρούμε τύπους υπολογισμού των συντελεστών μ και ν. Από την $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x-\nu)=0$ συνεπάγεται αμέσως ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\mu x-\nu}{x}=0$ και, επομένως, ότι $\mu=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δε μπορεί να υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$. Ας υποθέσουμε, όμως, ότι υπάρχει το όριο αυτό και είναι αριθμός, οπότε η τιμή του είναι η ζητούμενη τιμή του μ. Τώρα, όμως, η ζητούμενη τιμή του ν δίνεται από την ισότητα $\nu = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \mu x)$, στην οποία χρησιμοποιούμε την τιμή του μ την οποία μόλις προσδιορίσαμε. Παρατηρούμε και πάλι ότι, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\mu x)$ ή αν υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$, τότε δε μπορεί να υπάρχει ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$.

Την ίδια διαδικασία ακολουθούμε για να βρούμε, αν υπάρχει, την πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την $y = x+\frac{1}{x}$ στο σύνολο $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. Υπολογίζουμε διαδοχικά τα όρια: $\mu = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}(x+\frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to+\infty}(x+\frac{1}{x} - 1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x+0 = x$. Επίσης: $\mu = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}(x+\frac{1}{x}) = 1$ και $\nu = \lim_{x\to-\infty}(x+\frac{1}{x}-1x) = 0$. Άρα η πλάγια ασύμπτωτη ευθεία στο $-\infty$ είναι πάλι η ευθεία με εξίσωση $y = 1x+0 = x$.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μια οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία στο γράφημα της $y = f(x)$ είναι ειδική περίπτωση πλάγιας ασύμπτωτης ευθείας. Πράγματι, μια οριζόντια ασύμπτωτη ευθεία είναι πλάγια ασύμπτωτη ευθεία με κλίση ίση με 0 (δηλαδή $\mu = 0$).

Ασκήσεις.

1. Μπορείτε από το γράφημα της $y = f(x) = \begin{cases} x^2 - 1\,, & \text{αν } x < 2, \\ \frac{1}{x}\,, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$ να διακρίνετε τα $\lim_{x\to2\pm} f(x)$, $\lim_{x\to0\pm} f(x)$ και $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

   Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για την $y = f(x) = \begin{cases} x^2\,, & \text{αν } x \geq 2, \\ \frac{1}{x}\,, & \text{αν } x < 2, x \neq 0. \end{cases}$

2. Στο προηγούμενο κεφάλαιο σχεδιάσαμε πρόχειρα τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων:

$$y = ax + b, \quad y = x^n \; (n \text{ ακέραιος}), \quad y = x^a\,, \quad y = a^x\,, \quad y = \log_a x,$$

$$y = [x], \quad y = \cos x, \quad y = \sin x, \quad y = \tan x, \quad y = \cot x,$$

$$y = \arccos x, \quad y = \arcsin x, \quad y = \arctan x, \quad y = \operatorname{arc}\cot x,$$

$$y = \cosh x, \quad y = \sinh x, \quad y = \operatorname{arc}\cosh x, \quad y = \operatorname{arc}\sinh x.$$

   Υποθέτοντας ότι η σχεδίαση είναι σωστή, υπολογίστε βάσει των γραφημάτων τα όριά τους (και τα πλευρικά) σε κάθε ξ καθώς και στα $\pm\infty$ – όποια από αυτά έχουν νόημα και υπάρχουν.

   Ποιες είναι οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτές τους;

3. Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες) των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = 2x - 3, \quad y = x^2\,, \quad y = -5x + \frac{7x+1}{x}\,, \quad y = \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^2 + 1}\,,$$

$$y = \frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)}\,, \quad y = \frac{1}{x} + \frac{x}{x-1} + \frac{x^2}{x-2}\,.$$

4. Βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της $y = \frac{2x+1}{x-1}$ και της αντίστροφής της $x = \frac{y+1}{y-2}$.

   Γενικότερα, πώς σχετίζονται οι οριζόντιες και οι κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης $y = f(x)$ και της αντίστροφής της $x = f^{-1}(y)$;

5. Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = 2x - \frac{1}{x}$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \frac{1}{4}(y + \sqrt{y^2 + 8})$. Βρείτε τις πλάγιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των δυο αυτών συναρτήσεων.

   Γενικότερα, πώς σχετίζονται οι πλάγιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες μιας συνάρτησης $y = f(x)$ και της αντίστροφής της $x = f^{-1}(y)$; Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 4.

4.3 Ιδιότητες σχετικές με όρια συναρτήσεων.

Α. Ισότητα ορίων.

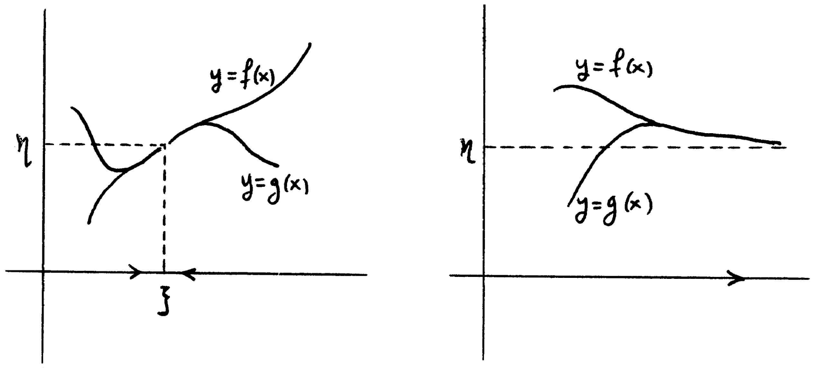
Το όριο της $y = f(x)$ στον ξ, δηλαδή το αν αυτό υπάρχει και το ποια είναι η τιμή του, εξαρτάται από τη συμπεριφορά του $f(x)$ όταν ο x είναι αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$. Έστω, λοιπόν, και μια δεύτερη συνάρτηση $y = g(x)$ η οποία έχει τις ίδιες τιμές με την πρώτη σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$, δηλαδή $g(x) = f(x)$ για κάθε x στην $(a, \xi) \cup (\xi, b)$. Τα διαστήματα (a, ξ), (ξ, b) μπορεί να είναι πολύ μικρά αλλά αυτό δεν επηρεάζει το συμπέρασμά μας διότι, όπως είπαμε, μόνο οι x που είναι αρκετά κοντά στον ξ καθορίζουν το όριο μιας συνάρτησης στον ξ. Το συμπέρασμα είναι ότι *αν η $y = f(x)$ έχει κάποιο όριο καθώς $x \to \xi$, τότε και η $y = g(x)$ έχει το ίδιο όριο.*

Πρακτικά, η $y = g(x)$ μπορεί να προκύψει από την $y = f(x)$ αν κάνουμε οποιαδήποτε αλλαγή στην $y = f(x)$ – για παράδειγμα, αν αλλάξουμε το πεδίο ορισμού της ή αν αλλάξουμε τον τύπο της – *έξω* από κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$, δηλαδή είτε αριστερά του a είτε δεξιά του b είτε στον ίδιο τον ξ.

Με τον ίδιο συλλογισμό βλέπουμε ότι, αν είναι $g(x) = f(x)$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (ξ, b) και η $y = f(x)$ έχει κάποιο όριο καθώς $x \to \xi+$, τότε και η $y = g(x)$ έχει το ίδιο όριο. Ομοίως, αν είναι $g(x) = f(x)$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (a, ξ) και η $y = f(x)$ έχει κάποιο όριο καθώς $x \to \xi-$, τότε και η $y = g(x)$ έχει το ίδιο όριο. Ομοίως, αν είναι $g(x) = f(x)$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ και η $y = f(x)$ έχει κάποιο όριο καθώς $x \to +\infty$, τότε και η $y = g(x)$ έχει το ίδιο όριο. Τα ίδια ισχύουν και για όριο καθώς $x \to -\infty$.

Συνοπτικά:

Πρόταση 4.2 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται στην $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ ή στο (ξ, b) ή στο (a, ξ) ή στο $(a, +\infty)$ ή στο $(-\infty, b)$. Αν η μια από αυτές τις συναρτήσεις έχει κάποιο όριο όταν, αντιστοίχως, $x \to \xi$ ή $x \to \xi+$ ή $x \to \xi-$ ή $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$, τότε το ίδιο ακριβώς όριο έχει και η άλλη.*



Σχήμα 4.9: $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} g(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x)$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρόταση μόνο στην περίπτωση που οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται στην $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και που $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Οι αποδείξεις στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \xi - a, b - \xi\}$, οπότε κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ περιέχεται στην $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και, επομένως, για κάθε τέτοιο x ισχύει $g(x) = f(x)$. Επίσης, είναι $\delta \leq \delta'$, οπότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ είναι $|g(x) - \eta| = |f(x) - \eta| < \epsilon$. Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = \eta$.

Παραδείγματα: (1) Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} |x|^{-\frac{1}{2}} = +\infty$. Αν θεωρήσουμε την $y = f(x) = \begin{cases} |x|^{-\frac{1}{2}}, & \text{αν } 0 < |x| < \frac{1}{10}, \\ x, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } |x| \geq \frac{1}{10}, \end{cases}$ τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ διότι οι $y = |x|^{-\frac{1}{2}}$ και $y = f(x)$ ταυτίζονται στο $(-\frac{1}{10}, 0)\cup(0, \frac{1}{10})$.

Όταν, λοιπόν, υπολογίζουμε το $\lim_{x\to 0} f(x)$ γράφουμε: επειδή $f(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$ για $0 < |x| < \frac{1}{10}$ (ή, ισοδύναμα, στην ένωση $(-\frac{1}{10}, 0)\cup(0, \frac{1}{10})$), συνεπάγεται $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x|^{-\frac{1}{2}} = +\infty$.

(2) Έστω $y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \\ x^{-1}, & \text{αν } x > 1 \text{ ή } x < 0. \end{cases}$ Επειδή $f(x) = x$ για $0 < x < 1$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x = 0$. Είναι $f(x) = x^{-1}$ για $x < 0$, οπότε $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x^{-1} = -\infty$.

(3) Έστω $y = f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & \text{αν } x > 100, \\ x, & \text{αν } x \leq 100. \end{cases}$ Επειδή $f(x) = x^{-1}$ στο διάστημα $(100, +\infty)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{-1} = 0$. Επειδή $f(x) = x$ στο διάστημα $(-\infty, 100)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$.

Β. Όρια και αλγεβρικές πράξεις.

Θα δούμε τώρα μερικά αποτελέσματα σχετικά με *πράξεις* ανάμεσα σε συναρτήσεις. Όλα αυτά τα αποτελέσματα θα διατυπώνονται για συντομία με το σύμβολο $\lim$ αντί των $\lim_{x\to\xi}$ ή $\lim_{x\to\xi\pm}$ ή $\lim_{x\to\pm\infty}$. Εννοείται ότι τα όρια που εμφανίζονται στην ίδια διατύπωση είναι όλα του ίδιου τύπου. Επίσης, οι αποδείξεις θα γίνονται μόνο στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ορίζονται σε ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και μόνο για το όριο $\lim_{x\to\xi}$. Οι αποδείξεις σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

Πρόταση 4.3 ***Κανόνας αντιθέτου***. *Αν υπάρχει το* $\lim f(x)$*, τότε υπάρχει και το* $\lim(-f(x))$ *και είναι*

$$\boxed{\lim(-f(x)) = -\lim f(x).}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να είναι $|f(x)-\eta|<\epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Παρατηρούμε ότι $|(-f(x))-(-\eta)|=|\eta-f(x)|=|f(x)-\eta|$. Άρα είναι $|(-f(x))-(-\eta)|<\epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Επομένως, $\lim_{x\to\xi}(-f(x))=-\eta=-\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να είναι $f(x)>M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα είναι $-f(x)<-M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Επομένως, $\lim_{x\to\xi}(-f(x))=-\infty=-(+\infty)=-\lim_{x\to\xi} f(x)$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη αν $\lim_{x\to\xi} f(x)=-\infty$.

Γνωρίζουμε ότι *άθροισμα δυο συναρτήσεων* $y=f(x)$ και $y=g(x)$ είναι η συνάρτηση $y=f(x)+g(x)$ της οποίας η τιμή σε κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού τους είναι το άθροισμα των αντίστοιχων τιμών τους.

Πρόταση 4.4 ***Κανόνας αθροίσματος***. *Αν υπάρχουν τα* $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ *και το άθροισμα* $\lim f(x)+\lim g(x)$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το* $\lim(f(x)+g(x))$ *και είναι*

$$\boxed{\lim(f(x)+g(x)) = \lim f(x)+\lim g(x).}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=\eta$ και $\lim_{x\to\xi} g(x)=\zeta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει $\delta'>0$ ώστε να είναι $|f(x)-\eta|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta'$ και υπάρχει $\delta''>0$ ώστε να είναι $|g(x)-\zeta|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta''$. Ορίζουμε $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$, οπότε $\delta\le\delta'$ και $\delta\le\delta''$. Συνεπάγεται ότι είναι $|f(x)-\eta|<\frac{\epsilon}{2}$ ΚΑΙ $|g(x)-\zeta|<\frac{\epsilon}{2}$ για κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού των $y=f(x)$ και $y=g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Παρατηρούμε ότι $|(f(x)+g(x))-(\eta+\zeta)|=|(f(x)-\eta)+(g(x)-\zeta)|\le|f(x)-\eta|+|g(x)-\zeta|$. Άρα είναι $|(f(x)+g(x))-(\eta+\zeta)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)+g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Επομένως, $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))=\eta+\zeta=\lim_{x\to\xi} f(x)+\lim_{x\to\xi} g(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x)=+\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$, οπότε υπάρχει $\delta'>0$ ώστε να είναι $f(x)>\frac{M}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta'$ και υπάρχει $\delta''>0$ ώστε να είναι $g(x)>\frac{M}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta''$. Ορίζουμε $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$. Τότε είναι $\delta\le\delta'$ και $\delta\le\delta''$, οπότε είναι $f(x)>\frac{M}{2}$ ΚΑΙ $g(x)>\frac{M}{2}$ για κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού των $y=f(x)$ και $y=g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Επομένως, είναι $f(x)+g(x)>\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)+g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))=+\infty=(+\infty)+(+\infty)=\lim_{x\to\xi} f(x)+\lim_{x\to\xi} g(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x)=\zeta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M>0$, οπότε υπάρχει $\delta'>0$ ώστε να είναι $f(x)>M-\zeta+1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta'$ και υπάρχει $\delta''>0$ ώστε να είναι $|g(x)-\zeta|<1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta''$. Ορίζουμε $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$. Τότε είναι $\delta\leq\delta'$ και $\delta\leq\delta''$, οπότε είναι $f(x)>M-\zeta+1$ και $|g(x)-\zeta|<1$ για κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού των $y=f(x)$ και $y=g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Από την $|g(x)-\zeta|<1$ συνεπάγεται $g(x)>\zeta-1$ και, επομένως, είναι $f(x)+g(x)>(M-\zeta+1)+(\zeta-1)=M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)+g(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))=+\infty=(+\infty)+\zeta=\lim_{x\to\xi}f(x)+\lim_{x\to\xi}g(x)$.

Οι υπόλοιπες περιπτώσεις έχουν παρόμοια αιτιολόγηση.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to 0}\big(1+\frac{1}{|x|}\big)=\lim_{x\to 0}1+\lim_{x\to 0}\frac{1}{|x|}=1+(+\infty)=+\infty$.

(2) $\lim_{x\to 0+}\big(x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)=\lim_{x\to 0+}x+\lim_{x\to 0+}1+\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}$ $=0+1+(+\infty)+(+\infty)=+\infty$.

(3) $\lim_{x\to +\infty}\big(-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\big)=\lim_{x\to +\infty}(-1)+\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=-1+0+0=-1$.

Ιδού μερικά παραδείγματα για την περίπτωση απροσδιόριστης μορφής.

Παραδείγματα: (1) Είναι $\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x}+3)\to+\infty$, $\lim_{x\to 0+}(-\frac{1}{x})=-\infty$ και $\lim_{x\to 0+}\big((\frac{1}{x}+3)+(-\frac{1}{x})\big)=\lim_{x\to 0+}3=3$.

Προφανώς, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός στη θέση του 3.

(2) $\lim_{x\to +\infty}2x=+\infty$, $\lim_{x\to +\infty}(-x)=-\infty$ και $\lim_{x\to +\infty}\big(2x+(-x)\big)=\lim_{x\to +\infty}x=+\infty$.

(3) $\lim_{x\to 0-}(-\frac{1}{x})=+\infty$, $\lim_{x\to 0-}\frac{2}{x}=-\infty$ και $\lim_{x\to 0-}(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x})=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}$ $=-\infty$.

(4) Είναι $\lim_{x\to 0}(-\frac{2}{x^2})=-\infty$. Θα αποδείξουμε (δυο φορές) λίγο παρακάτω ότι $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})=+\infty$. Όμως, το $\lim_{x\to 0}\big((\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})+(-\frac{2}{x^2})\big)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Η περίπτωση της *διαφοράς δυο συναρτήσεων* $y=f(x)$ και $y=g(x)$, δηλαδή της $y=f(x)-g(x)$, ανάγεται στις περιπτώσεις του αθροίσματος συναρτήσεων και της αντίθετης συνάρτησης αφού $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$. Επομένως:

Πρόταση 4.5 ***Κανόνας διαφοράς***. *Αν υπάρχουν τα* $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ *και η διαφορά* $\lim f(x)-\lim g(x)$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το* $\lim(f(x)-g(x))$ *και είναι*

$$\boxed{\lim(f(x)-g(x))=\lim f(x)-\lim g(x).}$$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to +\infty}\big(1-\frac{1}{x}\big)=\lim_{x\to +\infty}1-\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=1-0=1$.

(2) $\lim_{x\to 1}\big(x-\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\big)=\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}=1-(+\infty)=-\infty$.

(3) $\lim_{x\to 0-}\big(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\big)=\lim_{x\to 0-}1+\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}-\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=1+(-\infty)-(+\infty)=-\infty$.

Το *γινόμενο δυο συναρτήσεων* $y=f(x)$ και $y=g(x)$ είναι η συνάρτηση

$y = f(x)g(x)$ της οποίας η τιμή σε κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού τους είναι το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους.

Πρόταση 4.6 ***Κανόνας γινομένου.*** *Αν υπάρχουν τα* $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ *και το γινόμενο* $\lim f(x) \lim g(x)$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το* $\lim(f(x)g(x))$ *και είναι*

$$\boxed{\lim f(x)g(x) = \lim f(x) \lim g(x).}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $|g(x) - \zeta| < \min\{\frac{\epsilon}{3|\eta|+1}, \frac{1}{3}\}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, οπότε είναι $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$. Άρα είναι $|f(x) - \eta| < \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}$ και $|g(x) - \zeta| < \min\{\frac{\epsilon}{3|\eta|+1}, \frac{1}{3}\}$ για κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού των $y = f(x)$ και $y = g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)g(x) - \eta\zeta| = |(f(x) - \eta)(g(x) - \zeta) + \eta(g(x) - \zeta) + \zeta(f(x) - \eta)| \leq |f(x) - \eta||g(x) - \zeta| + |\eta||g(x) - \zeta| + |\zeta||f(x) - \eta|$. Συνεπάγεται ότι είναι $|f(x)g(x) - \eta\zeta| \leq \frac{\epsilon}{3|\zeta|+1}\frac{1}{3} + |\eta|\frac{\epsilon}{3|\eta|+1} + |\zeta|\frac{\epsilon}{3|\zeta|+1} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = \eta\zeta = \lim_{x\to\xi} f(x) \lim_{x\to\xi} g(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $f(x) > \sqrt{M}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $g(x) > \sqrt{M}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, οπότε είναι $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$. Άρα είναι $f(x) > \sqrt{M}$ και $g(x) > \sqrt{M}$ για κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού των $y = f(x)$ και $y = g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Συνεπάγεται $f(x)g(x) > \sqrt{M}\sqrt{M} = M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty = (+\infty)(+\infty) = \lim_{x\to\xi} f(x) \lim_{x\to\xi} g(x)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta > 0$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $f(x) > \frac{2M}{\zeta}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $|g(x) - \zeta| < \frac{\zeta}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta''$. Ορίζουμε τον $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, οπότε είναι $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$. Άρα είναι $f(x) > \frac{2M}{\zeta}$ και $|g(x) - \zeta| < \frac{\zeta}{2}$ για κάθε x στην τομή των πεδίων ορισμού των $y = f(x)$ και $y = g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Από την $|g(x) - \zeta| < \frac{\zeta}{2}$ συνεπάγεται $g(x) > \zeta - \frac{\zeta}{2} = \frac{\zeta}{2}$ και, επομένως, είναι $f(x)g(x) > \frac{2M}{\zeta}\frac{\zeta}{2} = M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty = (+\infty)\zeta = \lim_{x\to\xi} f(x) \lim_{x\to\xi} g(x)$.

Οι αποδείξεις στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

Παραδείγματα: (1) Μια ειδική περίπτωση του κανόνα γινομένου είναι η εξής. Έστω αριθμός c και έστω ότι υπάρχει το $\lim f(x)$ και ο $c \cdot \lim f(x)$ δεν αποτελεί απροσδιόριστη μορφή. Τότε

$$\boxed{\lim cf(x) = c \cdot \lim f(x) \qquad (c \neq 0 \text{ αν } \lim f(x) = \pm\infty).}$$

Αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον κανόνα γινομένου στην $y = f(x)$ και στη σταθερή συνάρτηση $y = c$ η οποία έχει όριο c.

(2) $\lim_{x\to 1+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1+}(x + 1) \lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$.

(3) $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x - 1) = \lim_{x\to+\infty} x \lim_{x\to+\infty}(x - 1) =$

$(+\infty)(+\infty-1)=(+\infty)(+\infty)=+\infty$. Παρατηρήστε ότι η εφαρμογή του κανόνα αθροίσματος στο $\lim_{x\to+\infty}(x^2-x)$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

(4) $\lim_{x\to-1-}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1-}(x\cdot x-x+1)\lim_{x\to-1-}\frac{1}{x+1}=((-1)(-1)-(-1)+1)(-\infty)=3(-\infty)=-\infty$.

(5) $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\lim_{x\to0}(2+x)=(+\infty)\cdot2=+\infty$. Παρατηρήστε ότι ο κανόνας αθροίσματος δεν εφαρμόζεται στο $\lim_{x\to0}(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})$ διότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα για περιπτώσεις απροσδιόριστης μορφής.

Παραδείγματα: (1) Έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$ και $\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{-2}{x}=\lim_{x\to+\infty}(-2)=-2$.

Ο -2 μπορεί να αντικατασταθεί με οποιονδήποτε αριθμό.

(2) $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to0+}x=0$ και $\lim_{x\to0+}\frac{1}{x^2}\cdot x=\lim_{x\to0+}\frac{1}{x}=+\infty$.

(3) $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}=+\infty$, $\lim_{x\to0}x^2=0$ και $\lim_{x\to0}\frac{1}{|x|}\cdot x^2=\lim_{x\to0}|x|=0$.

(4) $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$, $\lim_{x\to0}x=0$ αλλά το $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot x=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

Πρόταση 4.7 *Αν υπάρχει το $\lim f(x)$ και ο k είναι φυσικός, τότε*

$$\boxed{\lim f(x)^k=(\lim f(x))^k \qquad (k \text{ φυσικός})\,.}$$

Διότι $\lim f(x)^k=\lim\big(\underbrace{f(x)\cdots f(x)}_{k}\big)=\underbrace{\lim f(x)\cdots\lim f(x)}_{k}=(\lim f(x))^k$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^3=\big(\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})\big)^3=(1-0)^3=1$.

(2) $\lim_{x\to0-}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})^4=\big(\lim_{x\to0-}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\big)^4=\big((-\infty)-(+\infty)\big)^4=(-\infty)^4=+\infty$.

(3) Αν k φυσικός, τότε $\lim_{x\to\xi}x^k=(\lim_{x\to\xi}x)^k=\xi^k$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to\xi}x^k=\xi^k \quad (k \text{ φυσικός}).}$$

Αν, επιπλέον, $\xi\neq0$, τότε $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{x^k}=\big(\lim_{x\to\xi}\frac{1}{x}\big)^k=\frac{1}{\xi^k}$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to\xi}x^{-k}=\xi^{-k} \quad (k \text{ φυσικός και } \xi\neq0).}$$

(4) Αν k φυσικός, τότε $\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{(x-\xi)^k}=\big(\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{x-\xi}\big)^k=(+\infty)^k=+\infty$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to\xi+}(x-\xi)^{-k}=+\infty \quad (k \text{ φυσικός}).}$$

Αν k άρτιος φυσικός, τότε $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^k}=\big(\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{x-\xi}\big)^k=(-\infty)^k=+\infty$. Αν k περιττός φυσικός, τότε $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{(x-\xi)^k}=\big(\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{x-\xi}\big)^k=(-\infty)^k=-\infty$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to\xi-}(x-\xi)^{-k}=\begin{cases}+\infty & (k \text{ άρτιος φυσικός}),\\ -\infty & (k \text{ περιττός φυσικός}).\end{cases}}$$

(5) Αν k φυσικός, τότε $\lim_{x\to+\infty}x^k=(\lim_{x\to+\infty}x)^k=(+\infty)^k=+\infty$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^k=+\infty \quad (k \text{ φυσικός}).}$$

Αν k άρτιος φυσικός, τότε $\lim_{x\to-\infty}x^k=(\lim_{x\to-\infty}x)^k=(-\infty)^k=+\infty$. Αν k περιττός φυσικός, τότε $\lim_{x\to-\infty}x^k=(\lim_{x\to-\infty}x)^k=(-\infty)^k=-\infty$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}x^k=\begin{cases}+\infty & (k \text{ άρτιος φυσικός}),\\ -\infty & (k \text{ περιττός φυσικός}).\end{cases}}$$

(6) Αν k φυσικός, τότε $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^k}=\big(\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\big)^k=0^k=0$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}x^{-k}=0 \quad (k \text{ φυσικός}).}$$

Η $y=\frac{1}{f(x)}$ ορίζεται για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ για το οποίο ισχύει $f(x)\neq 0$.

Πρόταση 4.8 ***Κανόνας αντιστρόφου (Ι).*** *Αν υπάρχει το* $\lim f(x)$ *και το* $\frac{1}{\lim f(x)}$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή* $\lim f(x)\neq 0$, *τότε*

$$\boxed{\lim\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim f(x)}\,.}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)=\eta>0$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να είναι $|f(x)-\eta|<\min\{\frac{\eta^2\epsilon}{2},\frac{\eta}{2}\}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Συνεπάγεται $|f(x)-\eta|<\frac{\eta^2\epsilon}{2}$ και $|f(x)-\eta|<\frac{\eta}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Από την $|f(x)-\eta|<\frac{\eta}{2}$ συνεπάγεται $f(x)>\eta-\frac{\eta}{2}=\frac{\eta}{2}$ και, επομένως, είναι $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{\eta}\right|=\frac{|f(x)-\eta|}{f(x)\eta}<\frac{\frac{\eta^2\epsilon}{2}}{\frac{\eta}{2}\eta}=\epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\eta}=\frac{1}{\lim_{x\to\xi}f(x)}$.

Έστω $\lim_{x\to\xi}f(x)=+\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε να είναι $f(x)>\frac{1}{\epsilon}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Συνεπάγεται $0<\frac{1}{f(x)}<\epsilon$ και, επομένως, $\left|\frac{1}{f(x)}-0\right|=\frac{1}{f(x)}<\epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi}\frac{1}{f(x)}=0=\frac{1}{+\infty}=\frac{1}{\lim_{x\to\xi}f(x)}$.

Η αιτιολόγηση του κανόνα στις περιπτώσεις που το όριο είναι αρνητικός αριθμός ή $-\infty$ είναι παρόμοια.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\lim_{x\to1}(x+1)}=\frac{1}{2}$.

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+1)} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

(3) Ο κανόνας δεν ισχύει στην περίπτωση που το όριο μιας συνάρτησης είναι 0. Για παράδειγμα, είναι $\lim_{x\to 0} x = 0$ αλλά δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Το πρόβλημα στο τελευταίο παράδειγμα είναι ότι η συνάρτηση έχει και θετικές και αρνητικές τιμές. Αν μια συνάρτηση έχει τιμές σταθερού προσήμου, τότε, όπως θα δούμε σε λίγο, έχουμε θετικά αποτελέσματα.

Λέμε ότι μια συνάρτηση $y = f(x)$ έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα – για παράδειγμα, είναι θετική ή είναι φραγμένη ή είναι φθίνουσα – **κοντά στον** ξ, αν έχει αυτήν την ιδιότητα (i) σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$, αν ορίζεται σε δυο διαστήματα αριστερά και δεξιά του ξ, (ii) σε κάποιο διάστημα (ξ, b), αν ορίζεται σε ένα διάστημα δεξιά του ξ αλλά σε κανένα σημείο ενός διαστήματος αριστερά του ξ, (iii) σε κάποιο διάστημα (a, ξ), αν ορίζεται σε ένα διάστημα αριστερά του ξ αλλά σε κανένα σημείο ενός διαστήματος δεξιά του ξ. Στην περίπτωση που η $y = f(x)$ έχει τη συγκεκριμένη ιδιότητα σε κάποιο διάστημα (ξ, b) (ανεξάρτητα από το αν είναι ορισμένη ή όχι σε διάστημα αριστερά του ξ), τότε λέμε ότι έχει την ιδιότητα **κοντά στον** ξ **από τα δεξιά του**. Αν η $y = f(x)$ έχει την ιδιότητα σε κάποιο διάστημα (a, ξ) (ανεξάρτητα από το αν είναι ορισμένη ή όχι σε διάστημα δεξιά του ξ), τότε λέμε ότι έχει την ιδιότητα **κοντά στον** ξ **από τα αριστερά του**.

Ομοίως, λέμε ότι η $y = f(x)$ έχει μια συγκεκριμένη ιδιότητα **κοντά στο** $+\infty$ αν έχει την ιδιότητα σε κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ και λέμε ότι έχει την ιδιότητα **κοντά στο** $-\infty$ αν την έχει σε κάποιο διάστημα $(-\infty, b)$.

Παραδείγματα: (1) Ισχύει $0 < \frac{1}{x} < 1$ στο διάστημα $(1, +\infty)$, οπότε λέμε ότι η $y = \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη (ή, πιο συγκεκριμένα, είναι > 0 και < 1) κοντά στο $+\infty$.

(2) Ισχύει $x(1-x) > 0$ στο διάστημα $(0, 1)$, οπότε λέμε ότι η $y = x(1-x)$ είναι θετική κοντά στον 0 από τα δεξιά του και κοντά στον 1 από τα αριστερά του. Επίσης, μπορούμε να πούμε ότι η $y = x(1-x)$ είναι θετική κοντά στον $\frac{1}{4}$, αφού ισχύει $x(1-x) > 0$ στην ένωση $(0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{4}, 1)$.

(3) Η $y = \frac{1}{x(x-1)}$ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \frac{1}{2})$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(\frac{1}{2}, 1)$ και $(1, +\infty)$. Επομένως, λέμε ότι η $y = \frac{1}{x(x-1)}$ είναι γνησίως αύξουσα κοντά στο $-\infty$ και κοντά στον 0 από τα αριστερά του και από τα δεξιά του και γνησίως φθίνουσα κοντά στον 1 από τα αριστερά του και από τα δεξιά του και κοντά στο $+\infty$. Προσέξτε: η $y = \frac{1}{x(x-1)}$ δεν είναι γνησίως αύξουσα κοντά στον 0 ούτε γνησίως φθίνουσα κοντά στον 1 !

Όταν εξετάζουμε κάποιο όριο $\lim f(x)$ καθώς $x \to \xi$ ή $x \to \xi+$ ή $x \to \xi-$ ή $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$ και η συνάρτηση $y = f(x)$ έχει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα κοντά στον ξ ή στον ξ από τα δεξιά του ή στον ξ από τα αριστερά του ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, αντιστοίχως, τότε για συντομία λέμε ότι η συνάρτηση έχει την ιδιότητα αυτή **κοντά στο όριο του** x.

Πρόταση 4.9 ***Κανόνας αντιστρόφου (II)***. (1) *Αν* $\lim f(x) = 0$ *και η* $y = f(x)$ *είναι θετική κοντά στο όριο του* x*, τότε* $\lim \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(2) *Αν* $\lim f(x) = 0$ *και η* $y = f(x)$ *είναι αρνητική κοντά στο όριο του* x*, τότε*

$\lim \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

Απόδειξη: (1) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε x σε κάποια ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|f(x)| = |f(x) - 0| < \frac{1}{M}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \xi - a, b - \xi\}$, οπότε κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ περιέχεται στην $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και, επομένως, είναι $f(x) > 0$ για κάθε τέτοιον x. Επίσης, είναι $\delta \leq \delta'$, οπότε είναι $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{|f(x)|} > M$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.
(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Παράδειγμα: $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0 - 0 = 0$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

Τα αποτελέσματα για τον *λόγο δυο συναρτήσεων* $y = f(x)$ και $y = g(x)$, δηλαδή για τη συνάρτηση $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, προκύπτουν από τον συνδυασμό του κανόνα γινομένου και του κανόνα αντιστρόφου.

Πρόταση 4.10 ***Κανόνας λόγου***. *Αν υπάρχουν τα* $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ *και ο λόγος* $\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε υπάρχει και το* $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ *και είναι*

$$\boxed{\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}\,.}$$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x}{x-2} = \frac{\lim_{x\to1}(x^2+x)}{\lim_{x\to1}(x-2)} = \frac{1^2+1}{1-2} = -2$.

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to+\infty}(1+2\frac{1}{x})} = (+\infty)\frac{1-0+0}{1+2\cdot0} = +\infty$. Παρατηρήστε ότι η άμεση εφαρμογή του κανόνα λόγου στο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x+2}$ καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή.

Ιδου μερικά παραδείγματα για τις απροσδιόριστες μορφές $\frac{0}{0}$ και $\frac{+\infty}{+\infty}$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to0+}(-2x) = 0$, $\lim_{x\to0+} x = 0$ και $\lim_{x\to0+}\frac{-2x}{x} = \lim_{x\to0+}(-2) = -2$.

Στη θέση του -2 μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

(2) $\lim_{x\to0+} x = 0$, $\lim_{x\to0+} x^2 = 0$ και $\lim_{x\to0+}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to0+}\frac{1}{x} = +\infty$.

(3) $\lim_{x\to0+} x^2 = 0$, $\lim_{x\to0+} x = 0$ και $\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to0+} x = 0$.

(4) $\lim_{x\to+\infty} 5x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 5 = 5$.

Μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός στη θέση του 5.

(5) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$.

(6) $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Πρόταση 4.11 *Αν υπάρχει το* $\lim f(x)$, *τότε υπάρχει και το* $\lim |f(x)|$ *και είναι*

$$\boxed{\lim |f(x)| = |\lim f(x)|.}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Παρατηρούμε ότι ισχύει $\big||f(x)| - |\eta|\big| \leq |f(x) - \eta|$, οπότε συνεπάγεται $\big||f(x)| - |\eta|\big| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} |f(x)| = |\eta| = |\lim_{x\to\xi} f(x)|$.

Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ ή $\lim_{x\to\xi} f(x) = -\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $f(x) > M$ ή $f(x) < -M$, αντιστοίχως, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Και στις δυο περιπτώσεις συνεπάγεται $|f(x)| > M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} |f(x)| = +\infty = |\pm\infty| = |\lim_{x\to\xi} f(x)|$.

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to 1} |x - 2| = |\lim_{x\to 1}(x - 2)| = |1 - 2| = 1$.

(2) $\lim_{x\to 0-} |\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}| = |\lim_{x\to 0-}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})| = |-\infty - (+\infty)| = |-\infty| = +\infty$.

(3) Δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 4.11. Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = \frac{|x|}{x}$ με πεδίο ορισμού $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Τότε $\lim_{x\to 0} |f(x)| = \lim_{x\to 0} \big|\frac{|x|}{x}\big| = \lim_{x\to 0} 1 = 1$. Όμως, γνωρίζουμε ότι το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Γ. Αλλαγή μεταβλητής.

Μερικές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο συνάρτησης $z = g(f(x))$ η οποία παρουσιάζεται ως σύνθεση δυο συναρτήσεων: της $y = f(x)$ και της $z = g(y)$. Εννοείται, φυσικά, ότι για να ορίζεται η σύνθεση αυτή πρέπει το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$. Σε πολλές περιπτώσεις είναι ήδη γνωστά τα όρια των δυο απλούστερων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, έστω ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{y\to\eta} g(y) = \zeta$. Παρατηρήστε, τώρα, την εξής «αλυσιδωτή διαδικασία». Αν ο x παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$, τότε ο $y = f(x)$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον η και, επομένως, αρκετά κοντά στον η. Αν, επιπλέον, *υποθέσουμε* ότι ισχύει $y = f(x) \neq \eta$ κοντά στον ξ, τότε ο $y = f(x)$ παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον η και $\neq \eta$. Επομένως, ο $z = g(f(x)) = g(y)$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον ζ. Ξεκινώντας, λοιπόν, από το ότι ο x παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$ καταλήγουμε στο ότι ο $z = g(f(x)) = g(y)$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον ζ. Συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = \zeta$.

Παρατηρήστε ότι στο αρχικό όριο που θέλουμε να υπολογίσουμε, δηλαδή το όριο της συνάρτησης $z = g(f(x))$, δεν εμφανίζεται η μεταβλητή y. Τη μεταβλητή αυτή την εμφανίζουμε εμείς και συνηθίζεται να λέμε ότι κάνουμε **αλλαγή μεταβλητής** ή **αντικατάσταση**, εννοώντας ότι (i) αλλάζουμε τη μεταβλητή x σε μεταβλητή $y = f(x)$ ή ότι αντικαθιστούμε τη μεταβλητή $f(x)$ με τη μεταβλητή y και (ii) αντικαθιστούμε το $\lim_{x\to}$ σε $\lim_{y\to}$.

Το γενικό αποτέλεσμα έχει ως εξής.

Πρόταση 4.12 ***Κανόνας αλλαγής μεταβλητής*** *ή* ***κανόνας αντικατάστασης.*** *Έστω ότι ορίζεται η σύνθεση $z = g(f(x))$ των $y = f(x)$ και $z = g(y)$. Αν $\lim f(x) = \eta$ και η $y = f(x)$ δεν παίρνει την τιμή η κοντά στο* *όριο του x και αν υπάρχει το $\lim_{y\to\eta} g(y)$, τότε $\lim g(f(x)) = \lim_{y\to\eta} g(y)$.*

Τα ανάλογα ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το η με ένα από τα $\eta\pm$ ή $\pm\infty$. Συνοπτικά:

$$\lim g(f(x)) = \begin{cases} \lim_{y\to\eta} g(y), & \text{αν } f(x)\to\eta \ \big(f(x)\neq\eta \text{ κοντά στο όριο του } x\big) \\ \lim_{y\to\eta+} g(y), & \text{αν } f(x)\to\eta \ \big(f(x)>\eta \text{ κοντά στο όριο του } x\big) \\ \lim_{y\to\eta-} g(y), & \text{αν } f(x)\to\eta \ \big(f(x)<\eta \text{ κοντά στο όριο του } x\big) \\ \lim_{y\to+\infty} g(y), & \text{αν } f(x)\to+\infty \\ \lim_{y\to-\infty} g(y), & \text{αν } f(x)\to-\infty \end{cases}$$

Απόδειξη: Θα δούμε την απόδειξη μόνο στην περίπτωση που η $y = f(x)$ ορίζεται (τουλάχιστον) σε μια ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και η $z = g(x)$ ορίζεται (τουλάχιστον) σε μια ένωση $(c,\eta)\cup(\eta,d)$ και είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{y\to\eta} g(y) = \zeta$. Υποθέτουμε επίσης ότι ισχύει $f(x)\neq\eta$ για κάθε x σε κάποια ένωση $(a',\xi)\cup(\xi,b')$, όπου $a\leq a'<\xi<b'\leq b$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = \zeta$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχει $\delta'>0$ ώστε να είναι $|g(y)-\zeta|<\epsilon$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$ που ικανοποιεί την $0<|y-\eta|<\delta'$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta''>0$ ώστε να είναι $|f(x)-\eta|<\delta'$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta'',\xi-a',b'-\xi\}$. Τότε κάθε x που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$ ικανοποιεί και την $0<|x-\xi|<\delta''$ και, συγχρόνως, ανήκει στην $(a',\xi)\cup(\xi,b')$. Άρα για κάθε x που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$ είναι $|f(x)-\eta|<\delta'$ και $f(x)\neq\eta$ και, επομένως, είναι $0<|f(x)-\eta|<\delta'$ και αυτό, φυσικά, συνεπάγεται ότι $\big|g(f(x))-\zeta\big|<\epsilon$.

Παραδείγματα: (1) Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}+1$ η $z=\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$ γράφεται $z=\frac{y^4}{y^8+y^{13}+5}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0}(\sqrt{x}+1) = 0+1 = 1$ και $y=\sqrt{x}+1>1$ για κάθε x κοντά στον 0.

Άρα $\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5} = \lim_{y\to1+}\frac{y^4}{y^8+y^{13}+5} = \frac{1}{7}$.

(2) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to1+}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{(x-1)^3}+1\big)$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ η $z=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{(x-1)^3}+1$ γίνεται $z=y-y^6+1$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to1+} y = \lim_{x\to1+}\sqrt{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Άρα $\lim_{x\to1+}\big(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{(x-1)^3}+1\big) = \lim_{y\to+\infty}(y-y^6+1) = \lim_{y\to+\infty} y^6(-1+y^{-5}+y^{-6}) = (+\infty)(-1+0+0) = -\infty$.

(3) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2}+(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big)$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}$ η $z=(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2}+(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}$ γράφεται $z=y^{-2}+y^{-4}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0\cdot\frac{1-0}{1+0+0} = 0$ και $y=\frac{x-1}{x^2+x+1}>0$ για κάθε x κοντά στο $+\infty$ (και, συγκεκριμένα, για κάθε $x>1$).

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\big((\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-2}+(\frac{x-1}{x^2+x+1})^{-4}\big) = \lim_{y\to0+}(y^{-2}+y^{-4}) = +\infty$.

(4) Μερικές χρήσιμες, απλές και κάπως γενικές σχέσεις είναι οι παρακάτω.

$$\lim_{x\to0+} g\Big(\frac{1}{x}\Big) = \lim_{y\to+\infty} g(y), \qquad \lim_{x\to0-} g\Big(\frac{1}{x}\Big) = \lim_{y\to-\infty} g(y),$$

$$\lim_{x\to+\infty} g\Big(\frac{1}{x}\Big) = \lim_{y\to 0+} g(y), \qquad \lim_{x\to-\infty} g\Big(\frac{1}{x}\Big) = \lim_{y\to 0-} g(y),$$
$$\lim_{x\to+\infty} g(-x) = \lim_{y\to-\infty} g(y), \qquad \lim_{x\to-\infty} g(-x) = \lim_{y\to+\infty} g(y),$$
$$\lim_{x\to\xi} g(ax+b) = \lim_{y\to a\xi+b} g(y).$$

Οι σχέσεις αυτές δικαιολογούνται μέσω των αλλαγών μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$, $y = -x$ και $y = ax + b$.

Δ. Όρια και ανισότητες.

Όπως και στις προηγούμενες υποενότητες, όλα τα αποτελέσματα θα διατυπώνονται για συντομία με το σύμβολο lim αντί των $\lim_{x\to\xi}$ ή $\lim_{x\to\xi\pm}$ ή $\lim_{x\to\pm\infty}$. Επίσης, τα όρια που εμφανίζονται στην ίδια διατύπωση θα είναι όλα του ίδιου τύπου και οι αποδείξεις θα γίνονται μόνο στην περίπτωση που οι συναρτήσεις ορίζονται σε ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και μόνο για το όριο $\lim_{x\to\xi}$.

Πρόταση 4.13 *Έστω ότι ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο όριο του x.*
(1) *Αν $\lim f(x) = +\infty$, τότε $\lim g(x) = +\infty$.*
(2) *Αν $\lim g(x) = -\infty$, τότε $\lim f(x) = -\infty$.*

Απόδειξη: (1) Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $f(x) > M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta'$. Επίσης υπάρχει κάποια ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ ώστε να είναι $g(x) \ge f(x)$ για κάθε x στην ένωση αυτή. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \xi - a, b - \xi\}$, οπότε είναι $\delta \le \delta'$ και, επίσης, κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ περιέχεται στην ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$. Συνεπάγεται $g(x) \ge f(x) > M$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = +\infty$.
(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Παραδείγματα: (1) Θεωρούμε την $y = \frac{x^2+x-1}{x}$. Επειδή $\frac{x^2+x-1}{x} \ge \frac{x^2}{x} = x$ για κάθε x στο $(1,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, προκύπτει $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x} = +\infty$.
(2) Επειδή ισχύει $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \ge \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$ για κάθε x στο $(-1,0)\cup(0,1)$ και επειδή $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 0}(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}) = +\infty$.

Πρόταση 4.14 *Αν $\lim f(x) = \eta$ και $\lim g(x) = \zeta$ και αν ισχύει $f(x) \le g(x)$ κοντά στο όριο του x, τότε $\eta \le \zeta$.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = \zeta$ και ότι ισχύει $f(x) \le g(x)$ για κάθε x σε κάποια ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$.

Ας υποθέσουμε (για να καταλήξουμε σε αντίφαση) ότι $\zeta < \eta$. Παίρνοντας $\epsilon = \frac{\eta-\zeta}{2} > 0$, συνεπάγεται ότι υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \frac{\eta-\zeta}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta'$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $|g(x) - \zeta| < \frac{\eta-\zeta}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = g(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta'', \xi - a, b - \xi\}$, οπότε κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ περιέχεται στην $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και, επομένως, είναι $f(x) \le g(x)$ για κάθε τέτοιον x. Επίσης, είναι $\delta \le \delta'$ και $\delta \le \delta''$, οπότε είναι $|f(x) - \eta| < \frac{\eta-\zeta}{2}$ ΚΑΙ $|g(x) - \zeta| < \frac{\eta-\zeta}{2}$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα $f(x) > \eta - \frac{\eta-\zeta}{2} = \frac{\eta+\zeta}{2}$ και $g(x) < \zeta + \frac{\eta-\zeta}{2} = \frac{\eta+\zeta}{2}$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Δηλαδή είναι $f(x) > \frac{\eta+\zeta}{2} > g(x)$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Παραδείγματα: (1) Αν υπάρχει το $\lim f(x)$ και αν είναι $f(x) \leq u$ κοντά στο όριο του x, τότε είναι $\lim f(x) \leq u$. Πράγματι, μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση $y = u$ οπότε, επειδή είναι $f(x) \leq u$ για κάθε x κοντά στο όριό του και $\lim u = u$, συνεπάγεται $\lim f(x) \leq u$.

(2) Αν υπάρχει το $\lim f(x)$ και αν είναι $f(x) \geq l$ κοντά στο όριο του x, τότε είναι $\lim f(x) \geq l$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

(3) Αν υπάρχει το $\lim f(x)$ και κοντά στο όριο του x οι τιμές της $y = f(x)$ ανήκουν σε κάποιο κλειστό διάστημα $[l,u]$, τότε και η τιμή του $\lim f(x)$ ανήκει στο $[l,u]$. Αυτό είναι συνδυασμός των (1) και (2).

Πρόταση 4.15 ***Παρεμβολή***. *Αν $\lim f(x) = \lim h(x) = \rho$ και αν ισχύει $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο όριο του x, τότε $\lim g(x) = \rho$.*

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \rho$ και $\lim_{x\to\xi} h(x) = \rho$ και ότι είναι $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε x σε κάποια ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|f(x)-\rho| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta'$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $|h(x)-\rho| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = h(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta''$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta'', \xi-a, b-\xi\}$, οπότε κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ περιέχεται στην $(a,\xi)\cup(\xi,b)$, οπότε είναι $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε τέτοιον x. Επίσης, είναι $\delta \leq \delta'$ και $\delta \leq \delta''$, οπότε είναι $|f(x)-\rho| < \epsilon$ ΚΑΙ $|h(x)-\rho| < \epsilon$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα $f(x) > \rho-\epsilon$ και $h(x) < \rho+\epsilon$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Τέλος, συνεπάγεται $\rho-\epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \rho+\epsilon$ και, επομένως, $|g(x)-\rho| < \epsilon$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi} g(x) = \rho$.

Παραδείγματα: (1) Έστω $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) < \frac{1}{x}$ για κάθε $x \geq 3$. Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x^2}) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(2) Είναι $x-1 < [x] \leq x$ για κάθε x. Άρα είναι $1-\frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$ για κάθε $x > 0$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}) = 1-0 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} 1 = 1$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x} = 1$.

(3) Είναι $-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ για κάθε x στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$. Επειδή είναι $\lim_{x\to+\infty}\big(-\frac{1}{|x|}\big) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x}{x} = 0$.

Πρόταση 4.16 (1) *Αν $\lim f(x) < u$, τότε είναι $f(x) < u$ κοντά στο όριο του x.* (2) *Αν $\lim f(x) > l$, τότε είναι $f(x) > l$ κοντά στο όριο του x.*

Απόδειξη: (1) Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη (τουλάχιστον) σε κάποια ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta < u$. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\epsilon = u-\eta > 0$. Υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $|f(x)-\eta| < u-\eta$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta'$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \xi-a, b-\xi\}$, οπότε ισχύει $\delta \leq \delta'$ και, επίσης η ένωση $(\xi-\delta,\xi)\cup(\xi,\xi+\delta)$ είναι υποσύνολο της $(a,\xi)\cup(\xi,b)$. Επομένως, ισχύει $|f(x)-\eta| < u-\eta$ για κάθε x στην ένωση $(\xi-\delta,\xi)\cup(\xi,\xi+\delta)$. Από την $|f(x)-\eta| < u-\eta$

συνεπάγεται η $f(x) < \eta + (u - \eta) = u$ και συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(x) < u$ για κάθε x στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$. Άρα ισχύει $f(x) < u$ κοντά στον ξ.

Τώρα υποθέτουμε ότι πάλι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη (τουλάχιστον) σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ και $\lim_{x \to \xi} f(x) = -\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $M > 0$ ο οποίος είναι $\geq -u$ (για παράδειγμα, τον $M = -u$, αν $u < 0$, και τον $M = 1$, αν $u \geq 0$) και εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με αυτόν τον M. Υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \xi - a, b - \xi\}$, οπότε, όπως πριν, ισχύει $f(x) < -M$ για κάθε x στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$. Επειδή $M \geq -u$, από την $f(x) < -M$ συνεπάγεται η $f(x) < u$ και συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f(x) < u$ για κάθε x στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$. Άρα ισχύει $f(x) < u$ κοντά στον ξ.
(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Παραδείγματα: (1) Είναι $\lim_{x \to 1} \frac{x^7 - 2x^6 + x^4 + 3x^2 - 5x + 1}{x^8 + 6x^5 - x^4 + 22x^2 + 1} = -\frac{1}{29} > -\frac{1}{28}$. Άρα ισχύει $\frac{x^7 - 2x^6 + x^4 + 3x^2 - 5x + 1}{x^8 + 6x^5 - x^4 + 22x^2 + 1} > -\frac{1}{28}$ κοντά στον 1. Με άλλα λόγια υπάρχουν κάποιοι a, b ώστε να ισχύει αυτή η ανισότητα για κάθε x στην ένωση $(a, 1) \cup (1, b)$.

Το να βρεθούν συγκεκριμένες τιμές των a, b είναι λίγο δύσκολο διότι η παραπάνω ανισότητα δεν είναι και τόσο απλή.

(2) Είναι $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \frac{1}{x} + 1}{(x + \frac{1}{x})^2 + 1} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t+1}{t^2+1} = 0$. Άρα ισχύει $\frac{x + \frac{1}{x} + 1}{(x + \frac{1}{x})^2 + 1} < \frac{1}{5}$ κοντά στο $+\infty$. Δηλαδή υπάρχει κάποιος a ώστε να είναι $\frac{x + \frac{1}{x} + 1}{(x + \frac{1}{x})^2 + 1} < \frac{1}{5}$ για κάθε x στο διάστημα $(a, +\infty)$.

Στο παράδειγμα αυτό, αν θέλουμε, μπορούμε με λίγες πράξεις να υπολογίσουμε μια συγκεκριμένη τιμή του a.

Ε. Όρια και φραγμένες συναρτήσεις.

Πρόταση 4.17 *Αν το $\lim f(x)$ είναι αριθμός, τότε η $y = f(x)$ είναι φραγμένη κοντά στο όριο του x.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρόταση μόνο στην περίπτωση που η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ και που $\lim_{x \to \xi} f(x) = \eta$. Οι αποδείξεις στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

Θεωρούμε $\epsilon = 1$, για παράδειγμα. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \xi - a, b - \xi\}$, οπότε η ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ περιέχεται στην $(a, \xi) \cup (\xi, b)$. Επίσης, είναι $\delta \leq \delta'$ και, επομένως, είναι $|f(x) - \eta| < 1$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$, δηλαδή για κάθε x στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$. Τώρα από την $|f(x) - \eta| < 1$ συνεπάγεται $1 - \eta < f(x) < 1 + \eta$, οπότε η $y = f(x)$ είναι φραγμένη στην $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$, δηλαδή είναι φραγμένη κοντά στον ξ.

Παραδείγματα: (1) Για την $y = \frac{1}{x}$ γνωρίζουμε ότι $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ και συμπεραίνουμε ότι είναι φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Αυτό δε σημαίνει ότι η $y = \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της· και, πράγματι, όπως επίσης γνωρίζουμε, δεν είναι φραγμένη στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ούτε καν στο $(0, +\infty)$. Υπάρχει, όμως, κάποιο διάστημα $(a, +\infty)$ στο οποίο η $y = \frac{1}{x}$ *είναι* φραγμένη. Για παράδειγμα, είναι φραγμένη στο $(1, +\infty)$ αφού ισχύει $0 \leq \frac{1}{x} \leq 1$ για κάθε x στο $(1, +\infty)$.

(2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^5 + 1}{2x^5 - x^3 + x^2 + 8x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + x^{-5}}{2 - x^{-2} + x^{-3} + 8x^{-4} + x^{-5}} = \frac{1}{2}$. Άρα η

$y = \frac{x^5+1}{2x^5-x^3+x^2+8x+1}$ είναι φραγμένη κοντά στο $-\infty$. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο διάστημα $(-\infty, b)$ στο οποίο η συνάρτηση είναι φραγμένη. Όμως, το να βρεθεί συγκεκριμένο τέτοιο διάστημα (δηλαδή ο b) καθώς και συγκεκριμένο άνω φράγμα και κάτω φράγμα στο διάστημα αυτό δεν είναι τόσο εύκολο αφού η συνάρτηση δεν έχει απλό τύπο!

Πρόταση 4.18 (1) *Αν* $\lim f(x) = +\infty$, *τότε η* $y = f(x)$ *είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη κοντά στο όριο του* x.
(2) *Αν* $\lim f(x) = -\infty$, *τότε η* $y = f(x)$ *είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη κοντά στο όριο του* x.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρόταση μόνο στην περίπτωση που η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ και που $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$. Οι αποδείξεις στις υπόλοιπες περιπτώσεις είναι παρόμοιες.

Θεωρούμε $M = 1$, για παράδειγμα. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $f(x) > 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta'$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \xi - a, b - \xi\}$, οπότε η ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$ περιέχεται στην $(a, \xi) \cup (\xi, b)$. Επίσης, είναι $\delta \leq \delta'$ και, επομένως, είναι $f(x) > 1$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$, δηλαδή για κάθε x στην ένωση $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$. Άρα η $y = f(x)$ είναι κάτω φραγμένη στην $(\xi - \delta, \xi) \cup (\xi, \xi + \delta)$, δηλαδή είναι κάτω φραγμένη κοντά στον ξ.

Έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι η $y = f(x)$ είναι άνω φραγμένη σε κάποια ένωση $(c, \xi) \cup (\xi, d)$. Δηλαδή υπάρχει u ώστε να είναι $f(x) \leq u$ για κάθε x στην $(c, \xi) \cup (\xi, d)$. Τότε συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) \leq u$ το οποίο αντιφάσκει με το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.

Παραδείγματα: (1) Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(x - \frac{1}{x}) = +\infty$, η $y = x - \frac{1}{x}$ είναι κάτω φραγμένη αλλά όχι άνω φραγμένη κοντά στο $+\infty$. Για παράδειγμα, η $y = x - \frac{1}{x}$ είναι κάτω φραγμένη στο διάστημα $(1, +\infty)$ και, συγκεκριμένα, ισχύει $x - \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε x στο $(1, +\infty)$.

Επίσης, είναι $\lim_{x\to0+}(x - \frac{1}{x}) = -\infty$, οπότε η $y = x - \frac{1}{x}$ είναι άνω φραγμένη αλλά όχι κάτω φραγμένη κοντά στον 0 από τα δεξιά του. Συγκεκριμένα, είναι άνω φραγμένη στο διάστημα $(0, 1)$ και, μάλιστα, είναι $x - \frac{1}{x} \leq 0$ για κάθε x στο $(0, 1)$.

(2) Βρίσκουμε $\lim_{x\to0-} \frac{(x+\frac{1}{x})^7+1}{3(x+\frac{1}{x})^5+7(x+\frac{1}{x})^4-(x+\frac{1}{x})^3+2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^7+1}{3t^5+7t^4-t^3+2} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^2(1+t^{-7})}{3+7t^{-1}-t^{-2}+2t^{-5}} = +\infty$. Άρα η $y = \frac{(x+\frac{1}{x})^7+1}{3(x+\frac{1}{x})^5+7(x+\frac{1}{x})^4-(x+\frac{1}{x})^3+2}$ είναι κάτω φραγμένη κοντά στον 0 από τα αριστερά του. Δηλαδή υπάρχει κάποιος a ώστε η συνάρτηση να είναι κάτω φραγμένη στο διάστημα $(a, 0)$. Επειδή ο τύπος της συνάρτησης δεν είναι απλός, δεν είναι τόσο εύκολο να βρεθεί συγκεκριμένος a και συγκεκριμένο κάτω φράγμα της συνάρτησης στο διάστημα $(a, 0)$.

Ασκήσεις.

Α. Ισότητα ορίων.

1. Βρείτε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x \to 0\pm$ και $x \to \pm\infty$.

$$y = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} |x-1|^{-\frac{1}{4}}, & \text{αν } |x| \geq 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } |x| < 1. \end{cases}$$

2. Για κάθε ακέραιο ξ υπολογίστε τα $\lim_{x\to\xi\pm}[x]$. Το γράφημα της $y=[x]$ θα βοηθήσει!

   (Υπόδειξη: Δουλέψτε στα διαστήματα $(\xi-1,\xi)$ και $(\xi,\xi+1)$, σε καθένα από τα οποία η συνάρτηση είναι σταθερή· $y=[x]=\xi-1$ στο πρώτο και $y=[x]=\xi$ στο δεύτερο.)

   Κάντε το ίδιο για κάθε μη ακέραιο ξ.

   (Υπόδειξη: Δουλέψτε στην ένωση $([\xi],\xi)\cup(\xi,[\xi]+1)$, στην οποία η συνάρτηση είναι σταθερή· $y=[x]=[\xi]$.)

   Για ποιους ξ υπάρχει το $\lim_{x\to\xi}[x]$;

3. Υπολογίστε τα: $\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x}\right]$ και $\lim_{x\to\pm\infty}x\left[\frac{1}{x}\right]$.

   (Υπόδειξη: Δουλέψτε στα διαστήματα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$.)

Β. Όρια και αλγεβρικές πράξεις.

1. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x\to 1\pm$.

$$y=\frac{1+x}{1+x^3}\,,\ y=\frac{1-x^2}{1-x^3}\,,\ y=\frac{1}{1+(x-1)^{-3}}\,,\ y=\frac{1}{(x-1)^2-|x-1|}\,,$$

$$y=(x-1)^{-1}+|x-1|^{-\frac{1}{2}}\,,\quad y=\big((x-1)^{-1}+|x-1|^{-\frac{1}{2}}\big)^2\,.$$

2. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x\to\pm\infty$.

$$y=-x+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\,,\quad y=\frac{x^3+1}{x^2+1}\,,\quad y=\frac{x^2-4x+3}{x-3}\,,\quad y=\frac{2x^2+3x+1}{x^2+1}\,,$$

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^3+1}\,,\quad y=\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^4,\quad y=\frac{(2x+1)^3(3x^2+2)^2(x+4)^{13}}{x^{20}}\,.$$

3. Έστω ότι $f(x)\neq 1$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$. Αποδείξτε ότι $\lim f(x)=2$ αν και μόνο αν $\lim\frac{f(x)+3}{f(x)-1}=5$.

4. Αν $\lim(f(x))^2=1$, συνεπάγεται ότι είτε $\lim f(x)=1$ είτε $\lim f(x)=-1$; Μελετήστε το παράδειγμα της $y=f(x)=\frac{|x|}{x}$ καθώς $x\to 0$.

Γ. Αλλαγή μεταβλητής.

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια κάνοντας αλλαγή (ή αλλαγές) μεταβλητής.

$$\lim_{x\to 0}\Big(\Big(\frac{x^2+1}{x^5+2x^3+2}\Big)^8+3\Big(\frac{x^2+1}{x^5+2x^3+2}\Big)^4+1\Big),$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}+1}\,,\ \lim_{x\to 0-}\sqrt[3]{\Big(\sqrt{|x|}+\frac{1}{x}\Big)^3-2\Big(\sqrt{|x|}+\frac{1}{x}\Big)^2+1}\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sqrt[3]{\frac{1}{x^2+x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}}\Big).$$

2. Δικαιολογήστε τις παρακάτω σχέσεις.

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x^2) = \lim_{y\to+\infty} g(y), \qquad \lim_{x\to 0+} g(\sqrt{x}) = \lim_{y\to 0+} g(y),$$

$$\lim_{x\to 0} g\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = \lim_{y\to+\infty} g(y).$$

3. Υπολογίστε τις πιθανές τιμές του $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ αν γνωρίζουμε ότι το όριο αυτό υπάρχει και ότι ισχύει $f(\sqrt{x}) = -3(f(x))^2 + 1$ για κάθε $x > 0$.

Δ. Όρια και ανισότητες.

1. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο των Προτάσεων 4.13, 4.14 και 4.15.

2. Βρείτε το $\lim_{x\to 1} f(x)$, αν είναι $x - |x-1|^{\frac{1}{2}} < f(x) \leq x + |x-1|^{\frac{1}{2}}$ για κάθε x στην ένωση $(0,1)\cup(1,\frac{3}{2})$.

3. Βρείτε το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, αν είναι $\frac{x+1}{2x-1} < f(x) < \frac{x-1}{2x+1}$ για κάθε $x \leq -7$.

4. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$, αν $(x-1)f(x) \geq 1$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-1| < \frac{1}{4}$.

5. Βρείτε τα παρακάτω όρια, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $[a] \leq a < [a]+1$.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[x], \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{[x]}{x}, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{[x^2]}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x}]}{x}, \quad \lim_{x\to 1\pm}\Big[\frac{1}{x-1}\Big].$$

6. Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και ότι η $y = g(x)$ είναι κάτω φραγμένη κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim(f(x)+g(x)) = +\infty$.

   Έστω $\lim f(x) = -\infty$ και ότι η $y = g(x)$ είναι άνω φραγμένη κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim(f(x)+g(x)) = -\infty$.

7. Έστω $\lim f(x) = 0$ και ότι η $y = g(x)$ είναι φραγμένη κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim f(x)g(x) = 0$.

8. Έστω $\lim f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η $y = g(x)$ έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim f(x)g(x) = +\infty$ ή $-\infty$, αντιστοίχως.

   Έστω $\lim f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ και ότι η $y = g(x)$ έχει αρνητικό άνω φράγμα κοντά στο όριο του x. Αποδείξτε ότι $\lim f(x)g(x) = -\infty$ ή $+\infty$, αντιστοίχως.

9. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 4.16.

10. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια, εξετάστε αν ισχύει:

    (i) $\frac{3x^2+7x+1}{x^2-5x+1} < \frac{301}{100}$ κοντα στο $+\infty$.

    Αν ναι, βρείτε συγκεκριμένο a ώστε να ισχύει η ανισότητα αυτή για κάθε x στο διάστημα $(a,+\infty)$.

(ii) $\frac{x^8+1}{4x^4-x^2+2x-1} < \frac{3}{4}$ κοντά στον αριθμό 1.

(iii) $(x-\frac{1}{x})^5 - (\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^3 > 10^7$ κοντά στο $+\infty$.

(iv) $-10^{-8} < \frac{x^4+13x^3+25x^2+33}{x^5+2x+1} < 10^{-7}$ κοντά στο $-\infty$.

11. Έστω $\lim f(x) < \lim g(x)$. Αποδείξτε ότι ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο όριο του x.

    (Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος:* Θεωρήστε την $y = g(x) - f(x)$ και σκεφτείτε αν υπάρχει περίπτωση απροσδιόριστης μορφής. *Δεύτερος τρόπος:* Θεωρήστε οποιονδήποτε αριθμό ρ ώστε $\lim f(x) < \rho < \lim g(x)$ και εφαρμόστε την Πρόταση 4.16 ξεχωριστά για τις $\lim f(x) < \rho$ και $\rho < \lim g(x)$. Προσέξτε σε ποια διαστήματα ισχύουν *ταυτόχρονα* και οι δυο ανισότητες.)

E. Όρια και φραγμένες συναρτήσεις.

1. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο των Προτάσεων 4.17 και 4.18.

2. Αφού υπολογίσετε τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στον 0 ή στον 0 από τα δεξιά του ή στον 0 από τα αριστερά του.

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{|x|}, \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{αν } x > 0, \end{cases} \quad y = \frac{1}{x^3},$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0, \\ x, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{αν } x < 0, \\ \frac{1}{x-1}, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases} \quad y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{|x|}}.$$

   Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένα διαστήματα $(a, 0)$ ή $(0, b)$ ή ενώσεις $(a, 0) \cup (0, b)$ στα οποία οι παραπάνω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες καθώς και συγκεκριμένα άνω φράγματα ή κάτω φράγματα;

3. Αφού υπολογίσετε τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στο $+\infty$ ή στο $-\infty$.

$$y = x^2, \quad y = -x^3, \quad y = x^{-2}, \quad y = |x|^{\frac{1}{2}}, \quad y = (-x)^{-\frac{1}{3}}, \quad y = -|x|.$$

   Μπορείτε να βρείτε συγκεκριμένα διαστήματα $(a, +\infty)$ ή $(-\infty, b)$ στα οποία οι παραπάνω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες καθώς και συγκεκριμένα άνω φράγματα ή κάτω φράγματα;

4.4 Όρια συναρτήσεων και ακολουθίες.

Έστω ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$. Ας θεωρήσουμε και κάποια ακολουθία (x_n) όλοι οι όροι της οποίας περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και είναι διαφορετικοί από τον ξ και η οποία συγκλίνει στον ξ. Δηλαδή, έστω $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$.

Σχηματίζουμε την ακολουθία $\big(f(x_n)\big)$ και θέλουμε να βρούμε το όριό της, αν υπάρχει. Παρατηρήστε την εξής «αλυσιδωτή διαδικασία». Έστω ότι ο n παίρνει αρκετά μεγάλες τιμές. Τότε ο x_n παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον ξ και $\neq \xi$. Άρα ο $x = x_n$ παίρνει τιμές αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$. Επομένως, ο $y = f(x_n) = f(x)$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον η. Ξεκινώντας, επομένως, από το ότι ο n παίρνει αρκετά μεγάλες τιμές, καταλήγουμε στο ότι ο $f(x_n)$ παίρνει τιμές όσο θέλουμε κοντά στον η. Συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$.

Με παρόμοιο συλλογισμό βγάζουμε ανάλογα συμπεράσματα σε όλες τις περιπτώσεις ορίου και έχουμε το εξής γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.19 *Έστω ότι για κάθε φυσικό n ο x_n περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$, αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και αν είναι $x_n \neq \xi$ για κάθε n, τότε $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to\xi} f(x)$.*

Τα ανάλογα ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το ξ με ένα από τα $\xi\pm$ ή $\pm\infty$. Συνοπτικά:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \begin{cases} \lim_{x\to\xi} f(x), & \text{αν } x_n \to \xi \ (x_n \neq \xi \text{ για κάθε } n) \\ \lim_{x\to\xi+} f(x), & \text{αν } x_n \to \xi \ (x_n > \xi \text{ για κάθε } n) \\ \lim_{x\to\xi-} f(x), & \text{αν } x_n \to \xi \ (x_n < \xi \text{ για κάθε } n) \\ \lim_{x\to+\infty} f(x), & \text{αν } x_n \to +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x), & \text{αν } x_n \to -\infty \end{cases}}$$

Απόδειξη: Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και ακολουθία (x_n) ώστε κάθε x_n να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και να είναι $\neq \xi$ και, επίσης, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$.

Έστω οποιοσδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $|x_n - \xi| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή κάθε x_n είναι $\neq \xi$, συνεπάγεται $0 < |x_n - \xi| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης, επειδή κάθε x_n ανήκει στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$, συνεπάγεται $|f(x_n) - \eta| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα είναι $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \eta$.

Ως επιβεβαίωση έχουμε τα εξής απλοϊκά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) Από το $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ προκύπτει το $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. Για να το αποδείξουμε αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$ η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ και όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = x^2$.

(2) Από το $\lim_{x\to0} \sqrt{x} = 0$ συνεπάγεται το $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Αρκεί να θεωρήσουμε την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{1}{n}$ η οποία συγκλίνει στον 0, όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού $[0,+\infty)$ της $y = \sqrt{x}$ και είναι $\neq 0$.

(3) Για το όριο της ακολουθίας $\big(1 + (1+\frac{1}{n})^{2n} - 3(1+\frac{1}{n})^{3n}\big)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $y = 1 + x^2 - 3x^3$ και την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = e$ και $x_n \neq e$ για κάθε n. Επίσης, είναι $\lim_{x\to e}(1 + x^2 - 3x^3) = 1 + e^2 - 3e^3$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \big(1 + (1+\frac{1}{n})^{2n} - 3(1+\frac{1}{n})^{3n}\big) = \lim_{n\to+\infty}(1 + {x_n}^2 - 3{x_n}^3) = 1 + e^2 - 3e^3$.

Η Πρόταση 4.19 χρησιμοποιείται συνήθως με δυο τρόπους. Είτε, όπως κάναμε στα τρία προηγούμενα παραδείγματα, γνωρίζοντας ήδη κάποια όρια συναρτήσεων, βγάζουμε συμπεράσματα για όρια ακολουθιών. Είτε μπορούμε να κάνουμε το εξής. Έστω ότι δε γνωρίζουμε αν η $y = f(x)$ έχει όριο και ποιο είναι αυτό καθώς ο x τείνει στο όριό του. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε *μία* ακολουθία (x_n) η οποία τείνει στο ίδιο όριο με τον x, όλοι οι όροι της είναι διαφορετικοί από το όριο αυτό και περιέχονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και *η ακολουθία* $(f(x_n))$ *δεν έχει όριο.* Τότε το συμπέρασμα είναι ότι *ούτε και η συνάρτηση έχει όριο* καθώς ο x τείνει στο όριό του. Διότι, αν η συνάρτηση είχε κάποιο όριο, τότε και η $(f(x_n))$ θα είχε το ίδιο όριο.

Παραδείγματα: (1) Η ακολουθία (x_n) με $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ συγκλίνει στον 0, όλοι οι όροι της είναι $\neq 0$ και περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = \frac{1}{x}$. Γνωρίζουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία (y_n) με $y_n = \frac{1}{x_n} = (-1)^{n-1}n$ δεν έχει όριο. Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$.

(2) Για να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ σχεδιάζουμε το γράφημα της $y = (-1)^{[x]}$. Δείτε και την άσκηση 1 στην ενότητα 3.4.

Σε κάθε διάστημα $[n, n+1)$ $(n \in \mathbf{Z})$ η συνάρτηση είναι σταθερή $y = (-1)^{[x]} = (-1)^n$. Καθώς ο x μεγαλώνει απεριόριστα, περνά από κάθε τέτοιο διάστημα στο επόμενό του με αποτέλεσμα η συνάρτηση να παίρνει εναλλάξ τις τιμές $+1$ και -1. Επομένως, οι τιμές τις συνάρτησης δεν πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά κάποιον αριθμό και φαίνεται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$.

Ιδού η μαθηματική αιτιολόγηση. Σχηματίζουμε μια ακολουθία τιμών του x η οποία αποκλίνει στο $+\infty$, επιλέγοντας τις τιμές αυτές μια σε καθένα από τα παραπάνω διαδοχικά διαστήματα: έστω, για παράδειγμα, $x_n = n$ $(n \in \mathbf{N})$. Τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ και, επομένως, το $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{[x_n]} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^{[n]} = \lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ δεν υπάρχει. Άρα ούτε το $\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ υπάρχει.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιώντας κατάλληλες ακολουθίες καθώς και τα σχετικά γραφήματα (δείτε την άσκηση 1 στην ενότητα 3.4), αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια συναρτήσεων.

$$\lim_{x\to 0+}(-1)^{[\frac{1}{x}]}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty}(x-[x]).$$

(Υπόδειξη για το $\lim_{x\to\pm\infty}(x-[x])$: Σχεδιάστε το γράφημα της $y = x - [x]$ και βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $x - [x] = 0$ καθώς και της εξίσωσης $x - [x] = \frac{1}{2}$. Από όλους αυτούς τους αριθμούς δημιουργήστε κατάλληλες ακολουθίες που αποκλίνουν στο $+\infty$ και στο $-\infty$.)

2. Έστω ότι υπάρχει το $\lim f(x)$, ότι η (x_n) τείνει στο όριο του x και ότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και είναι διαφορετικοί από το όριο του x.

(i) Αν άπειροι όροι της $\big(f(x_n)\big)$ είναι $\geq u$, αποδείξτε ότι $\lim f(x) \geq u$.

(ii) Αν άπειροι όροι της $\big(f(x_n)\big)$ είναι $\leq l$, αποδείξτε ότι $\lim f(x) \leq l$.

Έστω ότι η (x_n) τείνει στο όριο του x και ότι όλοι οι όροι της ανήκουν στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και είναι διαφορετικοί από το όριο του x. Αν άπειροι όροι της $\big(f(x_n)\big)$ είναι $\geq u$ και άπειροι όροι της είναι $\leq l$ και αν $l < u$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim f(x)$.

(Υπόδειξη: Συνδυάστε τις Προτάσεις 2.14 και 4.19.)

4.5 Ρητές συναρτήσεις.

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ με $N \geq 1$ και $a_N \neq 0$. Από το $\lim_{x\to\xi} x^k = \xi^k$ και το $\lim_{x\to\xi} a_k = a_k$ παίρνουμε το $\lim_{x\to\xi}(a_kx^k) = a_k\xi^k$, οπότε $\lim_{x\to\xi} p(x) = \lim_{x\to\xi}(a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N) = a_0 + a_1\xi + \cdots + a_N\xi^N = p(\xi)$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} p(x) = p(\xi).}$$

Για να υπολογίσουμε τα όρια καθώς $x \to \pm\infty$ κάνουμε το εξής. Γράφουμε $p(x) = a_Nx^N(\frac{a_0}{a_N}\frac{1}{x^N} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{a_N}\frac{1}{x} + 1)$ οπότε, επειδή το όριο της παρένθεσης καθώς $x \to \pm\infty$ είναι 1, έχουμε ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} p(x) = a_N \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty\,, & \text{αν } a_N > 0, \\ -\infty\,, & \text{αν } a_N < 0 \end{cases}}$$

και

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty\,, & \text{αν } a_N > 0 \text{ και } N \text{ άρτιος ή } a_N < 0 \text{ και } N \text{ περιττός}, \\ -\infty\,, & \text{αν } a_N < 0 \text{ και } N \text{ άρτιος ή } a_N > 0 \text{ και } N \text{ περιττός}. \end{cases}}$$

Παρατηρήστε ότι το $\lim_{x\to\pm\infty} p(x)$ εξαρτάται μόνο από τον μεγιστοβάθμιο όρο του πολυωνύμου, δηλαδή

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_Nx^N\,.}$$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to+\infty}(-5x^3+x^2-4x-12) = \lim_{x\to+\infty}(-5x^3) = -\infty$.

(2) $\lim_{x\to-\infty}(-5x^3 + x^2 - 4x - 12) = \lim_{x\to-\infty}(-5x^3) = +\infty$.

(3) $\lim_{x\to-\infty}(7x^4 + x^3 - x + 5) = \lim_{x\to-\infty} 7x^4 = +\infty$.

Τα όρια ρητών συναρτήσεων *δεν* είναι αρκετά πιο περίπλοκα. Αν $r(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N}{b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M}$ είναι ρητή συνάρτηση με $a_N \neq 0$, $b_M \neq 0$, γράφουμε πάλι $r(x) = \frac{a_N}{b_M}x^{N-M}\frac{\frac{a_0}{a_N}\frac{1}{x^N}+\cdots+\frac{a_{N-1}}{a_N}\frac{1}{x}+1}{\frac{b_0}{b_M}\frac{1}{x^M}+\cdots+\frac{b_{M-1}}{b_M}\frac{1}{x}+1}$, οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} r(x) = \begin{cases} \frac{a_N}{b_M}\cdot(+\infty), & \text{αν } N > M, \\ \frac{a_N}{b_M}\,, & \text{αν } N = M, \\ 0, & \text{αν } N < M \end{cases}$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = \begin{cases} \frac{a_N}{b_M}\cdot(+\infty), & \text{αν } N-M \text{ άρτιος φυσικός,} \\ \frac{a_N}{b_M}\cdot(-\infty), & \text{αν } N-M \text{ περιττός φυσικός,} \\ \frac{a_N}{b_M}\,, & \text{αν } N=M, \\ 0, & \text{αν } N<M. \end{cases}$$

Παρατηρήστε και πάλι ότι το $\lim_{x\to\pm\infty} r(x)$ εξαρτάται μόνο από τους μεγιστοβάθμιους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή, δηλαδή

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} r(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_N x^N}{b_M x^M}\,.}$$

Παραδείγματα: (1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-x^2+2x+4}{2x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}\,.$

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3+x+4}{2x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{2x^2} = (-\frac{1}{2})\cdot(+\infty) = -\infty.$

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+2}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^4} = 0.$

(4) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x+4}{2x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}\,.$

(5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+5x^2-4}{-3x^4+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{-3x^4} = 0.$

(6) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3-x+5}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3}{2x} = (-\frac{1}{2})\cdot(+\infty) = -\infty.$

(7) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4-x^2+4}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4}{2x} = \frac{3}{2}\cdot(-\infty) = -\infty.$

Αν ο x τείνει σε αριθμό, έχουμε τις εξής περιπτώσεις.

Αν $b_0+b_1\xi+\cdots+b_M\xi^M \neq 0$, τότε $\lim_{x\to\xi} r(x) = \frac{a_0+a_1\xi+\cdots+a_N\xi^N}{b_0+b_1\xi+\cdots+b_M\xi^M} = r(\xi)$. Δηλαδή,

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} r(x) = r(\xi).}$$

Παράδειγμα: $\lim_{x\to1} \frac{3x-2}{x^4+2x^3-4} = \frac{3\cdot1-2}{1^4+2\cdot1^3-4} = -1.$

Αν $b_0+b_1\xi+\cdots+b_M\xi^M = 0$, τότε συνεπάγεται ότι το $x-\xi$ διαιρεί το πολυώνυμο $b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M$. Αν $(x-\xi)^m$ (με $m\geq1$) είναι η μέγιστη δύναμη του $x-\xi$ η οποία διαιρεί το $b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M$, τότε μπορούμε να γράψουμε $b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M = (x-\xi)^m q(x)$, όπου $q(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δε διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $q(\xi)\neq0$. Τώρα, είτε το $x-\xi$ διαιρεί το $a_0+a_1\xi+\cdots+a_N\xi^N$ είτε όχι, μπορούμε να γράψουμε $a_0+a_1\xi+\cdots+a_N\xi^N = (x-\xi)^n p(x)$, όπου $n\geq0$ και το $p(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο το οποίο δε διαιρείται από το $x-\xi$ και, επομένως, $p(\xi)\neq0$. Συνολικά, λοιπόν, έχουμε ότι $r(x) = (x-\xi)^{n-m}\frac{p(x)}{q(x)}$ και, επειδή $\lim_{x\to\xi}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\xi)}{q(\xi)} \neq 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to\xi} r(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{αν } n>m, \\ \frac{p(\xi)}{q(\xi)}\,, & \text{αν } n=m, \end{cases}$$

και

$$\lim_{x\to\xi} r(x) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}\cdot(+\infty),$$

αν ο $m-n$ είναι άρτιος φυσικός, ενώ

$$\lim_{x\to\xi-} r(x) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}\cdot(-\infty), \qquad \lim_{x\to\xi+} r(x) = \frac{p(\xi)}{q(\xi)}\cdot(+\infty),$$

αν ο $m-n$ είναι περιττός φυσικός.

Παραδείγματα: (1) Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$ παρατηρούμε κατ΄ αρχάς ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου x^4-2x^2+1 και, επομένως, το πολυώνυμο αυτό διαιρείται από το $x-1$. Παραγοντοποιούμε είτε με τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης είτε, στην περίπτωση αυτή, πιο απλά: $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2=(x-1)^2(x+1)^2$. Κατόπιν βλέπουμε ότι ο 1 είναι ρίζα και του x^3-x^2-x+1 οπότε το $x-1$ διαιρεί και αυτό το πολυώνυμο. Όπως πριν, υπολογίζουμε: $x^3-x^2-x+1=(x-1)x^2-(x-1)=(x-1)(x^2-1)=(x-1)^2(x+1)$. Άρα $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}$ για κάθε $x\neq1,-1$. Επομένως, $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

(2) Για το $\lim_{x\to1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$ βλέπουμε ότι ο 1 είναι ρίζα του x^3-x^2-x+1 και, όπως πριν: $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$. Ο 1 είναι ρίζα και του x^3+4x^2+x-6 και παραγοντοποιούμε το $x-1$ ως εξής: $x^3+4x^2+x-6=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6=(x-1)x^2+(x-1)5x+(x-1)6=(x-1)(x^2+5x+6)$. Το $x-1$ δε διαιρεί το x^2+5x+6 διότι ο 1 δεν είναι ρίζα του. Άρα $\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=\frac{(x-1)(x^2+5x+6)}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{1}{x-1}\frac{x^2+5x+6}{x+1}$. Τώρα: $\lim_{x\to1+}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(+\infty)\cdot\frac{1^2+5\cdot1+6}{1+1}=+\infty$ και $\lim_{x\to1-}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}=(-\infty)\cdot\frac{1^2+5\cdot1+6}{1+1}=-\infty$. Επομένως, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to1}\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3-x^2-x+1}$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x\to\pm\infty$.

$$y=x^4-4x^3\,, \quad y=\frac{x^2+1}{x^3-x^2+1}\,, \quad y=\frac{x^4-x+1}{-3x^4+x^2+1}\,,$$

$$y=\frac{1+x^5-x^8}{1+2x^2}\,, \quad y=\frac{2-2x+x^5}{1-x^2}\,.$$

2. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x\to1\pm$.

$$y=x^2+2x, \quad y=\frac{x^2-2x+1}{x+1}\,, \quad y=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1}\,,$$

$$y=\frac{x^4-x^3-3x^2+5x-2}{x^4+x^3-4x^2+x+1}\,, \quad y=\frac{x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}\,,$$

$$y=\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}\,.$$

3. Βρείτε τα $\lim_{x\to 1\pm} f(x)$ αν

$$f(x)\begin{cases} \leq \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2-x+1}\,, & \text{αν } 0\leq x<1,\\ \geq \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^3-x^2-x+1}\,, & \text{αν } x>1.\end{cases}$$

4. Βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ αν $\frac{x^3+x^2-3x-7}{2x^3+8x^2+x+3} \leq f(x) < \frac{x^5+x^4+7}{2x^5-4x^4-x^3-8x-3}$ για κάθε $x>5$.

5. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια, αποδείξτε ότι είναι

   (i) $\frac{5}{4} < \frac{x^3-1}{x^2-1} < \frac{3}{2}+10^{-4}$ κοντά στον αριθμό 1.

   (ii) $\frac{2x^7-14x^6-x^5+3x^4-7x^2-1}{3x^4+x^2+6} < -10^{13}$ κοντά στο $-\infty$.

   (iii) $\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4-2x^2+1} < -10^9$ κοντά στον 1 από τα αριστερά του.

6. Υπολογίζοντας τα κατάλληλα όρια, βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες ή φραγμένες κοντά στον 0 ή κοντά στον 0 από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του καθώς και κοντά στο $+\infty$ και κοντά στο $-\infty$.

$$y=\frac{x^7+2x^5+5x^2}{-x^6+5x^5+x^4},\quad y=\frac{3x^5+x^4-5x^3+x^2}{8x^7-x^5-x^4+7x^3},\quad y=\frac{x^7+x^5+x^3}{-x^7-4x^5+x^3}.$$

4.6 Δυνάμεις.

Το πεδίο ορισμού της $y=x^a$, όπου a είναι οποιοσδήποτε αριθμός, είναι υπερσύνολο του διαστήματος $(0,+\infty)$. Το πρώτο όριο που θα αποδείξουμε είναι το

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} x^a=\xi^a \quad (\xi>0).}$$

Κατ΄ αρχάς έστω $a>0$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$ και θα βρούμε $\delta>0$ ώστε να είναι $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ για κάθε $x>0$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$.

Για να είναι $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ αρκεί να είναι $\xi^a-\epsilon<x^a<\xi^a+\epsilon$.

Στην περίπτωση $0<\epsilon<\xi^a$, για να είναι $\xi^a-\epsilon<x^a<\xi^a+\epsilon$ αρκεί να είναι $(\xi^a-\epsilon)^{\frac{1}{a}}<x<(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}$. Παρατηρούμε ότι ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $(\xi^a-\epsilon)^{\frac{1}{a}}$ και $(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}$, οπότε, αν επιλέξουμε $\delta=\min\big\{\xi-(\xi^a-\epsilon)^{\frac{1}{a}},(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}-\xi\big\}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$ ισχύει $(\xi^a-\epsilon)^{\frac{1}{a}}<x<(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$.

Στην περίπτωση $\epsilon\geq\xi^a$, για να είναι $\xi^a-\epsilon<x^a<\xi^a+\epsilon$ αρκεί να είναι $0<x^a<\xi^a+\epsilon$ αρκεί να είναι $0<x<(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}$. Επειδή $0<\xi<(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}$, αν επιλέξουμε $\delta=\min\{\xi-0,(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}-\xi\}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$ ισχύει $0<x<(\xi^a+\epsilon)^{\frac{1}{a}}$ και, επομένως, ισχύει $|x^a-\xi^a|<\epsilon$.

Άρα, σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να βρούμε $\delta>0$ ώστε να είναι $|x^a-\xi^a|<\epsilon$ για κάθε $x>0$ που ικανοποιεί την $0<|x-\xi|<\delta$. Άρα αποδείχθηκε ότι $\lim_{x\to\xi} x^a=\xi^a$.

Αν $a < 0$ (οπότε $-a > 0$), γράφουμε $\lim_{x\to\xi} x^a = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{x^{-a}} = \frac{1}{\xi^{-a}} = \xi^a$.

Τέλος, αν $a = 0$, έχουμε απλώς: $\lim_{x\to\xi} x^0 = \lim_{x\to\xi} 1 = 1 = \xi^0$.

Τα όρια

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} x^a = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > 0, \\ 1, & \text{αν } a = 0, \\ +\infty, & \text{αν } a < 0 \end{cases}}$$

καθώς και τα

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} x^a = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } a > 0, \\ 1, & \text{αν } a = 0, \\ 0, & \text{αν } a < 0 \end{cases}}$$

έχουν ήδη αποδειχθεί ως παραδείγματα.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το όριο $\lim_{x\to\xi} x^a$ με $\xi < 0$ καθώς και τα όρια $\lim_{x\to-\infty} x^a$ και $\lim_{x\to 0-} x^a$, θα πρέπει το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ να περιέχει και το διάστημα $(-\infty, 0)$, δηλαδή ο a να είναι ρητός με ανάγωγη μορφή $a = \frac{m}{n}$ στην οποία ο n είναι *περιττός* φυσικός. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση γράφεται $y = x^a = (\sqrt[n]{x})^m$ και είναι φανερό ότι είναι αρκετό να μελετήσουμε τα διάφορα όρια στην ειδική περίπτωση της $y = \sqrt[n]{x}$ με *περιττό* φυσικό n.

Το πρώτο όριο είναι το

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\xi} \quad (n \text{ περιττός φυσικός}).}$$

Αυτό είναι ειδική περίπτωση (με $a = \frac{1}{n}$) του $\lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a$, αλλά χωρίς τον περιορισμό $\xi > 0$. Η απόδειξη είναι παρόμοια (και πιο απλή). Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να είναι $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{\xi}| < \epsilon$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Για να είναι $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{\xi}| < \epsilon$ αρκεί να είναι $\sqrt[n]{\xi} - \epsilon < \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{\xi} + \epsilon$ αρκεί να είναι $(\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n < x < (\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n$. Ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $(\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n$ και $(\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n$, οπότε, αν πάρουμε $\delta = \min\{\xi - (\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n, (\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n - \xi\}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $(\sqrt[n]{\xi} - \epsilon)^n < x < (\sqrt[n]{\xi} + \epsilon)^n$ και, επομένως, ισχύει $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{\xi}| < \epsilon$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $\lim_{x\to\xi} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\xi}$.

Το δεύτερο από τα δυο όρια

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \quad (n \text{ περιττός φυσικός})}$$

είναι ειδική περίπτωση (με $a = \frac{1}{n} > 0$) του $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$. Το πρώτο όριο αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο (με τους M και N). Εδώ θα το αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το δεύτερο όριο και την απλή αλλαγή μεταβλητής $y = -x$ ως εξής: $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{-y} = \lim_{y\to+\infty}(-\sqrt[n]{y}) = -\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y} = -(+\infty) = -\infty$.

Τέλος, απλώς καταγράφουμε και τα όρια

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\xi} \quad (\xi > 0 \text{ και } n \text{ άρτιος φυσικός})}$$

και

$$\boxed{\lim_{x\to 0+} \sqrt[n]{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \quad (n \text{ άρτιος φυσικός}).}$$

Τα όρια αυτά είναι ειδικές περιπτώσεις (με $a = \frac{1}{n} > 0$) των αντίστοιχων ορίων της $y = x^a$.

Παραδείγματα: (1) Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = x + 1$, βρίσκουμε $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = \lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty$.

(2) Θα αποδείξουμε το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$.

Από το αποτέλεσμα του (1), φαίνεται ότι το όριο που θέλουμε να αποδείξουμε εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $(+\infty) - (+\infty)$. Γι αυτό χρησιμοποιούμε τη γνωστή ισότητα $a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$ για να γράψουμε $\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, οπότε, χρησιμοποιώντας και το όριο του (1), υπολογίζουμε $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{(+\infty)+(+\infty)} = 0$.

(3) $\lim_{x\to 3} \sqrt[5]{\frac{x+1}{x^2+1}} = \lim_{y\to\frac{2}{5}} \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{\frac{2}{5}}$.

(4) $\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{(x^2 - 2x + 1)(x^3 + x)} = \lim_{y\to 0+} \sqrt[4]{y} = 0$.

(5) $\lim_{x\to 4-} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-4}} = \lim_{y\to-\infty} \sqrt[3]{y} = -\infty$.

(6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}}{x+\frac{1}{x}-\sqrt{x+\frac{1}{x}}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}}{y-\sqrt{y}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^3+t^2}{t^6-t^3} = 0$.

Ασκήσεις.

1. Έχουν νόημα τα παρακάτω όρια;

$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{6}{4}}, \quad \lim_{x\to-1} x^{-\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to 0-} x^{-\frac{1}{2}}, \quad \lim_{x\to 0-} x^{3+\sqrt{3}}.$$

2. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x \to +\infty$.

$$y = \frac{x^{\frac{7}{8}} - 3x^{-2} + 2x^{\frac{6}{5}} - 4}{x^{\frac{6}{5}} - 2x^{\frac{9}{8}} + 2}, \quad y = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{6}{5}} + 1}{x + 4x^{\frac{4}{3}} + 2}, \quad y = \frac{x^{\frac{7}{4}} - x^{\frac{1}{3}}}{x^2 + 3x^{\frac{15}{8}}}.$$

3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to 3} \left(x^{\frac{1}{3}} - 5x^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \lim_{x\to 1} x^{\sqrt{2}}, \quad \lim_{x\to-1} \left(2x^{\frac{4}{3}} + x^{-\frac{1}{5}}\right).$$

4. Βρείτε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x \to 0\pm$ και $x \to -\infty$.

$$y = x^{\frac{1}{3}}, \quad y = x^{-\frac{1}{3}}, \quad y = x^{\frac{2}{3}}, \quad y = x^{-\frac{2}{3}}, \quad y = 2x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}.$$

5. Έστω $a \neq 0$. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{1}{x^a-1}\,, \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x^a-1)^2}\,, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^{3a}-1}{x^a-1}\,.$$

(Υπόδειξη: Για το πρώτο πρέπει να διακρίνετε περιπτώσεις: $a < 0$ και $a > 0$.)

6. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων καθώς $x \to +\infty$.

$$y = \sqrt{x^2+1} - x, \quad y = \sqrt{x}\big(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\big), \quad y = x\big(\sqrt{x^2+1} - x\big),$$

$$y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\,, \quad y = \sqrt[3]{x^2}\big(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}\big),$$

$$y = \sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\,, \quad y = \sqrt{x^3}\big(\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + \sqrt{x-1}\big).$$

7. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής.

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^2+1}\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{3x^2-7x+1}{x^2+1}}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\,, \quad \lim_{x\to 0\pm} \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\,, \quad \lim_{x\to 1\pm} \Big(1-\frac{1}{x-1}\Big)^{\frac{2}{3}}\,,$$

$$\lim_{x\to 1+} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 3\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 7\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} + 3}\,, \quad \lim_{x\to 1\pm} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 3\sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} + 1}{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 7\sqrt[7]{\frac{x+1}{x-1}} + 3}\,.$$

8. Έστω αριθμοί a, b, c με $a > 0$. Βρείτε αριθμούς A, B συναρτήσει των a, b, c ώστε να ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} \big(\sqrt{ax^2+bx+c} - Ax - B\big) = 0.$$

Αποδείξτε ότι με τις τιμές των A, B που βρήκατε ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{ax^2+bx+c} - Ax - B\big) = \frac{4ac-b^2}{8a\sqrt{a}}\,.$$

9. Έστω ακολουθία (x_n) και $a > 0$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.19, αποδείξτε ότι

(i) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και $x_n > 0$ για κάθε n, τότε $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^a = +\infty$.

(ii) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n, τότε $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^a = 0$.

Τι γίνεται αν $a < 0$;

Υπολογίστε τα παρακάτω όρια ακολουθιών.

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{n^3+n+1}{2n^2-1}\Big)^{\sqrt{2}}\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[4]{\frac{n^5+n^3+1}{2n^6+n^2+1}}\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{2^n}{4^n+1}\Big)^{\frac{3}{4}}\,.$$

10. Έστω ακολουθία (x_n) και *περιττός* φυσικός k. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.19, αποδείξτε ότι

    (i) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{x_n} = +\infty$.

    (ii) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[k]{x_n} = -\infty$.

    Ποιο από τα (i), (ii) ισχύει και στην περίπτωση που ο k είναι *άρτιος* φυσικός;

    Υπολογίστε τα παρακάτω όρια ακολουθιών.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[5]{\frac{n^3+n+1}{2n^2-1}}\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[5]{\frac{2^n-4^n}{2^n+3^n+1}}\,.$$

4.7 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση.

Θα μελετήσουμε τώρα τα όρια της εκθετικής συνάρτησης $y = a^x$, όπου $a > 0$. Το πεδίο ορισμού της $y = a^x$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Κατ' αρχάς ισχύει το:

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi\,.}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να είναι $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$.

Για να είναι $|a^x - a^\xi| < \epsilon$ αρκεί να είναι $a^\xi - \epsilon < a^x < a^\xi + \epsilon$.

Αν $0 < \epsilon < a^\xi$, τότε η τελευταία ανισότητα ισχύει αρκεί να είναι $\log_a(a^\xi - \epsilon) < x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$. Επειδή ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $\log_a(a^\xi - \epsilon)$ και $\log_a(a^\xi + \epsilon)$, αν επιλέξουμε $\delta = \min\left\{\xi - \log_a(a^\xi - \epsilon), \log_a(a^\xi + \epsilon) - \xi\right\}$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $\log_a(a^\xi - \epsilon) < x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$ και, επομένως, ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$.

Αν $\epsilon \geq a^\xi$, τότε η $a^\xi - \epsilon < a^x < a^\xi + \epsilon$ ισχύει αρκεί (επειδή $0 < a^x$) να είναι $a^x < a^\xi + \epsilon$ αρκεί να είναι $x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$. Επειδή $\xi < \log_a(a^\xi + \epsilon)$, αν επιλέξουμε $\delta = \log_a(a^\xi + \epsilon) - \xi$, τότε για κάθε x που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$ ισχύει $x < \log_a(a^\xi + \epsilon)$ και, επομένως, ισχύει $|a^x - a^\xi| < \epsilon$.

Άρα $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

Αν $0 < a < 1$ (οπότε $\frac{1}{a} > 1$), τότε $\lim_{x\to\xi} a^x = \lim_{x\to\xi} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^\xi} = a^\xi$.

Τέλος, αν $a = 1$, έχουμε $\lim_{x\to\xi} 1^x = \lim_{x\to\xi} 1 = 1 = 1^\xi$.

Το επόμενο όριο είναι το

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty\,, & \text{αν } a > 1,\\ 1\,, & \text{αν } a = 1,\\ 0\,, & \text{αν } 0 < a < 1.\end{cases}}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να είναι $a^x > M$ για κάθε $x > N$. Για να είναι $a^x > M$ αρκεί να είναι $x > \log_a M$. Αν επιλέξουμε $N = \log_a M > 0$, αν $M > 1$, και $N = 1 > 0$, αν $0 < M \leq 1$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > \log_a M$ και, επομένως, ισχύει $a^x > M$. Άρα είναι $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$ (οπότε $\frac{1}{a} > 1$), τότε $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\frac{1}{a})^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Τέλος, αν $a = 1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} 1^x = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$.

Τέλος:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0\,, & \text{αν } a > 1, \\ 1\,, & \text{αν } a = 1, \\ +\infty\,, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}}$$

Τα όρια αυτά μπορούν να αποδειχθούν βάσει των ορισμών, όπως και τα αμέσως προηγούμενα όρια. Προτιμάμε, όμως, να τα αποδείξουμε χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα όρια και την αλλαγή μεταβλητής $y = -x$. Για παράδειγμα, αν $a > 1$, τότε $\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{a^y} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Η απόδειξη είναι το ίδιο απλή αν $a = 1$ ή $0 < a < 1$.

Για τα όρια της λογαριθμικής συνάρτησης έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα.

Θεωρούμε για οποιονδήποτε $a > 0, a \neq 1$ την $y = \log_a x$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$. Το πρώτο όριο είναι το:

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi \quad (\xi > 0).}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε να είναι $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = \log_a x$ (δηλαδή για κάθε $x > 0$) που ικανοποιεί την $0 < |x-\xi| < \delta$. Για να είναι $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$ αρκεί να είναι $\log_a \xi - \epsilon < \log_a x < \log_a \xi + \epsilon$ αρκεί να είναι $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^{\epsilon}$. Ο ξ βρίσκεται ανάμεσα στους $\xi a^{-\epsilon}$ και ξa^{ϵ}, οπότε αν επιλέξουμε $\delta = \min\{\xi - \xi a^{-\epsilon}, \xi a^{\epsilon} - \xi\}$, τότε για κάθε $x > 0$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $\xi a^{-\epsilon} < x < \xi a^{\epsilon}$ και, επομένως, ισχύει $|\log_a x - \log_a \xi| < \epsilon$. Άρα είναι $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Αν $0 < a < 1$, τότε είναι $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \lim_{x\to\xi}(-\log_{\frac{1}{a}} x) = -\log_{\frac{1}{a}} \xi = \log_a \xi$ διότι $\frac{1}{a} > 1$.

Για το όριο καθώς $x \to +\infty$ ισχύει:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty\,, & \text{αν } a > 1, \\ -\infty\,, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}}$$

Έστω $a > 1$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $M > 0$ και θα βρούμε $N > 0$ ώστε να είναι $\log_a x > M$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = \log_a x$ (δηλαδή για κάθε $x > 0$) που ικανοποιεί την $x > N$. Για να είναι $\log_a x > M$ αρκεί να είναι $x > a^M$, οπότε, αν επιλέξουμε $N = a^M > 0$, τότε για κάθε $x > N$ ισχύει $x > a^M$ και, επομένως, ισχύει $\log_a x > M$. Άρα είναι $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$.

Αν $0 < a < 1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \lim_{x\to+\infty}(-\log_{\frac{1}{a}} x) = -(+\infty) = -\infty$.

Τέλος:

$$\boxed{\lim_{x\to0+} \log_a x = \begin{cases} -\infty\,, & \text{αν } a > 1, \\ +\infty\,, & \text{αν } 0 < a < 1. \end{cases}}$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε τα αμέσως προηγούμενα όρια και την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$. Αν $a > 1$, γράφουμε $\lim_{x\to 0+} \log_a x = \lim_{y\to +\infty} \log_a \frac{1}{y} = \lim_{y\to+\infty}(-\log_a y) = -\lim_{y\to+\infty} \log_a y = -(+\infty) = -\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια αν $0 < a < 1$.

Αξίζει να γράψουμε ξεχωριστά τα όρια αυτής της ενότητας στην περίπτωση $a = e$, δηλαδή για τη συνήθη εκθετική και τη συνήθη λογαριθμική συνάρτηση:

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} e^x = e^\xi\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty}$$

και

$$\boxed{\lim_{x\to\xi} \log x = \log\xi \quad (\xi > 0), \qquad \lim_{x\to 0+} \log x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty.}$$

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων όταν $x \to \pm\infty$.

$$y = e^x - e^{2x} + 2, \quad y = \frac{1}{e^x - 1}\,, \quad y = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{2e^{2x} - e^x + 2}\,.$$

2. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to 0+$.

$$y = (\log x)^2 - \log x, \quad y = \frac{1}{\log x}\,, \quad y = \frac{1 + 2(\log x)^2}{2 + \log x + (\log x)^3}\,.$$

3. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to 0\pm} \frac{1}{e^x - 1}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{(e^x - 1)^2}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}\,,$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(2x)}{\log(3x)}\,, \qquad \lim_{x\to 1\pm} \frac{1}{\log x}\,, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{(\log x)^2}\,.$$

4. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής.

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x}}\,, \quad \lim_{x\to 0\pm} e^{1-\frac{1}{x}}\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + e^{\frac{x}{2}} + 1}{2e^x - e^{\frac{x}{3}} + 2}\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \log(x+1), \quad \lim_{x\to\pm\infty} \log(x^2 - x + 1), \quad \lim_{x\to 1} \log(x^3 + 1),$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\log|x|)^7 - (\log|x|)^4 + 1}{(\log|x|)^5 + (\log|x|)^2 + 1}\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \log\frac{e^x}{e^{\frac{x}{2}} + 1}\,.$$

5. Θεωρήστε τις υπερβολικές συναρτήσεις

$$y = \cosh x, \quad y = \sinh x, \quad y = \tanh x, \quad y = \coth x$$

και υπολογίστε τα όριά τους σε κάθε περίπτωση: $\lim_{x\to\xi}$, $\lim_{x\to\pm\infty}$. Προσέξτε ειδικά το όριο $\lim_{x\to 0\pm} \coth x$.

6. Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις φραγμένες ή άνω φραγμένες ή κάτω φραγμένες κοντά στον 0 ή κοντά στον 0 από τα αριστερά του ή από τα δεξιά του ή κοντά στο $+\infty$ ή κοντά στο $-\infty$;

$$y = e^x, \quad y = e^{-|x|}, \quad y = \frac{1}{e^x - 1}, \quad y = \frac{1}{(e^x - 1)^2},$$

$$y = \log|x|, \quad y = \frac{1}{\log|x|}, \quad y = \frac{1}{\log|1 + x|}.$$

7. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) και $a > 1$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.19, αποδείξτε ότι

   (i) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = +\infty$.

   (ii) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$, τότε $\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = 0$.

   Υπολογίστε τα παρακάτω όρια ακολουθιών.

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n, \ \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n^3+3n-1}{n^2+1}}, \ \lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}}, \ \lim_{n\to+\infty} 2^{2^n}, \ \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{1-\sqrt{n}-n}{1+\sqrt{n}}}.$$

8. Έστω οποιαδήποτε ακολουθία (x_n) και $a > 1$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.19, αποδείξτε ότι

   (i) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ και $x_n > 0$ για κάθε n, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log_a x_n = +\infty$.

   (ii) αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $x_n > 0$ για κάθε n, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log_a x_n = -\infty$.

   Υπολογίστε τα παρακάτω όρια ακολουθιών.

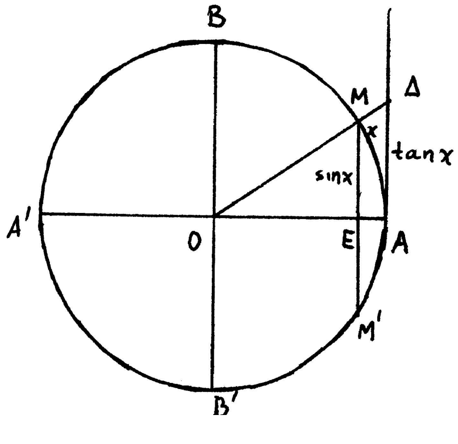
$$\lim_{n\to+\infty} \log \frac{n+1}{2n^2 - 1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \log \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 + 1}, \quad \lim_{n\to+\infty} \log \frac{e^{2n} + 1}{e^n + 1},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \log(3^n - 2^n + 1), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log \frac{n}{n^2+1})^2 - \log \frac{n}{n^2+1} + 2}{-(\log \frac{n}{n^2+1})^2 + 4\log \frac{n}{n^2+1} - 8}.$$

4.8 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ιδού μια πολύ χρήσιμη ανισότητα για τη συνάρτηση $y = \sin x$.

$$\boxed{|\sin x| \leq |x|.}$$



Σχήμα 4.10: μήκος του ΜΕ $<$ μήκος τόξου ΜΑ $<$ μήκος του ΔΑ.

Απόδειξη: Έστω $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και Μ το σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου που αντιστοιχεί στον x. Φέρνουμε την κάθετη ΜΕ στην οριζόντια διάμετρο Α′ΟΑ, οπότε το τόξο ΑΜ έχει μήκος x και το ευθύγραμμο τμήμα ΜΕ έχει μήκος $\sin x$. Θεωρούμε και το συμμετρικό Μ′ του Μ ως προς την οριζόντια διάμετρο, οπότε το μήκος του ευθ. τμήματος ΜΜ′ είναι $2\sin x$ και το τόξο ΜΜ′ έχει μήκος $2x$. Άρα $0 < 2\sin x < 2x$, οπότε $0 < \sin x < x$ και, επομένως, $|\sin x| \le |x|$.

Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε είναι $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, οπότε $0 < \sin(-x) < -x$, οπότε $x < \sin x < 0$ και, επομένως, $|\sin x| \le |x|$. Αν $x = 0$, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

Τέλος, αν $|x| \ge \frac{\pi}{2}$, τότε είναι $|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|$.

Τώρα, από τη γνωστή ισότητα $\cos x - \cos\xi = -2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}$ συνεπάγεται $|\cos x - \cos\xi| = 2\big|\sin\frac{x-\xi}{2}\big|\big|\sin\frac{x+\xi}{2}\big| \le 2\big|\sin\frac{x-\xi}{2}\big| \le 2\big|\frac{x-\xi}{2}\big| = |x-\xi|$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και επιλέγουμε $\delta = \epsilon$. Είναι προφανές ότι για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = \cos x$ (δηλαδή για κάθε x) που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται $|\cos x - \cos\xi| \le |x - \xi| < \delta = \epsilon$, δηλαδή $|\cos x - \cos\xi| < \epsilon$. Άρα

$$\boxed{\lim_{x\to\xi}\cos x = \cos\xi.}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο από την $\sin x - \sin\xi = 2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2}$ αποδεικνύουμε ότι $|\sin x - \sin\xi| \le |x - \xi|$ και, επομένως,

$$\boxed{\lim_{x\to\xi}\sin x = \sin\xi.}$$

Από τα δυο αυτά όρια και από τον κανόνα του λόγου ορίων βλέπουμε ότι, αν $\cos\xi \ne 0$, δηλαδή αν $\xi \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), τότε

$$\boxed{\lim_{x\to\xi}\tan x = \tan\xi \quad \Big(\xi \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\Big).}$$

Επίσης, αν $\sin\xi \ne 0$, δηλαδή αν $\xi \ne k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), τότε

$$\boxed{\lim_{x\to\xi}\cot x=\cot\xi \quad \big(\xi\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\big).}$$

Ας δούμε τι ισχύει για τους ξ που εξαιρέθηκαν.

Αν $\xi=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), τότε είναι $\lim_{x\to\xi}\sin x=\sin\xi=1$. Επίσης, είναι $\lim_{x\to\xi}\cos x=\cos\xi=0$ και, συγχρόνως, είναι $\cos x>0$ κοντά στον ξ από τα αριστερά του και $\cos x<0$ κοντά στον ξ από τα δεξιά του. Συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi-}\frac{1}{\cos x}=+\infty$ και $\lim_{x\to\xi+}\frac{1}{\cos x}=-\infty$. Και τα τρία όρια που υπολογίσαμε αλλάζουν πρόσημο αν $\xi=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$), οπότε από τον κανόνα γινομένου:

$$\boxed{\lim_{x\to\xi-}\tan x=+\infty,\quad \lim_{x\to\xi+}\tan x=-\infty \quad \Big(\xi=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\Big).}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{\lim_{x\to\xi-}\cot x=-\infty,\qquad \lim_{x\to\xi+}\cot x=+\infty \quad \big(\xi=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\big).}$$

Αυτά τα τελευταία όρια συμφωνούν με την περιγραφή των γραφημάτων των $y=\tan x$ και $y=\cot x$ που έχουμε κάνει και, ειδικώτερα, με το ότι οι ευθείες $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της $y=\tan x$ και οι ευθείες $x=k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$) είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της $y=\cot x$.

Παράδειγμα: Είναι απλό να δει κανείς ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty}\cos x$ και $\lim_{x\to\pm\infty}\sin x$ δεν υπάρχουν.

Αν εμπιστευτούμε τα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών όπως τα έχουμε σχεδιάσει, παρατηρούμε ότι καθώς $x\to\pm\infty$ οι αντίστοιχοι $y=\cos x$ και $y=\sin x$ «ταλαντώνονται» περιοδικά, καλύπτοντας όλο το εύρος τιμών ανάμεσα στις τιμές -1 και 1 χωρίς, επομένως, να πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά κάποιον συγκεκριμένο αριθμό.

Ένας αυστηρότερος τρόπος να αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα είναι να πάρουμε την ακολουθία (πn) η οποία αποκλίνει στο $+\infty$ και όλοι οι όροι της περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y=\cos x$ και να παρατηρήσουμε ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\big(\cos(\pi n)\big)=\big((-1)^n\big)$ δεν έχει όριο. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.19, αυτό αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\cos x$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο με την ακολουθία $\big(\frac{\pi}{2}+\pi n\big)$, αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ και με τις αντίθετες ακολουθίες αποδεικνύουμε ότι δεν υπάρχουν τα όρια καθώς $x\to-\infty$.

Αξίζει να αποδείξουμε ακόμα δυο πολύ χρήσιμα όρια:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\,.}$$

Παρατηρήστε ότι και τα δύο αυτά όρια εντάσσονται στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$.

Κατ' αρχάς αποδεικνύουμε την ανισότητα

$$\boxed{|x|\leq|\tan x| \quad \Big(|x|<\frac{\pi}{2}\Big).}$$

Απόδειξη: Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, παίρνουμε στον τριγωνομετρικό κύκλο το σημείο M που αντιστοιχεί στον x και προεκτείνουμε την OM μέχρι να συναντήσει στο σημείο Δ την ευθεία που είναι κάθετη στην οριζόντια διάμετρο Α΄ΟΑ στο σημείο Α. Τότε το μήκος του τόξου AM είναι x και το μήκος του ευθ. τμήματος ΑΔ είναι $\tan x$. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΔ είναι ίσο με $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$ και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΜ είναι ίσο με $\frac{x}{2}$ (διότι το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με π ενώ το εμβαδόν του τομέα είναι αναλογικά ίσο με $\frac{x}{2\pi}\cdot\pi$.) Συγκρίνοντας τα εμβαδά, βλέπουμε ότι $0 < x < \tan x$ οπότε $|x| < |\tan x|$.

Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, τότε είναι $0 < -x < \frac{\pi}{2}$, οπότε $0 < -x < \tan(-x)$, οπότε $|x| < |\tan x|$.

Τέλος, αν $x = 0$, η ανισότητα ισχύει ως ισότητα $0 = 0$.

Συνδυάζοντας τις ανισότητες $|\sin x| \le |x|$ και $|x| \le |\tan x|$, βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$ για κάθε x στην ένωση $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$, από την ιδιότητα παρεμβολής συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Για το δεύτερο όριο γράφουμε $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1-(\cos x)^2}{x^2(1+\cos x)} = \big(\frac{\sin x}{x}\big)^2\frac{1}{1+\cos x}$, οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Ένας δεύτερος τρόπος να αποδείξουμε το δεύτερο όριο είναι ο εξής. Γράφουμε $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2(\sin\frac{x}{2})^2}{x^2} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\bigg)^2$. Τώρα, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x}{2}$, οπότε $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$. Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{1}{2}$.

Παραδείγματα: (1) Για το $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ γράφουμε $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}$ και, επομένως, $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$.

(2) Για να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$ παρατηρούμε ότι $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{\sin(3x)}{3x}}{\frac{\sin(2x)}{2x}}$. Θα υπολογίσουμε τα δυο όρια $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}$ και $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}$ ξεχωριστά.

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = 3x$, είναι $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$. Ομοίως: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$. Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1} = \frac{3}{2}$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to 0} x\cot x, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(\sin x)^2}.$$

2. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(13x)}{(\sin(7x))^2}, \quad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(3x)}{\sin x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(8x)-\cos(15x)}{x^2}, \quad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^2\Big(1-\cos\frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to 0}\frac{3\sin(7x)-7\sin(3x)}{x^3},.$$

3. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^a \sin x = \begin{cases} 0, & \text{αν } a > -1, \\ 1, & \text{αν } a = -1, \\ +\infty, & \text{αν } a < -1. \end{cases}$

4. Αν $a > 0$, αποδείξτε με παρεμβολή ότι $\lim_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x} = 0$.

5. Γνωρίζοντας ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \sin x$, αποδείξτε με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}$.

6. Έστω ακολουθία (x_n). Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε n, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ και $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos x_n}{{x_n}^2} = \frac{1}{2}$.

   Υπολογίστε τα παρακάτω όρια ακολουθιών.

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\frac{\pi}{n}\,, \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sin\frac{\pi}{n}\,, \quad \lim_{n\to+\infty} n^2\sin\frac{\pi}{n}\,,$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\Big(1-\cos\frac{\pi}{n}\Big), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\cot\frac{\pi}{2n}}{n}\,.$$

7. Σχεδιάστε τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = \frac{1}{x}\sin x, \quad y = \frac{1}{x^2}\sin x, \quad y = x\sin\frac{1}{x}, \quad y = x^2\sin\frac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}.$$

   (Υπόδειξη: Ξαναδείτε τις ασκήσεις 6, 7 και 8 της ενότητας 3.10. Τώρα θα χρησιμοποιήσετε κάποια όρια που δεν ήταν γνωστά στο Κεφάλαιο 3.)

8. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.19, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα από τα παρακάτω όρια· για καθένα από αυτά επινοήστε κατάλληλη ακολουθία (x_n). Θα σας βοηθήσουν τα γραφήματα που μελετώνται στις ασκήσεις 6, 7 και 8 της ενότητας 3.10 ή – αν δε θέλετε να αναφερθείτε στα γραφήματα – το να βρείτε τις λύσεις των εξισώσεων $\sin x = \pm 1$ και $\sin\frac{1}{x} = \pm 1$ στο $(0,+\infty)$.

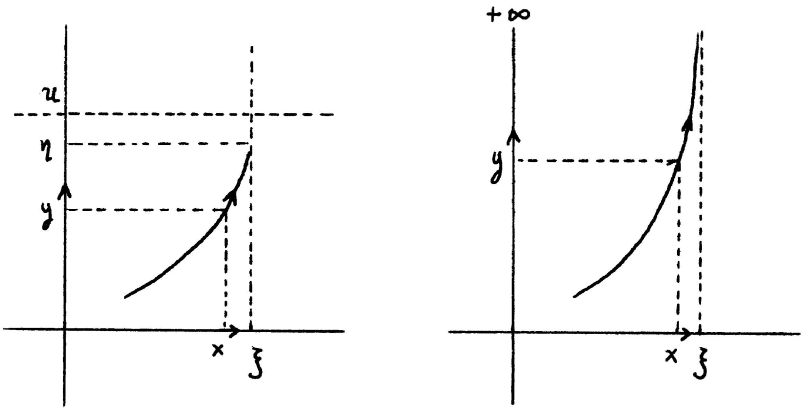
$$\lim_{x\to+\infty} x\sin x, \quad \lim_{x\to+\infty} x^2\sin x, \quad \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x}\,, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,.$$

   Τα δυο τελευταία γενικεύονται: αν $a \leq 0$, αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} x^a \sin\frac{1}{x}$. Να αντιπαραβάλετε το αποτέλεσμα αυτό με το αποτέλεσμα της άσκησης 4.

4.9 Όρια μονότονων συναρτήσεων.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι *αύξουσα* σε κάποιο ανοικτό διάστημα (a,ξ). Είναι σαφές – ειδικά αν σχεδιάσουμε πρόχειρα το γράφημα μιας τέτοιας συνάρτησης – ότι, αν ο x αυξάνεται στο διάστημα (a,ξ) και έρχεται αρκετά κοντά στον ξ, τότε υπάρχουν δυο ενδεχόμενα. Το πρώτο ενδεχόμενο είναι να γίνεται όσο θέλουμε μεγάλος θετικός ο αντίστοιχος $f(x)$, δηλαδή να ισχύει $\lim_{x\to\xi-} f(x) = +\infty$. Το δεύτερο ενδεχόμενο είναι να υπάρχει κάποιο άνω φράγμα για τον αντίστοιχο $f(x)$, δηλαδή κάποιος αριθμός u ώστε να ισχύει $f(x) \leq u$ για κάθε x στο (a, ξ). Σ' αυτήν την περίπτωση είναι φανερό ότι υπάρχει κάποιος αριθμός η προς τον οποίο ο $f(x)$ έρχεται όσο θέλουμε κοντά, δηλαδή ότι $\lim_{x \to \xi-} f(x) = \eta$, και μάλιστα ότι ο αριθμός η πρέπει να είναι $\leq u$. Σε κάθε περίπτωση συμπεραίνουμε ότι υπάρχει το αριστερό πλευρικό όριο και είναι είτε $\lim_{x \to \xi-} f(x) = \eta$ είτε $\lim_{x \to \xi-} f(x) = +\infty$.

Με τη βοήθεια πρόχειρων γραφημάτων μπορούμε εύκολα να σκεφτούμε ανάλογα συμπεράσματα για κάθε περίπτωση: (i) διάστημα (a, ξ) ή $(a, +\infty)$, συνάρτηση $y = f(x)$ αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα αυτό και αριστερό πλευρικό όριο στο ξ ή όριο στο $+\infty$ και (ii) διάστημα (ξ, b) ή $(-\infty, b)$, συνάρτηση $y = f(x)$ αύξουσα ή φθίνουσα στο διάστημα αυτό και δεξιό πλευρικό όριο στο ξ ή όριο στο $-\infty$.



Σχήμα 4.11: Αύξουσες συναρτήσεις με άνω φράγμα και χωρίς άνω φράγμα.

Το Θεώρημα 4.1 περιέχει όλα τα συμπεράσματα.

Θεώρημα 4.1 (1) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι αύξουσα σε κάποιο ανοικτό διάστημα. Τότε το αριστερό πλευρικό της όριο στο δεξιό άκρο του διαστήματος υπάρχει και είναι (i) αριθμός, αν η $y = f(x)$ είναι άνω φραγμένη στο διάστημα, και (ii) $+\infty$, αν η $y = f(x)$ δεν είναι άνω φραγμένη στο διάστημα. Επίσης, το δεξιό πλευρικό της όριο στο αριστερό άκρο του διαστήματος υπάρχει και είναι (i) αριθμός, αν η $y = f(x)$ είναι κάτω φραγμένη στο διάστημα, και (ii) $-\infty$, αν η $y = f(x)$ δεν είναι κάτω φραγμένη στο διάστημα.*
(2) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα σε κάποιο ανοικτό διάστημα. Τότε το αριστερό πλευρικό της όριο στο δεξιό άκρο του διαστήματος υπάρχει και είναι (i) αριθμός, αν η $y = f(x)$ είναι κάτω φραγμένη στο διάστημα, και (ii) $-\infty$, αν η $y = f(x)$ δεν είναι κάτω φραγμένη στο διάστημα. Επίσης, το δεξιό πλευρικό της όριο στο αριστερό άκρο του διαστήματος υπάρχει και είναι (i) αριθμός, αν η $y = f(x)$ είναι άνω φραγμένη στο διάστημα, και (ii) $+\infty$, αν η $y = f(x)$ δεν είναι άνω φραγμένη στο διάστημα.*

Το Θεώρημα 4.1 είναι ιδιαίτερα σημαντικό· τόσο όσο και το αντίστοιχο Θεώρημα 2.1 για μονότονες ακολουθίες. Μας επιτρέπει να συμπεράνουμε την ύπαρξη πλευρικού ορίου συνάρτησης με μοναδικό δεδομένο τη μονοτονία της. Δυστυχώς, το Θεώρημα 4.1 – όπως τόσα άλλα – δε θα αποδειχθεί στις σημειώσεις αυτές.

Παραδείγματα: (1) Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.1 μπορούμε να μελετήσουμε με διαφορετικό τρόπο κάποια ήδη γνωστά όρια.

Για παράδειγμα, αν $a > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε τα $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ και $\lim_{x\to 0+} x^a = 0$ με δεδομένο ότι η $y = x^a$ είναι αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Η μονοτονία εξασφαλίζει την ύπαρξη των δυο ορίων καθώς και ότι το πρώτο όριο είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$ και ότι το δεύτερο όριο είναι είτε αριθμός είτε $-\infty$.

Έστω – για να καταλήξουμε σε άτοπο – ότι το πρώτο όριο είναι αριθμός η, δηλαδή ότι $\lim_{x\to+\infty} x^a = \eta$. Με μια απλή αλλαγή μεταβλητής υπολογίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{y\to+\infty} y^a = \eta$. Άρα $\eta = \lim_{x\to+\infty}(2x)^a = \lim_{x\to+\infty} 2^a x^a = 2^a \lim_{x\to+\infty} x^a = 2^a\eta$ και, επομένως, $\eta = 2^a\eta$. Συνεπάγεται $\eta = 0$ αλλά αυτό είναι αδύνατο διότι για κάθε $x \geq 1$ ισχύει $x^a \geq 1^a = 1$ και, επομένως, $\eta = \lim_{x\to+\infty} x^a \geq \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$. Άρα το πρώτο όριο είναι $+\infty$.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το δεύτερο όριο είναι 0. Πράγματι, επειδή είναι $x^a > 0$ για κάθε $x > 0$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to 0+} x^a \geq \lim_{x\to 0+} 0 = 0$ και, επομένως, το δεύτερο όριο είναι αριθμός μη αρνητικός: $\lim_{x\to 0+} x^a = \eta \geq 0$. Με την ίδια αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{y\to 0+} y^a = \eta$. Άρα $\eta = \lim_{x\to 0+}(2x)^a = \lim_{x\to 0+} 2^a x^a = 2^a\eta$ και, επομένως, $\eta = 2^a\eta$. Άρα $\eta = 0$.

(2) Θεωρούμε την $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα αλλά είναι αρκετά περίπλοκο να το αποδείξουμε με τις μέχρι τώρα γνώσεις μας. Θα το αποδείξουμε αργότερα με τη βοήθεια των παραγώγων (άσκηση Α2 της ενότητας 6.9). Αν, όμως, *υποθέσουμε* τη μονοτονία της συνάρτησης αυτής, τότε εξασφαλίζεται η ύπαρξη του ορίου $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x$ καθώς και το ότι αυτό είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Αν θεωρήσουμε και την ακολουθία (n) τότε, επειδή αυτή αποκλίνει στο $+\infty$, από την Πρόταση 4.19 συνεπάγεται ότι η αντίστοιχη ακολουθία $\big((1 + \frac{1}{n})^n\big)$ έχει το ίδιο όριο με τη συνάρτηση. Όμως, το όριο της ακολουθίας αυτής είναι αριθμός τον οποίο έχουμε ονομάσει e και, επομένως, και το όριο της συνάρτησης είναι ο αριθμός e. Δηλαδή,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x = e.}$$

Υπάρχει, όμως, το εξής λεπτό σημείο που ακυρώνει τον συλλογισμό που κάναμε για την απόδειξη του $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$: δυστυχώς, η απόδειξη που θα δούμε αργότερα του ότι η $y = (1 + \frac{1}{x})^x$ είναι αύξουσα χρησιμοποιεί την παράγωγο της συνάρτησης αυτής και ο τύπος της παραγώγου αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το όριο αυτό!! Για να αποφευχθεί αυτός ο *λογικός κύκλος* είτε πρέπει να αποδειχθεί με άλλο τρόπο η μονοτονία της συνάρτησης – που θα αποφύγουμε – είτε πρέπει να αποδειχθεί με άλλο τρόπο το όριο.

Απόδειξη: Ιδού μια (έγκυρη!) απόδειξη του $\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e$.

Γνωρίζουμε το όριο ακολουθίας $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. Από αυτό εύκολα παίρνουμε και τα – επίσης, όρια ακολουθιών – $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n+1})^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$ και $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n(1 + \frac{1}{n}) = e \cdot 1 = e$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει φυσικός $n_0{}'$ ώστε να είναι $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n+1})^n < e+\epsilon$ για κάθε $n \geq n_0{}'$ και υπάρχει φυσικός $n_0{}''$ ώστε να είναι $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n})^{n+1} < e+\epsilon$ για κάθε $n_0{}''$. Ορίζουμε τον (φυσικό) $N = \max\{n_0{}', n_0{}''\}$, οπότε είναι $N \geq n_0{}'$ και $N \geq n_0{}''$. Άρα είναι $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n+1})^n < e+\epsilon$ ΚΑΙ $e-\epsilon < (1+\frac{1}{n})^{n+1} < e+\epsilon$ για κάθε φυσικό $n \geq N$. Τότε για κάθε (όχι κατ' ανάγκη φυσικό) $x > N$ συνεπάγεται $[x] \geq N$, οπότε $e-\epsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \leq (1+\frac{1}{x})^x \leq \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\epsilon$. Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ ώστε να είναι $e-\epsilon < (1+\frac{1}{x})^x < e+\epsilon$ ή, ισοδύναμα, $\left|(1+\frac{1}{x})^x - e\right| < \epsilon$ για κάθε $x > N$. Άρα είναι $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Ασκήσεις.

1. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}\,.$$

   (Υπόδειξη: Γράψτε $(1-\frac{1}{x})^x = (\frac{x-1}{x})^x = \frac{1}{(\frac{x}{x-1})^x} = \frac{1}{(1+\frac{1}{x-1})^{x-1}(1+\frac{1}{x-1})}$.)

   Με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής αποδείξτε ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x = e^t}$$

   για κάθε t, διακρίνοντας περιπτώσεις: $t > 0$, $t = 0$, $t < 0$.

   (Υπόδειξη: Αν $t > 0$, χρησιμοποιήστε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Αν $t < 0$, χρησιμοποιήστε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$.)

   Παρατηρήστε ότι τα $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ και $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{t}{x}\right)^x = e^t$.)

2. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης μαζί με την Πρόταση 4.19, υπολογίστε τα παρακάτω όρια ακολουθιών.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)^{4n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{4n}\right)^{n}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{3n},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{\frac{n}{5}}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}, \quad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{4}}.$$

3. Έστω $a > 1$. Από την ισότητα $\log_a(ax) = 1 + \log_a x$ και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της $y = \log_a x$, βρείτε με δεύτερο τρόπο τα ήδη γνωστά όρια $\lim_{x\to+\infty}\log_a x$ και $\lim_{x\to 0+}\log_a x$.

4. Έστω $a > 1$. Από την ισότητα $a^{x+1} = aa^x$ και χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της $y = a^x$, βρείτε με δεύτερο τρόπο τα ήδη γνωστά όρια $\lim_{x\to\pm\infty} a^x$.

5. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ και ότι ισχύει $f(\sqrt{n}) \geq \log n$ για κάθε *φυσικό* n. Υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και, αν ναι, ποια είναι η τιμή του;

   (Υπόδειξη: Για την τιμή του ορίου θα χρησιμοποιήσετε την Πρόταση 4.19.)

6. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ικανοποιεί την $f(\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε *φυσικό* n. Υπάρχει το $\lim_{x\to 0+} f(x)$ και, αν ναι, ποια είναι η τιμή του;

Κεφάλαιο 5

Συνεχείς συναρτήσεις.

Συνεχής συνάρτηση: ορισμός με όριο και ορισμός «με τους ϵ και δ». Η συνέχεια των ρητών συναρτήσεων, των δυνάμεων, της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Συνέχεια και αλγεβρικές πράξεις. Συνέχεια σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων. Συνέχεια και όρια συναρτήσεων με αλλαγή μεταβλητής. Συνέχεια και ακολουθίες. Είδη ασυνεχειών. Το Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης, το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής και το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Το Θεώρημα του Bolzano και η ιδιότητα σταθερού προσήμου. Σύνολο τιμών συνεχούς γνησίως μονότονης συνάρτησης σε διάστημα. Σύνολο τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης. Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης. Η συνέχεια των αντίστροφων τριγωνομετρικών και των αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

5.1 Ορισμοί, παραδείγματα.

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **συνεχής στον** ξ αν ορίζεται στον ξ και ισχύει

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi).$$

Φυσικά, για να έχει νόημα το όριο πρέπει η συνάρτηση να είναι ορισμένη τουλάχιστον σε κάποιο διάστημα είτε δεξιά είτε αριστερά του ξ, δηλαδή είτε σε κάποιο $[\xi, b)$, αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (a, ξ), είτε σε κάποιο $(a, \xi]$, αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (ξ, b), είτε σε κάποιο (a, b), όπου $a < \xi < b$.

Επίσης, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **συνεχής στον** ξ *και* στην περίπτωση που ορίζεται στον ξ αλλά δεν ορίζεται σε κανένα σημείο κάποιας ένωσης $(a, \xi) \cup (\xi, b)$, οπότε δεν έχει καν νόημα το όριο της $y = f(x)$ στον ξ.

Τονίζουμε ότι για να είναι συνεχής η $y = f(x)$ στον ξ προϋποτίθεται ότι ο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή ότι ορίζεται ο αριθμός $f(\xi)$.

(i) Αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα $[\xi, b)$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (a, ξ), τότε η συνθήκη συνέχειας $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ είναι, φυσικά, ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$. (ii) Αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα $(a,\xi]$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (ξ,b), τότε η συνθήκη συνέχειας είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$. (iii) Αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα (a,b) με $a < \xi < b$, τότε η συνθήκη συνέχειας είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$.

Γενικότερα, αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα $[\xi,b)$ και ισχύει $\lim_{x\to\xi+} f(x) = f(\xi)$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **συνεχής στον ξ από τα δεξιά του**. Ομοίως, αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα $(a,\xi]$ και ισχύει $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi)$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **συνεχής στον ξ από τα αριστερά του**. Άρα: (i) Αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα $[\xi,b)$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (a,ξ), τότε είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι συνεχής στον ξ από τα δεξιά του. (ii) Αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα $(a,\xi]$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (ξ,b), τότε είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι συνεχής στον ξ από τα αριστερά του. (iii) Αν η $y = f(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα (a,b) με $a < \xi < b$, τότε είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν είναι συνεχής στον ξ από τα δεξιά του *και* από τα αριστερά του.

Παραδείγματα: (1) Η $y = x^2$ είναι συνεχής στον 3, διότι $\lim_{x\to 3} x^2 = 9 = 3^2$.

(2) Η $y = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στον 0, διότι $\lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$.

(3) Επειδή η $y = [x]$ ταυτίζεται με την $y = 0$ στο διάστημα $(0,1)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 1-}[x] = \lim_{x\to 1-} 0 = 0 \neq 1 = [1]$. Επίσης, επειδή η $y = [x]$ ταυτίζεται με την $y = 1$ στο διάστημα $(1,2)$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 1+}[x] = \lim_{x\to 1+} 1 = 1 = [1]$. Άρα η $y = [x]$ είναι συνεχής στον 1 από τα δεξιά του αλλά όχι από τα αριστερά του και, επομένως, δεν είναι συνεχής στον 1.

Επειδή η $y = [x]$ ταυτίζεται με την $y = 0$ στην ένωση $(0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},1)$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\frac{1}{2}}[x] = \lim_{x\to\frac{1}{2}} 0 = 0 = [\frac{1}{2}]$. Άρα η $y = [x]$ είναι συνεχής στον $\frac{1}{2}$.

(4) Η $\sqrt{-x^2(x+1)}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,-1] \cup \{0\}$. Δηλαδή, η συνάρτηση ορίζεται στον 0 αλλά δεν ορίζεται σε κανένα σημείο δυο διαστημάτων αριστερά και δεξιά του 0, οπότε είναι συνεχής στον 0.

(5) Η σταθερή συνάρτηση $y = c$ είναι συνεχής σε κάθε ξ. Πράγματι, είναι $\lim_{x\to\xi} c = c$, οπότε το όριο στον ξ είναι ίσο με την τιμή στον ξ.

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι είναι **συνεχής στο πεδίο ορισμού της** ή, απλώς, **συνεχής**. Ακόμη, αν θεωρήσουμε κάποιο συγκεκριμένο υποσύνολο A του πεδίου ορισμού της συνάρτησης και αν, *αφού περιορίσουμε το πεδίο ορισμού στο A*, η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **συνεχής στο σύνολο A**.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την $y = f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{αν } x < 0, \\ x+1\,, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$. Η $y = f(x)$ είναι ασυνεχής στον 0. Πράγματι: $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0 \neq 1 = f(0)$, οπότε δεν είναι συνεχής στον 0 από τα αριστερά του, ενώ $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x+1) = 1 = f(0)$, οπότε είναι συνεχής στον 0 από τα δεξιά του. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού στο $[0,+\infty)$, η συνάρτηση έχει τύπο $y = f(x) = x + 1$ για κάθε x στο $[0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος αυτού. Πράγματι, για κάθε ξ στο $[0, +\infty)$ ισχύει $\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi}(x+1) = \xi + 1 = f(\xi)$. Προσέξτε ότι αφού περιορίσαμε το πεδίο ορισμού στο $[0, +\infty)$ το όριο στον 0 είναι το ίδιο με το δεξιό πλευρικό όριο στον 0 διότι δεν έχει νόημα το αριστερό πλευρικό όριο. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Θα δούμε τώρα έναν άλλο τρόπο διατύπωσης του ορισμού της συνέχειας. Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση που η $y = f(x)$ ορίζεται εκτός από τον ξ και σε διάστημα δεξιά ή αριστερά ή και από τις δυο μεριές του ξ, οπότε έχει νόημα να μιλάμε για την ύπαρξη του $\lim_{x\to\xi} f(x)$. Τότε η ισότητα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$, δηλαδή η συνέχεια της συνάρτησης στον ξ, σημαίνει ότι η απόσταση $|f(x) - f(\xi)|$ θα γίνει όσο θέλουμε μικρή αν η $|x - \xi|$ γίνει αρκετά μικρή και $\neq 0$. Παρατηρούμε, όμως, ότι *έτσι κι αλλιώς*, αν η $|x - \xi|$ γίνει 0 ή, ισοδύναμα, αν ο x γίνει ξ, τότε ο $f(x)$ θα γίνει $f(\xi)$ ή, ισοδύναμα, η $|f(x) - f(\xi)|$ θα γίνει 0 και, επομένως, δεν αναιρείται το ότι η $|f(x) - f(\xi)|$ θα γίνει όσο θέλουμε μικρή. Άρα δεν είναι ανάγκη να εξαιρούμε την τιμή 0 για την $|x - \xi|$ από τη διατύπωση του ορισμού της συνέχειας. Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ αν *η απόσταση $|f(x) - f(\xi)|$ θα γίνει όσο θέλουμε μικρή αν η $|x - \xi|$ γίνει αρκετά μικρή*.

Η ίδια διατύπωση καλύπτει και την περίπτωση που η συνάρτηση δεν ορίζεται σε κανένα σημείο μιας ένωσης διαστημάτων αριστερά και δεξιά του ξ οπότε, βάσει του ορισμού, είναι αυτομάτως συνεχής στον ξ. Πράγματι, σ' αυτήν την περίπτωση, το να γίνει η $|x - \xi|$ αρκετά μικρή είναι ισοδύναμο με το να γίνει ο x ίσος με τον ξ και τότε, αυτομάτως, ο $f(x)$ θα γίνει ίσος με τον $f(\xi)$ ή, ισοδύναμα, η $|f(x) - f(\xi)|$ θα γίνει 0 και, επομένως, η $|f(x) - f(\xi)|$ θα γίνει όσο θέλουμε μικρή.

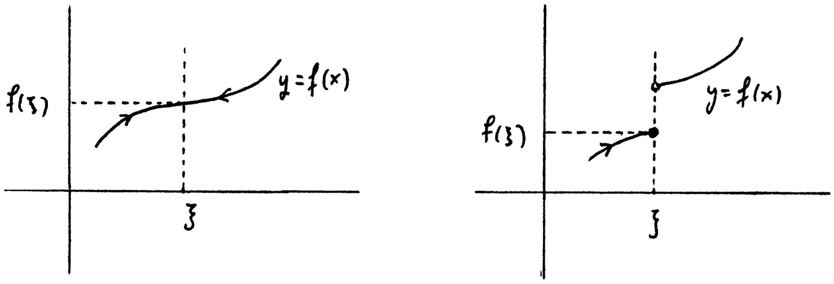
Προφανώς, μια πιο ποσοτική διατύπωση του ορισμού της συνέχειας είναι η εξής. Η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ *αν ορίζεται στον ξ και η $|f(x) - f(\xi)|$ θα γίνει μικρότερη από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν η $|x - \xi|$ γίνει μικρότερη από κάποιον κατάλληλο θετικό αριθμό* ή, ισοδύναμα, *αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης που ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$*. Τονίζουμε και πάλι ότι *δε χρειάζεται* ο περιορισμός $0 < |x - \xi|$ καθώς και ότι η παραπάνω διατύπωση δεν επηρεάζεται από το αν η συνάρτηση είναι ή όχι ορισμένη σε διαστήματα γύρω από τον ξ.

Στο γράφημα μιας συνάρτησης φαίνεται καθαρά αν αυτή είναι συνεχής ή όχι σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού της. Στην περίπτωση που η $y = f(x)$ ορίζεται τουλάχιστον σε κάποιο διάστημα αριστερά ή δεξιά του ξ, η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν, καθώς ο μεταβλητός x πλησιάζει αρκετά κοντά τον σταθερό ξ, το αντίστοιχο μεταβλητό σημείο $(x, y) = (x, f(x))$ πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$. Με απλοϊκότερα (και κάπως ασαφή) λόγια: η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ αν και μόνο αν το γράφημά της δε «σπάει» στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ ή, αλλιώς, είναι «συνεχές» στο σημείο αυτό. (Δείτε, όμως, και την άσκηση 8 αυτής της ενότητας.) Επομένως, μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού της αν και μόνο αν το μέρος του γραφήματός της που αντιστοιχεί στο διάστημα αυτό είναι μια καμπύλη.

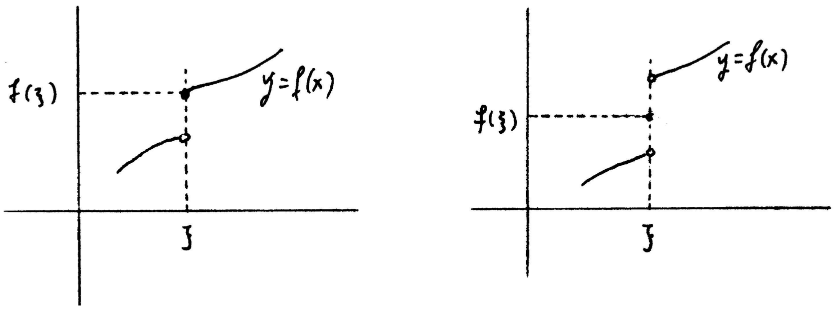
Ένας άλλος τρόπος να «δούμε» την έννοια της συνέχειας στο γράφημα της

$y = f(x)$ είναι ο εξής. Το να είναι συνεχής η $y = f(x)$ στον ξ ισοδυναμεί με το ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης ο οποίος ανήκει στο διάστημα $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ του σημείου $(x, f(x))$ βρίσκεται γνησίως ανάμεσα στα ύψη $f(\xi) - \epsilon$ και $f(\xi) + \epsilon$ ή, με άλλα λόγια, *το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο διάστημα* $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ *είναι υποσύνολο της οριζόντιας ζώνης που είναι γνησίως ανάμεσα στις οριζόντιες ευθείες* $y = f(\xi) - \epsilon$ *και* $y = f(\xi) + \epsilon$.

Παραδείγματα: Τα πιο σημαντικά και γενικά παραδείγματα συνεχών συναρ-



Σχήμα 5.1: Συνεχής στον ξ και συνεχής στον ξ από τα αριστερά του.



Σχήμα 5.2: Συνεχής στον ξ από τα δεξιά του και ασυνεχής στον ξ.

τήσεων είναι, φυσικά, αυτά που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

(1) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$ είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x\to\xi} p(x) = p(\xi)$.

(2) Κάθε ρητή συνάρτηση $y = r(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_M x^M}$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε ξ ο οποίος δεν είναι ρίζα του παρονομαστή, δηλαδή για κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ισχύει $\lim_{x\to\xi} r(x) = r(\xi)$.

(3) Οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι συνεχείς, διότι για κάθε ξ ισχύει $\lim_{x\to\xi} \cos x = \cos \xi$ και $\lim_{x\to\xi} \sin x = \sin \xi$.

Ομοίως, οι $y = \tan x$ και $y = \cot x$ είναι συνεχείς· για κάθε ξ του πεδίου ορισμού τους, δηλαδή για κάθε $\xi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) για την πρώτη και για κάθε $\xi \neq k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$) για τη δεύτερη, ισχύει $\lim_{x\to\xi} \tan x = \tan\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \cot x = \cot\xi$.

(4) Η $y = x^a$ είναι συνεχής· για κάθε ξ του πεδίου ορισμού της, δηλαδή (i) για κάθε ξ, αν ο a είναι ρητός με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του (εξαιρείται ο $\xi = 0$, αν $a \leq 0$) και (ii) για κάθε $\xi \geq 0$, αν ο a είναι άρρητος ή ρητός με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του (εξαιρείται πάλι ο $\xi = 0$, αν $a \leq 0$), ισχύει $\lim_{x\to\xi} x^a = \xi^a$.

(5) Αν $a > 0$, η $y = a^x$ είναι συνεχής, αφού για κάθε ξ είναι $\lim_{x\to\xi} a^x = a^\xi$.

(6) Για κάθε $a > 0$, $a \neq 1$, η $y = \log_a x$ είναι συνεχής. Πράγματι, για κάθε $\xi > 0$ είναι $\lim_{x\to\xi} \log_a x = \log_a \xi$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στον 1. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της συνέχειας με το όριο καθώς και τον ορισμό της συνέχειας «με τους ϵ και δ».

$$y = x, \qquad y = 2x - 3, \qquad y = x^2\,, \qquad y = \frac{1}{x}\,, \qquad y = \sqrt{x}\,.$$

2. Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις συνεχείς στον 0;

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}\,, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1\,, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}\,, & \text{αν } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}\,, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

3. Σε ποια σημεία είναι συνεχής ή συνεχής από δεξιά ή συνεχής από αριστερά καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις;

$$y = \begin{cases} x\,, & \text{αν } x \leq 0, \\ \frac{1}{x}\,, & \text{αν } x > 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 0\,, & \text{αν } x = 0, \\ \frac{1}{|x|}\,, & \text{αν } x \neq 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2\,, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1\,, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0, \\ \sqrt{x+1}\,, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2\,, & \text{αν } x \leq -\pi \text{ ή } x > \pi, \\ \sin x\,, & \text{αν } -\pi < x \leq \pi. \end{cases}$$

4. Σε ποια σημεία είναι συνεχής ή συνεχής από δεξιά ή συνεχής από αριστερά καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις; Συμβουλευτείτε τα γραφήματά τους και την άσκηση Α2 της ενότητας 4.3.

$$y = [x], \quad y = [2x], \quad y = x - [x], \quad y = x - [x] - \frac{1}{2}\,, \quad y = \Big|x - [x] - \frac{1}{2}\Big|.$$

5. Αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0} \big(f(\xi+h) - f(\xi-h)\big) = 0$ αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ.

   Αποδείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει: θεωρήστε τη συνάρτηση $y = f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } x = 0, \\ 0\,, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$ και $\xi = 0$.

6. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στον ξ και φραγμένη κοντά στον ξ, δηλαδή ότι υπάρχει αριθμός M ώστε να είναι $|f(x)| \leq M$ για κάθε x σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$. Αποδείξτε με τον ορισμό με το όριο *και* με τον ορισμό «με τους ϵ και δ» (για κάθε $\epsilon > 0$ βρείτε συγκεκριμένο κατάλληλο $\delta > 0$) ότι η $y = g(x) = (x - \xi)f(x)$ είναι συνεχής στον ξ.

7. Έστω αριθμοί $M \geq 0$ και $\rho > 0$ και συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη στο διάστημα (a, b), όπου $a < \xi < b$. Αν είναι $|f(x) - f(\xi)| \leq M|x - \xi|^\rho$ για κάθε x στο (a, b), αποδείξτε με τον ορισμό με το όριο *και* με τον ορισμό «με τους ϵ και δ» (για κάθε $\epsilon > 0$ βρείτε συγκεκριμένο κατάλληλο $\delta > 0$) ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ.

   Αν η $y = f(x)$ ικανοποιεί τις παραπάνω υποθέσεις, τότε χαρακτηρίζεται **Hölder-συνεχής** στον ξ με **Hölder-εκθέτη** ρ. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **Lipschitz-συνεχής** στον ξ.

   Αποδείξτε ότι οι $y = x$, $y = |x|$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \sqrt{|x|}$ και $y = x\sqrt{|x|}$ είναι Hölder-συνεχείς στον 0 και βρείτε τους αντίστοιχους Hölder-εκθέτες.

   (*) Αποδείξτε ότι οι ίδιες συναρτήσεις είναι Hölder-συνεχείς στον ξ και για κάθε $\xi \neq 0$ και βρείτε τους αντίστοιχους Hölder-εκθέτες. Παρατηρήστε ότι για τις δυο τελευταίες συναρτήσεις είναι άλλος ο Hölder-εκθέτης για τον $\xi = 0$ και άλλος για τον οποιονδήποτε $\xi \neq 0$.

8. Είπαμε ότι το να είναι η $y = f(x)$ συνεχής στον ξ σημαίνει ότι το γράφημά της *δε «σπάει» στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ ή, αλλιώς, είναι «συνεχές» στο σημείο αυτό.* Αυτή η διατύπωση είναι κάπως ασαφής και, οπωσδήποτε, όχι τόσο απλή όσο φαίνεται. Δείτε το εξής παράδειγμα.

   Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = \begin{cases} x(-1)^{[\frac{1}{x}]}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ και σχεδιάστε το γράφημά της. Δείτε και την άσκηση 1 της ενότητας 3.4.

   Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0.

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα παρεμβολής.)

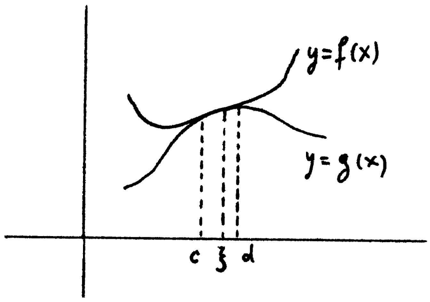
   Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση είναι ασυνεχής σε άπειρα σημεία τα οποία αποτελούν όρους ακολουθίας που συγκλίνει στον 0.

5.2 Ιδιότητες συνεχών συναρτήσεων.

Α. Η Πρόταση 5.1 βασίζεται στην Πρόταση 4.2.

Πρόταση 5.1 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται στο (a, b) με $a < \xi < b$ ή στο $[\xi, b)$ ή στο $(a, \xi]$. Αν η μια από αυτές είναι συνεχής στον ξ ή στον ξ από τα δεξιά του ή στον ξ από τα αριστερά του, αντιστοίχως, τότε το ίδιο ισχύει και για την άλλη.*

Απόδειξη: Αν οι $y=f(x)$ και $y=g(x)$ ταυτίζονται στο (a,b) με $a<\xi<b$, τότε ταυτίζονται στην ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$ και είναι και $f(\xi)=g(\xi)$. Αν η $y=f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, τότε είναι $\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$. Επειδή οι $y=f(x)$ και $y=g(x)$ ταυτίζονται στην $(a,\xi)\cup(\xi,b)$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} g(x)=\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$. Τέλος, επειδή είναι $f(\xi)=g(\xi)$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi} g(x)=g(\xi)$ και, επομένως, η $y=g(x)$ είναι συνεχής στον ξ.



Σχήμα 5.3: Και οι δυο συναρτήσεις συνεχείς στον ξ.

Οι αποδείξεις στις περιπτώσεις των $[\xi,b)$ και $(a,\xi]$ είναι παρόμοιες.

Παραδείγματα: (1) Οι $y=\begin{cases} x+1\,, & \text{αν } x\leq 1,\\ x-1\,, & \text{αν } 1<x\end{cases}$ και $y=x+1$ ταυτίζονται στο $(-\infty,1]$. Η δεύτερη είναι συνεχής στον 1 και, επομένως, είναι και συνεχής στον 1 από τα αριστερά του. Άρα και η πρώτη συνάρτηση είναι συνεχής στον 1 από τα αριστερά του.

(2) Οι $y=x^2$ και $y=\begin{cases} 1+x\,, & \text{αν } |x|\geq 10^{-10},\\ x^2\,, & \text{αν } |x|<10^{-10},\end{cases}$ ταυτίζονται στο διάστημα $(-10^{-10}\,,10^{-10})$. Η πρώτη είναι συνεχής στον 0, οπότε και η δεύτερη είναι συνεχής στον 0.

Β. Η Πρόταση 5.2 είναι απλή εφαρμογή των κανόνων αθροίσματος, διαφοράς, γινομένου, λόγου και απόλυτης τιμής για όρια συναρτήσεων.

Πρόταση 5.2 *Αν οι $y=f(x)$ και $y=g(x)$ είναι συνεχείς στον ξ ή στον ξ από τα δεξιά του ή στον ξ από τα αριστερά του, τότε και οι $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)-g(x)$, $y=f(x)g(x)$ και $y=|f(x)|$ είναι συνεχείς στον ξ ή στον ξ από τα δεξιά του ή στον ξ από τα αριστερά του, αντιστοίχως. Το ίδιο ισχύει και για την $\frac{f(x)}{g(x)}$, αρκεί να είναι $g(\xi)\neq 0$.*

Απόδειξη: Από τις ισότητες $\lim_{x\to\xi} f(x)=f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x)=g(\xi)$ συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to\xi} f(x)+\lim_{x\to\xi} g(x)=f(\xi)+g(\xi)$$

και, επομένως, η $y=f(x)+g(x)$ είναι συνεχής στον ξ. Η απόδειξη είναι ίδια και στην περίπτωση της συνέχειας στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του καθώς και στις περιπτώσεις της διαφοράς, του γινομένου, του λόγου και της απόλυτης τιμής των συναρτήσεων.

Παραδείγματα: (1) Η $y=\frac{\sqrt{x}+e^x}{(x-2x^2)\log x}$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της, διότι καθεμιά από τις $y = \sqrt{x}$, $y = e^x$, $y = \log x$ και $y = x - 2x^2$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Η τομή όλων των πεδίων ορισμού είναι το $(0, +\infty)$ και από αυτό πρέπει να εξαιρέσουμε τα σημεία στα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε ξ του συνόλου $(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$.

(2) Η $y = \frac{x^2+\sqrt{x}}{\sin x+\cos x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$ στο οποίο δε μηδενίζεται ο παρονομαστής, δηλαδή σε κάθε $\xi \geq 0$ που είναι $\neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Γ. Το επόμενο αποτέλεσμα αναφέρεται στη *σύνθεση συναρτήσεων*.

Πρόταση 5.3 *Έστω ότι ορίζεται η σύνθεση $z = g\big(f(x)\big)$ των $y = f(x)$ και $z = g(y)$. Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ και αν η $z = g(y)$ είναι συνεχής στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $z = g\big(f(x)\big)$ είναι συνεχής στον ξ.*

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η $z = g(y)$ είναι συνεχής στον η, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$ που ικανοποιεί την $|y - \eta| < \delta'$. Επειδή η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| = |f(x) - f(\xi)| < \delta'$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Τώρα, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$ συνεπάγεται $|f(x) - \eta| < \delta'$ και, επειδή ο $f(x)$ περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$, συνεπάγεται $\big|g\big(f(x)\big) - g(\eta)\big| < \epsilon$. Άρα είναι $\big|g\big(f(x)\big) - g\big(f(\xi)\big)\big| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ – δηλαδή, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $z = g\big(f(x)\big)$ – που ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Αυτό σημαίνει ότι η $z = g\big(f(x)\big)$ είναι συνεχής στον ξ.

Η Πρόταση 5.3 εξηγείται με την ακόλουθη «αλυσιδωτή διαδικασία»: αν ο x είναι αρκετά κοντά στον ξ, τότε ο $y = f(x)$ είναι όσο θέλουμε κοντά και, επομένως, αρκετά κοντά στον $f(\xi) = \eta$, οπότε και ο $g\big(f(x)\big) = g(y)$ είναι όσο θέλουμε κοντά στον $g(\eta) = g\big(f(\xi)\big)$. Άρα, αν ο x είναι αρκετά κοντά στον ξ, τότε ο $g\big(f(x)\big)$ είναι όσο θέλουμε κοντά στον $g\big(f(\xi)\big)$. Αυτό, φυσικά, θυμίζει τον κανόνα αλλαγής μεταβλητής ή αντικατάστασης, δηλαδή την Πρόταση 4.12.

Παραδείγματα: (1) Η $z = \sin\sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$. Πράγματι, η $y = \sqrt{x}$ είναι συνεχής σε κάθε $\xi \geq 0$ και η $z = \sin y$ είναι συνεχής στον $\eta = \sqrt{\xi}$ – διότι είναι συνεχής σε κάθε αριθμό.

(2) Το πεδίο ορισμού της $z = \sqrt{\sin x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $[k2\pi, \pi + k2\pi]$ $(k \in \mathbf{Z})$ διότι σ' αυτά ακριβώς τα διαστήματα ισχύει $\sin x \geq 0$. Η $y = \sin x$ είναι συνεχής σε κάθε ξ που ανήκει σ' αυτά τα διαστήματα – διότι είναι συνεχής σε κάθε ξ – και η $z = \sqrt{y}$ είναι συνεχής στον αντίστοιχο $\eta = \sin\xi$ αφού αυτός είναι ≥ 0. Άρα η $z = \sqrt{\sin x}$ είναι συνεχής σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της.

Ένα θέμα παρεμφερές με την Πρόταση 5.3 αλλά και – ίσως πιο πολύ – με την Πρόταση 4.12 είναι ο υπολογισμός του ορίου συνάρτησης $z = g\big(f(x)\big)$ η οποία είναι σύνθεση δυο συναρτήσεων, της $y = f(x)$ και της $z = g(y)$, στην περίπτωση που γνωρίζουμε ότι το $\lim f(x)$ είναι κάποιος συγκεκριμένος *αριθμός* η και που η $z = g(y)$ είναι *συνεχής* στον η. Για παράδειγμα, έστω ότι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και ότι η $z = g(y)$ είναι συνεχής στον η. Τότε έχουμε μια «*αλυσιδωτή διαδικασία*»: αν ο

x είναι αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$, τότε ο $y = f(x)$ είναι όσο θέλουμε κοντά και, επομένως, αρκετά κοντά στον η, οπότε ο $g\big(f(x)\big) = g(y)$ είναι όσο θέλουμε κοντά στον $g(\eta)$. Συμπεραίνουμε τότε ότι, αν ο x είναι αρκετά κοντά στον ξ και $\neq \xi$, τότε ο $g\big(f(x)\big)$ είναι όσο θέλουμε κοντά στον $g(\eta)$. Δηλαδή, $\lim_{x\to\xi} g\big(f(x)\big) = g(\eta)$.

Πρόταση 5.4 ***Κανόνας αλλαγής μεταβλητής*** *ή* ***κανόνας αντικατάστασης.*** *Έστω ότι ορίζεται η σύνθεση $z = g\big(f(x)\big)$ των $y = f(x)$ και $z = g(y)$. Αν (i) $\lim f(x) = \eta$ και η $y = g(x)$ είναι συνεχής στον η ή (ii) $\lim f(x) = \eta$ και είναι $f(x) \geq \eta$ κοντά στο όριο του x και η $y = g(x)$ είναι συνεχής στον η από τα δεξιά του ή (iii) $\lim f(x) = \eta$ και είναι $f(x) \leq \eta$ κοντά στο όριο του x και η $y = g(x)$ είναι συνεχής στον η από τα αριστερά του, τότε $\lim g\big(f(x)\big) = g(\eta)$.*

Απόδειξη: Θα δούμε την απόδειξη στην περίπτωση που είναι $\lim_{x\to\xi} f(x) = \eta$ και η $z = g(y)$ είναι συνεχής στον η. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(f(x)) = g(\eta)$.

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $|g(y) - g(\eta)| < \epsilon$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$ που ικανοποιεί την $|y - \eta| < \delta'$. Κατόπιν, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - \eta| < \delta'$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Τότε για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $|f(x) - \eta| < \delta'$ και, επειδή ο $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$, ισχύει $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$. Επομένως, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ – δηλαδή, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $z = g(f(x))$ – που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$ ισχύει $|g(f(x)) - g(\eta)| < \epsilon$. Άρα $\lim g(f(x)) = g(\eta)$.

Παραδείγματα: (1) Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$.

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x} + 1$, οπότε η συνάρτηση $z = \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5}$ γράφεται $z = \frac{y^4}{y^8+y^{13}+5}$. Είναι $\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}(\sqrt{x}+1) = 1$ και η $z = \frac{y^4}{y^8+y^{13}+5}$ είναι συνεχής στον 1.

Άρα $\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x}+1)^4}{(\sqrt{x}+1)^8+(\sqrt{x}+1)^{13}+5} = \frac{1^4}{1^8+1^{13}+5} = \frac{1}{7}$.

(2) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2+\frac{x-1}{x^2+x+1}+1}{3\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^4+2\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+1}$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ η $z = \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2+\frac{x-1}{x^2+x+1}+1}{3\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^4+2\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+1}$ γράφεται $z = \frac{\sqrt{y}+y^2+y+1}{3y^4+2\sqrt{y}+1}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2+x+1} = 0$ και ότι η $z = \frac{\sqrt{y}+y^2+y+1}{3y^4+2\sqrt{y}+1}$ είναι συνεχής στον 0.

Άρα $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2+\frac{x-1}{x^2+x+1}+1}{3\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^4+2\sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+1}}+1} = \frac{\sqrt{0}+0^2+0+1}{3\cdot 0^4+2\sqrt{0}+1} = 1$.

(3) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to+\infty} \big((\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3\big)$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{\sin x}{x}$ η $z = (\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3$ γίνεται $z = y^3 + y^2 + 3$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ και ότι η $z = y^3 + y^2 + 3$ είναι συνεχής στον 0.

Άρα $\lim_{x\to+\infty} \big((\frac{\sin x}{x})^3 + (\frac{\sin x}{x})^2 + 3\big) = 0^3 + 0^2 + 3 = 3$.

Υπάρχουν διαφορές ανάμεσα στις Προτάσεις 4.12 και 5.4. Κατ' αρχάς στην Πρόταση 4.12 το όριο της $y = f(x)$ δε χρειάζεται να είναι αριθμός αλλά μπορεί να είναι και $\pm\infty$ ενώ στην Πρόταση 5.4 το όριο της $y = f(x)$ πρέπει να είναι αριθμός. Επομένως, η Πρόταση 5.4 δε μπορεί να εφαρμοστεί στο δεύτερο παράδειγμα μετά την Πρόταση 4.12. Κατόπιν, αν $\lim f(x) = \eta$, στην Πρόταση 4.12 μια από τις υποθέσεις είναι ότι ισχύει $f(x) \neq \eta$ κοντά στο όριο του x. Αυτή η υπόθεση δεν υπάρχει στην Πρόταση 5.4 αλλά υπάρχει η υπόθεση ότι η $z = g(y)$ είναι συνεχής στον η. Αυτά συνεπάγονται ότι η Πρόταση 5.4 δε μπορεί να εφαρμοστεί στο τρίτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 4.12 και η Πρόταση 4.12 δε μπορεί να εφαρμοστεί στο τρίτο παράδειγμα μετά την Πρόταση 5.4 (διότι δεν υπάρχει κανένας a ώστε να ισχύει $\frac{\sin x}{x} \neq 0$ για κάθε $x > a$).

Δ. Ακολουθούν μερικές εφαρμογές των προτάσεων που συσχετίζουν όρια και ανισότητες.

Πρόταση 5.5 *Αν ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στον ξ ή κοντά στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του και αν οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στον ξ ή συνεχείς στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του, αντιστοίχως, τότε είναι $f(\xi) \leq g(\xi)$.*

Απόδειξη: Είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.14 σε συνδυασμό με τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$ ή τα $\lim_{x\to\xi\pm} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi\pm} g(x) = g(\xi)$.

Παραδείγματα: (1) Αν γνωρίζουμε ότι είναι $f(x) \leq \sin x$ για κάθε x στο $(0, \frac{\pi}{4})$ και ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον 0 από τα δεξιά του, τότε, επειδή και η $y = \sin x$ είναι συνεχής στον 0 από τα δεξιά του, συμπεραίνουμε ότι $f(0) \leq \sin 0 = 0$.

(2) Αν ισχύει $l \leq f(x) \leq u$ κοντά στον ξ και η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, τότε συνεπάγεται $l \leq f(\xi) \leq u$. Αυτό είναι εφαρμογή της Πρότασης 5.5 στην $y = f(x)$ και στις σταθερές συναρτήσεις $y = l$ και $y = u$.

Πρόταση 5.6 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ ή συνεχής στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του.*
(1) Αν είναι $f(\xi) < u$, τότε είναι $f(x) < u$ κοντά στον ξ ή κοντά στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του, αντιστοίχως.
(2) Αν είναι $f(\xi) > l$, τότε είναι $f(x) > l$ κοντά στον ξ ή κοντά στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του, αντιστοίχως.

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.16 σε συνδυασμό με τα $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi} g(x) = g(\xi)$ ή τα $\lim_{x\to\xi\pm} f(x) = f(\xi)$ και $\lim_{x\to\xi\pm} g(x) = g(\xi)$.

Παράδειγμα: Η $y = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ είναι συνεχής στον $\frac{\pi}{3}$ και η τιμή της στον $\frac{\pi}{3}$ είναι ίση με $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}} = 2 + \sqrt{3}$. Επειδή $3 < 2 + \sqrt{3} < 4$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιο διάστημα (a, b) με $a < \frac{\pi}{3} < b$ ώστε να είναι $3 < \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} < 4$ για κάθε x στο διάστημα αυτό. Αυτό είναι συνέπεια της Πρότασης 5.6 με $l = 3$ και $u = 4$.

Ε. Η Πρόταση 5.7 είναι προφανής εφαρμογή της Πρότασης 4.17.

Πρόταση 5.7 *Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ ή στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του, τότε είναι φραγμένη κοντά στον ξ ή στον ξ από τα δεξιά του ή από τα αριστερά του, αντιστοίχως.*

Παράδειγμα: Η $y = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στον 1. Από την Πρόταση 5.7 συνεπάγεται ότι η συνάρτηση είναι φραγμένη κοντά στον 1 (παρά το ότι δεν είναι φραγμένη στο πεδίο ορισμού της). Δηλαδή, υπάρχει κάποιο διάστημα (a, b) με $a < 1 < b$ ώστε η $y = \frac{1}{x}$ να είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό. Για παράδειγμα, η συνάρτηση είναι φραγμένη στο διάστημα $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, το οποίο περιέχει τον 1, διότι ισχύει $\frac{2}{3} < \frac{1}{x} < 2$ για κάθε x στο διάστημα αυτό.

Ασκήσεις.

1. Σε ποια σημεία είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις;
$$y = \frac{x^2 \log x + xe^x}{(\sin x - \cos x)^2}\,, \qquad y = x^{-\frac{3}{4}}(\log x)^2 \frac{\tan x - \cot x}{(\sin x)^2 - 2\sin x + 1}\,.$$

2. Βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων και – με τον κανόνα σύνθεσης – τα σημεία συνέχειάς τους.
$$y = \sin(x^2), \quad y = \log(x^2 + 2), \quad y = e^{x^3 - 2x}\,, \quad y = 2^{2^x}\,, \quad y = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,,$$
$$y = \sin(\log x), \quad y = \sqrt{1 - \cos x}\,, \quad y = e^{\frac{1}{\sin x}}\,, \quad y = [x^2], \quad y = [\sqrt{x}],$$
$$y = (x^2 - 5x + 6)^{\sqrt{2}}\,, \quad y = \log(x^2 - 5x + 6), \quad y = \log(\log x),$$
$$y = \log(\sin x), \quad y = \log(1 - \cos x), \quad y = \tan(\sin x - \cos x).$$

3. Έστω ότι είναι $f(x) > 0$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$. Αν η $y = f(x)$ και η $y = g(x)$ είναι συνεχείς στον ξ, αποδείξτε ότι η $y = f(x)^{g(x)}$ είναι συνεχής στον ξ.

   (Υπόδειξη: Γράψτε $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$.)

   Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα.

   (i) $y = x^x$ στο $(0, +\infty)$.

   (ii) $y = (x^2 - 3)^{\frac{x-2}{x+2}}$ στο $(-\infty, -2) \cup (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

   (iii) $y = (2 - x^2)^{\log x}$ στο $(0, \sqrt{2})$.

   (iv) $y = (\log x)^{\log x}$ στο $(1, +\infty)$.

4. Υπολογίστε με κατάλληλες αλλαγές μεταβλητής τα παρακάτω όρια.
$$\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \quad \lim_{x \to -\infty} \cos\left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad \lim_{x \to 1} e^{(x-1)\sin \frac{1}{x-1}}\,.$$

   Σε ποια από αυτά τα όρια μπορεί να εφαρμοστεί η Πρόταση 4.12;

5. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο των Προτάσεων 5.5 και 5.6.

6. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα $[0, b)$ ώστε για κάθε x στο $[0, b)$ να ισχύει $\frac{1}{2} < \frac{\log(1+x)+\cos\sqrt{x}}{e^x+\sin\sqrt{x}} < \frac{3}{2}$.

7. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα (a, b) – μην ψάξετε για συγκεκριμένους αριθμούς – που περιέχει τον αριθμό 1 ώστε για κάθε x στο (a, b) να ισχύει $\frac{1}{2} < \frac{x^8-x^5+3}{4x^4-1} < \frac{3}{2}$ ΚΑΙ $\frac{1}{6} < \frac{e^x-2^x}{7x-3} < \frac{1}{4}$.

   (Υπόδειξη: Κατ΄ αρχάς δείτε ξεχωριστά τις δυο ανισότητες. Πώς θα προκύψει το (a, b) από τα δυο αντίστοιχα διαστήματα;)

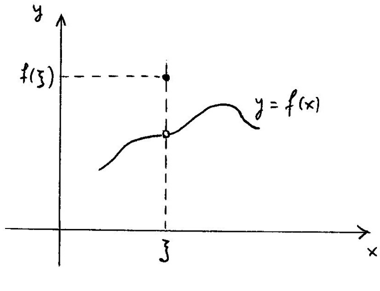
8. Σκεφτείτε το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 5.7.

5.3 Είδη ασυνεχειών.

Αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο συνέχειας** της συνάρτησης. Υπενθυμίζουμε ότι, αν ο ξ είναι σημείο συνέχειας της $y = f(x)$, τότε ο ξ ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Αν ο ξ *ανήκει* στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $y = f(x)$ και η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στον ξ, τότε λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας** της συνάρτησης ή ότι η συνάρτηση **έχει (ή παρουσιάζει) ασυνέχεια** στον ξ. Θα κατατάξουμε, τώρα, τα σημεία ασυνέχειας μιας συνάρτησης σε διάφορες κατηγορίες.

Κατηγορία 1. Έστω ότι *υπάρχει* το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ και είναι *αριθμός* $\neq f(\xi)$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο άρσιμης ασυνέχειας** της συνάρτησης ή ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **άρσιμη ασυνέχεια** στον ξ.



Σχήμα 5.4: Άρσιμη ασυνέχεια στον ξ.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της $y = f(x)$ στον ξ – και μόνο στον ξ – έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια νέα συνάρτηση η οποία να είναι συνεχής στον ξ. Πιο συγκεκριμένα, ας ορίσουμε τη συνάρτηση $y = g(x)$ με τύπο $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq \xi$ στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και $g(\xi) = \lim_{x\to\xi} f(x)$. Τότε η $y = g(x)$ έχει το ίδιο πεδίο ορισμού με την $y = f(x)$

και διαφέρει από την $y = f(x)$ μόνο στον ξ. Αν, τώρα, υπολογίσουμε το όριο της $y = g(x)$ στον ξ, βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} f(x) = g(\xi)$. (Η πρώτη ισότητα ισχύει διότι είναι $g(x) = f(x)$ για κάθε $x \neq \xi$ και η δεύτερη ισότητα ισχύει από τον ορισμό του $g(\xi)$.) Άρα η $y = g(x)$ είναι συνεχής στον ξ.

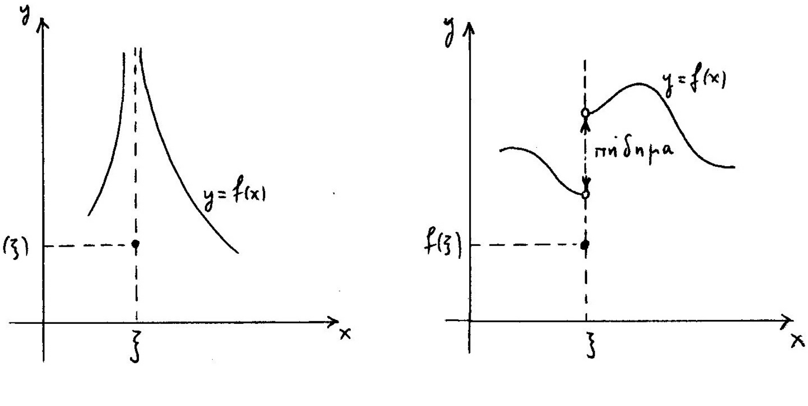
Παραδείγματα: (1) Η συνάρτηση $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x+1) = 1$ είναι αριθμός διαφορετικός από την τιμή $f(0) = 0$.

Στην περίπτωση αυτή, αν αλλάξουμε την τιμή της συνάρτησης στον 0 και την ορίσουμε να είναι ίση με το όριο στον 0, δηλαδή ίση με 1 (αντί 0), η συνάρτηση μετατρέπεται στη συνάρτηση $y = g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ δηλαδή στην $y = x + 1$, η οποία είναι συνεχής στον 0.

(2) Η συνάρτηση $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x > 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια στον 0, αφού το $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ είναι αριθμός $\neq f(0) = 1$.

Αν αλλάξουμε την τιμή της συνάρτησης στον 0 και την ορίσουμε να είναι ίση με το όριο στον 0, δηλαδή ίση με 0 (αντί 1), η συνάρτηση μετατρέπεται στην $y = g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases} = \sqrt{x}$ η οποία είναι συνεχής στον 0.

Κατηγορία 2. Έστω ότι (i) υπάρχει το $\lim_{x\to\xi} f(x)$ αλλά δεν είναι αριθμός,



Σχήμα 5.5: Ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ: όριο $= +\infty$ ή πήδημα.

δηλαδή είναι $+\infty$ ή $-\infty$, ή ότι (ii) υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ αλλά είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους** της συνάρτησης ή ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ασυνέχεια πρώτου είδους** στον ξ. Στην υποπερίπτωση (ii) η διαφορά $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x)$, η οποία είναι $\neq 0$, ονομάζεται **πήδημα** της $y = f(x)$ στον ξ.

Παραδείγματα: (1) Η $y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

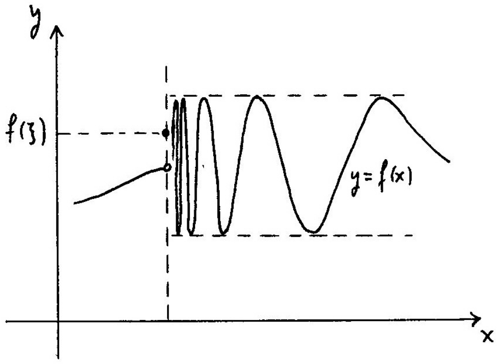
Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για την $y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{αν } x < 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

(2) Η $y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty$, οπότε $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$. Το πήδημα στον 0 είναι ίσο με $+\infty - (-\infty) = +\infty$.

(3) Η $y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \geq 0, \\ x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον 0, διότι $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ και $\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$, οπότε είναι $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$. Το πήδημα στον 0 είναι ίσο με $1 - 0 = 1$.

Στο παράδειγμα αυτό η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0 από τα δεξιά του αλλά όχι από τα αριστερά του, ενώ στο προηγούμενο παράδειγμα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στον 0 ούτε από τα δεξιά του ούτε από τα αριστερά του.

Κατηγορία 3. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, δηλαδή όταν δεν υπάρχει ένα του-



Σχήμα 5.6: Ασυνέχεια δεύτερου είδους στον ξ: δεν υπάρχει το όριο από δεξιά.

λάχιστον από τα $\lim_{x \to \xi+} f(x)$ και $\lim_{x \to \xi-} f(x)$, τότε λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο ασυνέχειας δεύτερου είδους** ή **σημείο ουσιώδους ασυνέχειας** της συνάρτησης ή ότι η συνάρτηση παρουσιάζει **ασυνέχεια δεύτερου είδους** ή **ουσιώδη ασυνέχεια** στον ξ.

Παραδείγματα: (1) Η $y = f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει το δεξιό πλευρικό όριο στον 0. Πράγματι, το $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t \to +\infty} \sin t$ δεν υπάρχει.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0 από τα αριστερά του, αφού $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} x = 0 = f(0)$.

(2) Η $y = f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στον 0, διότι δεν υπάρχει κανένα από τα πλευρικά όρια στον 0. Πράγματι, το $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to +\infty} \sin t$ δεν υπάρχει (όπως στο προηγούμενο παράδειγμα) και το $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to -\infty} \sin t$, επίσης, δεν υπάρχει.

Είναι φανερό ότι, αν ο ξ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου ή δεύτερου είδους της $y = f(x)$, τότε το σημείο αυτό δε μπορεί να μετατραπεί σε σημείο συνέχειας με απλή αλλαγή της τιμής $f(\xi)$ της συνάρτησης στον ξ. Αυτό γίνεται μόνο στην περίπτωση που ο ξ είναι σημείο άρσιμης ασυνέχειας.

Αξίζει να δούμε πιο προσεκτικά την περίπτωση που η $y = f(x)$ είναι *αύξουσα* σε κάποιο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$. Τότε η συνάρτηση είναι, προφανώς, αύξουσα στο υποδιάστημα (a, ξ) και άνω φραγμένη στο υποδιάστημα αυτό, αφού ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε x στο (a, ξ). Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, υπάρχει το πλευρικό όριο $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και είναι αριθμός και μάλιστα είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi)$. Ομοίως, η συνάρτηση είναι αύξουσα και κάτω φραγμένη στο υποδιάστημα (ξ, b), αφού ισχύει $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε x στο (ξ, b). Άρα υπάρχει το πλευρικό όριο $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι αριθμός $\geq f(\xi)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to\xi-} f(x)$ και $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ και είναι αριθμοί και ισχύει $\lim_{x\to\xi-} f(x) \leq f(\xi) \leq \lim_{x\to\xi+} f(x)$. Τώρα διακρίνουμε ακριβώς δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε αυτομάτως συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to\xi-} f(x) = f(\xi) = \lim_{x\to\xi+} f(x)$ και, επομένως, η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ. Στη δεύτερη περίπτωση είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) < \lim_{x\to\xi+} f(x)$, οπότε η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ με ***θετικό*** πήδημα $\lim_{x\to\xi+} f(x) - \lim_{x\to\xi-} f(x) > 0$.

Ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και όταν η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα στο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$· απλώς, τότε όλες οι προηγούμενες ανισότητες αλλάζουν φορά και βρίσκουμε ότι είναι $\lim_{x\to\xi-} f(x) \geq f(\xi) \geq \lim_{x\to\xi+} f(x)$.

Συνοψίζουμε:

Αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη στο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$, τότε η συνάρτηση είτε (i) είναι συνεχής στον ξ είτε (ii) παρουσιάζει ασυνέχεια πρώτου είδους στον ξ με θετικό πήδημα, αν είναι αύξουσα, και αρνητικό πήδημα, αν είναι φθίνουσα.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι μια συνάρτηση η οποία είναι μονότονη σε κάποιο διάστημα δεν παρουσιάζει άρσιμες ασυνέχειες ούτε ασυνέχειες δεύτερου είδους στα εσωτερικά σημεία του διαστήματος.

Ασκήσεις.

1. Χαρακτηρίστε το είδος ασυνέχειας που παρουσιάζει στον 0 καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις. Σε περίπτωση άρσιμης ασυνέχειας αλλάξτε την τιμή της συνάρτησης στον 0 ώστε αυτή να γίνει συνεχής στον 0. Σε περίπτωση

πηδήματος υπολογίστε την τιμή του.

$$y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & \text{αν } x \neq 0, \\ -1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x, & \text{αν } x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ 1, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

2. Χαρακτηρίστε τα σημεία ασυνέχειας των συναρτήσεων της άσκησης 4 της ενότητας 5.1.

3. Αποδείξτε ότι η $y = \log[x]$ είναι αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[1, +\infty)$ και υπολογίστε τα πηδήματά της σε όλα τα σημεία ασυνέχειάς της.

4. Αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη σε κάποιο διάστημα, αποδείξτε ότι σε οποιοδήποτε άκρο – στο οποίο είναι ορισμένη – του διαστήματος είτε (i) είναι συνεχής είτε (ii) παρουσιάζει άρσιμη ασυνέχεια.

5.4 Συνεχείς συναρτήσεις και ακολουθίες.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ. Έστω και μια ακολουθία (x_n) όλοι οι όροι της οποίας περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ και η οποία συγκλίνει στον ξ. Δηλαδή $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$. Τότε έχουμε την εξής «*αλυσιδωτή διαδικασία*»: αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος θετικός, τότε ο x_n θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά και, επομένως, αρκετά κοντά τον ξ, οπότε ο $f(x_n)$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά τον $f(\xi)$. Καταλήγουμε, επομένως, στο παρακάτω συμπέρασμα.

Πρόταση 5.8 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ και ότι όλοι οι όροι της (x_n) περιέχονται στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$.*

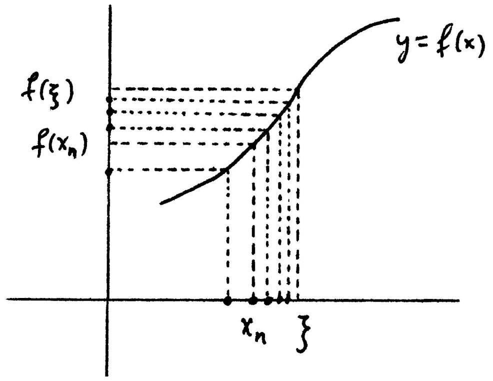
Απόδειξη: Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε, επειδή η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ που ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, υπάρχει φυσικός n_0 ώστε να είναι $|x_n - \xi| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα είναι $|f(x_n) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, είναι $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$.

Παραδείγματα: (1) Αν η $y = p(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση και αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} p(x_n) = p(\xi)$.

(2) Αν η $y = r(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, αν κανένας όρος της (x_n) ούτε ο ξ δεν μηδενίζει τον παρονομαστή της συνάρτησης και αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} r(x_n) = r(\xi)$.

(3) Αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \cos x_n = \cos\xi$ και $\lim_{n\to+\infty} \sin x_n = \sin\xi$.

(4) Αν όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί, ο ξ είναι θετικός και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^a = \xi^a$.



Σχήμα 5.7: $\lim x_n = \xi$ συνεπάγεται $\lim f(x_n) = f(\xi)$.

(5) Αν $a > 0$ και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} a^{x_n} = a^{\xi}$.

Ως ειδική περίπτωση, με $x_n = \frac{1}{n}$ για κάθε φυσικό n, βρίσκουμε το εξής πολύ χρήσιμο όριο ακολουθίας.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (a > 0).}$$

(6) Αν όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί, ο ξ είναι θετικός και $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$, τότε $\lim_{n\to+\infty} \log_a x_n = \log_a \xi$.

Οι δυο σχέσεις $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$ και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\xi)$ συνδυάζονται σε μια:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big).}$$

Φυσικά, δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι αυτή η «εναλλαγή» ανάμεσα στο σύμβολο $\lim_{n\to+\infty}$ του ορίου ακολουθίας και στο σύμβολο f της συνάρτησης ισχύει με την προϋπόθεση ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, δηλαδή στο όριο της ακολουθίας.

Η Πρόταση 5.8 – για ακολουθίες και συνεχείς συναρτήσεις – σχετίζεται με την Πρόταση 4.19 – για ακολουθίες και όρια συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι, ενώ στην Πρόταση 5.8 δε χρειάζεται να υποθέσουμε τίποτα για τους όρους της ακολουθίας (πέρα από το ότι ανήκουν στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης) στην Πρόταση 4.19 πρέπει να υποθέσουμε, επιπλέον, ότι όλοι οι όροι είναι $\neq \xi$.

Παράδειγμα: Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to+\infty} \sin\big(\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\big)$ υπολογίζουμε το $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = 0$ και χρησιμοποιούμε το ότι η $y = \sin x$ είναι συνεχής στον 0. Άρα $\lim_{n\to+\infty} \sin\big(\frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\big) = \sin\big(\lim_{n\to+\infty} \frac{1+(-1)^{n-1}}{n}\big) = \sin 0 = 0$.

Παρατηρήστε ότι δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.19, διότι είναι $\frac{1+(-1)^{n-1}}{n} = 0$ για άπειρους n.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών.

$$\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^8+4\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^5+7\Big), \quad \Big(e^{\frac{1+(-1)^n}{n}}\Big), \quad \Big(\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big), \quad \Big(\tan\frac{1}{2^n}\Big),$$

$$\Big(2^{\frac{3n^4+n-4}{n^4+n^3+4}}\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\Big)\Big), \; \Big(n\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big), \; \Big(\Big(\frac{n^2+3}{4n^2-3}\Big)^{\frac{3}{2}}\log\Big(\cos\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

5.5 Τα τρία βασικά θεωρήματα.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε – χωρίς να τις αποδείξουμε – τις τρεις πιο σημαντικές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.1 ***Θεώρημα Φραγμένης Συνάρτησης.*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Τότε η συνάρτηση είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό.*

Το γεωμετρικό περιεχόμενο του Θεωρήματος 5.1 είναι το εξής. Το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου και καθώς ο x διατρέχει το διάστημα $[a, b]$ από μικρότερες προς μεγαλύτερες τιμές το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά με αυξομειώσεις του ύψους του. Είναι φανερό από το σχήμα του γραφήματος – όποιο κι αν είναι αυτό – ότι το ύψος του σημείου $(x, f(x))$, δηλαδή ο $f(x)$, *δε μπορεί να γίνεται ούτε απεριόριστα μεγάλο θετικό ούτε απεριόριστα μεγάλο αρνητικό.*

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.1 ισχύει *γενικά* αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι, αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο, τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με τη συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παραδείγματα: (1) Η $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } -1 \le x < 0 \text{ ή } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στον 0 και δεν είναι φραγμένη στο $[-1, 1]$.

(2) Η $y = \begin{cases} x, & \text{αν } -1 \le x < 0 \text{ ή } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$, δεν είναι συνεχής στον 0 και είναι φραγμένη στο $[-1, 1]$.

(3) Η $y = \frac{1}{x(x-1)}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$ και δεν είναι φραγμένη στο $(0, 1)$.

(4) Η $y = x$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$ και είναι φραγμένη στο $(-1, 1)$.

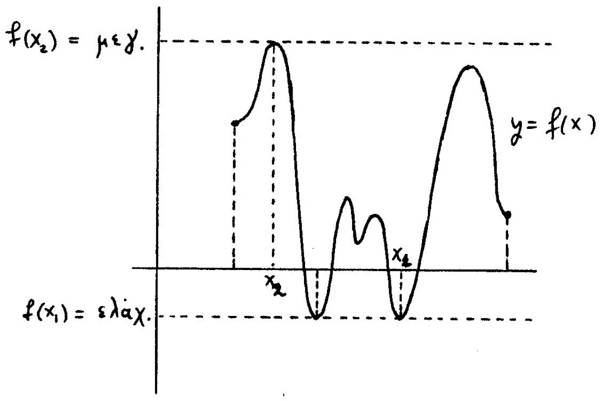
(5) Η $y = x$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και δεν είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$.

(6) Η $y = \frac{1}{x^2+1}$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και είναι φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$.

Θεώρημα 5.2 *Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής*. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$. Τότε υπάρχουν x_1, x_2 στο $[a, b]$ ώστε να ισχύει*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

για κάθε x στο $[a, b]$.



Σχήμα 5.8: Το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής.

Όπως παρατηρήσαμε και για το Θεώρημα 5.1, το γράφημα της συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ του επιπέδου. Είναι, επίσης, φανερό από το σχήμα του γραφήματος – όποιο κι αν είναι αυτό – ότι *υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του, $(x_1, f(x_1))$, με ελάχιστο ύψος, δηλαδή «πυθμένας», και τουλάχιστον ένα σημείο του, $(x_2, f(x_2))$, με μέγιστο ύψος, δηλαδή «κορυφή»*. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι υπάρχει κάποιος x_1 στον οποίο η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή και κάποιος x_2 στον οποίο η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή. Οι αριθμοί x_1, x_2 μπορεί να μην είναι μοναδικοί. Δηλαδή μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας x_1 στους οποίους η συνάρτηση έχει την (ίδια) ελάχιστη τιμή της και περισσότεροι από ένας x_2 στους οποίους η συνάρτηση έχει την (ίδια) μέγιστη τιμή της.

Το Θεώρημα 5.2 δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης των αριθμών x_1, x_2 στους οποίους η συνάρτηση έχει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της ούτε τρόπο εύρεσης της ελάχιστης και μέγιστης τιμής της. Για τέτοιους υπολογισμούς θα γνωρίσουμε διάφορες μεθόδους αργότερα στο πλαίσιο της έννοιας της *παραγώγου*.

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.2 ισχύει *γενικά* αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι, αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο, τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με τη συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παραδείγματα: (1) Η $y = \begin{cases} x+1\,, & \text{αν } -1 \leq x < 0, \\ 0\,, & \text{αν } x = 0, \\ x-1\,, & \text{αν } 0 < x \leq 1, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1,1]$, δεν είναι συνεχής στον 0 και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

(2) Η $y = \begin{cases} 0\,, & \text{αν } -1 \leq x < 0, \\ 1\,, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1,1]$, δεν είναι συνεχής στον 0 και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(3) Η $y = x$ είναι συνεχής στό διάστημα $(-1,1)$ και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

(4) Η $y = \begin{cases} x+2\,, & \text{αν } -2 < x < -1, \\ -x\,, & \text{αν } -1 \leq x \leq 1, \\ x-2\,, & \text{αν } 1 < x < 2, \end{cases}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-2,2)$ και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

(5) Η $y = x$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ και δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

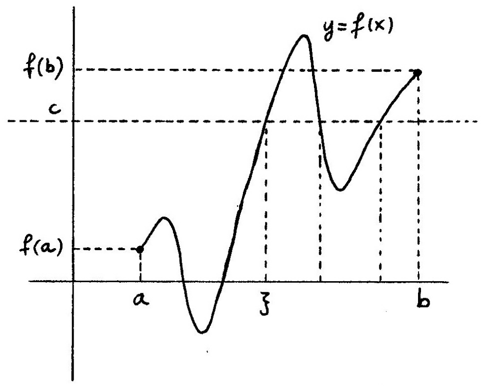
(6) Η $y = \begin{cases} \frac{1}{x}\,, & \text{αν } |x| > 1, \\ x\,, & \text{αν } |x| \leq 1, \end{cases}$ είναι συνεχής στο κλειστό αλλά όχι φραγμένο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ και έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Θεώρημα 5.3 Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a,b]$. Τότε κάθε αριθμός c, ο οποίος είναι ανάμεσα στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$, είναι τιμή της συνάρτησης. Δηλαδή για κάθε c με την ιδιότητα $f(a) \leq c \leq f(b)$ ή $f(b) \leq c \leq f(a)$ υπάρχει κάποιος ξ στο $[a,b]$ ώστε να είναι*

$$f(\xi) = c$$

ή, με άλλα λόγια, για κάθε τέτοιον c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει (τουλάχιστον μια) λύση ξ στο διάστημα $[a,b]$.

Αν $f(a) = f(b)$, τότε αναγκαστικά είναι $c = f(a) = f(b)$, οπότε η εξίσωση $f(x) = c$ έχει δυο προφανείς λύσεις· τις $\xi = a$ και $\xi = b$. Επίσης, αν $f(a) \neq f(b)$ και $c = f(a)$ ή $c = f(b)$, η εξίσωση $f(x) = c$ έχει μια προφανή λύση· την $\xi = a$ ή την $\xi = b$, αντιστοίχως. Επομένως, μόνο αν υποθέσουμε ότι $f(a) < c < f(b)$ ή $f(b) < c < f(a)$, δηλαδή ότι ο c είναι γνησίως ανάμεσα στους $f(a)$ και $f(b)$, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.3 αποκτά πραγματικό ενδιαφέρον. Φυσικά, σ' αυτήν την περίπτωση ούτε ο a ούτε ο b είναι λύση της $f(x) = c$, οπότε το συμπέρασμα είναι ότι υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στο *ανοικτό* διάστημα (a,b).



Σχήμα 5.9: Το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

Ας δούμε, όπως και στα προηγούμενα δυο θεωρήματα, το γεωμετρικό περιεχόμενο του Θεωρήματος 5.3. Η ευθεία $y = c$ είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα σε ύψος c από αυτόν. Τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ έχουν ύψη $f(a)$ και $f(b)$, αντιστοίχως, και, επομένως, βρίσκονται το ένα πάνω από την ευθεία $y = c$ και το άλλο κάτω από αυτήν. Άρα *το γράφημα της συνεχούς* $y = f(x)$*, το οποίο είναι καμπύλη η οποία ενώνει τα σημεία* $(a, f(a))$ *και* $(b, f(b))$*, αναγκαστικά θα έχει τουλάχιστον ένα σημείο κοινό με την ευθεία* $y = c$. Αν το κοινό αυτό σημείο είναι το (ξ, η), τότε $\eta = f(\xi)$ διότι το σημείο ανήκει στο γράφημα της συνάρτησης και, επίσης, $\eta = c$ διότι το σημείο ανήκει στην ευθεία $y = c$. Άρα $f(\xi) = c$.

Το Θεώρημα 5.3 δεν υποδεικνύει *πώς* λύνουμε την εξίσωση $f(x) = c$, δηλαδή πώς υπολογίζουμε τον ξ. Πρέπει, επίσης, να πούμε ότι ο αριθμός ξ μπορεί να μην είναι μοναδικός. Δηλαδή μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από ένας ξ στους οποίους η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή c.

Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 5.3 ισχύει *γενικά* αν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή ότι η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής ή αν το διάστημα δεν είναι κλειστό ή δεν είναι φραγμένο, τότε το συμπέρασμα, ανάλογα με τη συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, μπορεί να ισχύει αλλά μπορεί και να μην ισχύει.

Παραδείγματα: (1) Η $y = f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } 0 < x \leq 1, \\ 0\,, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0, 1]$, δεν είναι συνεχής στον 0 και ο αριθμός $\frac{1}{2}$ – όπως και κάθε αριθμός c γνησίως ανάμεσα στους $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$ – δεν είναι τιμή της συνάρτησης.

(2) Η $y = f(x) = \begin{cases} x\,, & \text{αν } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{αν } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$ είναι ορισμένη στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[0, 1]$, δεν είναι συνεχής στον $\frac{1}{2}$ και κάθε αριθμός c ανάμεσα στους $f(0) = 0$ και $f(1) = \frac{1}{2}$ είναι τιμή της συνάρτησης.

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Παραδείγματα: (1) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\cos x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Θεωρούμε την $y = \cos x - x$ στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και το διάστημα είναι κλειστό και φραγμένο. Οι τιμές στα άκρα είναι $\cos 0 - 0 = 1$ και $\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ και ο αριθμός 0 είναι ανάμεσα στις δυο αυτές τιμές. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε να ισχύει $\cos \xi - \xi = 0$ ή, ισοδύναμα, $\cos \xi = \xi$. Είναι, μάλιστα, φανερό ότι ο ξ ανήκει στο $(0, \frac{\pi}{2})$.

(2) Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x^3 - 5x^2 - 18x + 7 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση.

Τώρα, δε χρειάζεται να αποδείξουμε ότι υπάρχει λύση σε συγκεκριμένο διάστημα. Στην περίπτωση αυτή βρίσκουμε μόνοι μας δυο αριθμούς a και b με $a < b$ ώστε ο 0 να είναι ανάμεσα στις τιμές της συνάρτησης $y = x^3 - 5x^2 - 18x + 7$ στους αριθμούς a και b ή, με άλλα λόγια, οι αριθμοί $a^3 - 5a^2 - 18a + 7$ και $b^3 - 5b^2 - 18b + 7$ να είναι ετερόσημοι. Δοκιμάζουμε λίγο - πολύ στην τύχη: αν $a = 0$, τότε $a^3 - 5a^2 - 18a + 7 = 7$ ενώ, αν $b = 1$, τότε $b^3 - 5b^2 - 18b + 7 = -15$. Άρα υπάρχει αριθμός ξ στο διάστημα $(0, 1)$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = 0$.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε, όπως είδαμε, ελευθερία επιλογής του διαστήματος στο οποίο εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής. Θα δούμε, μάλιστα, ότι δεν είναι ανάγκη ούτε καν να θεωρήσουμε συγκεκριμένο διάστημα. Αυτό γίνεται ως εξής. Επειδή $\lim_{x \to -\infty}(x^3 - 5x^2 - 18x + 7) = -\infty$, υπάρχει κάποιος αριθμός a αρκετά μεγάλος αρνητικός (δεν είναι ανάγκη να δώσουμε συγκεκριμένη τιμή) ώστε να ισχύει $a^3 - 5a^2 - 18a + 7 < 0$. Επίσης, επειδή $\lim_{x \to +\infty}(x^3 - 5x^2 - 18x + 7) = +\infty$, υπάρχει κάποιος αριθμός b αρκετά μεγάλος θετικός ώστε να ισχύει $b^3 - 5b^2 - 18b + 7 > 0$. Επομένως, υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $[a, b]$ ώστε $\xi^3 - 5\xi^2 - 18\xi + 7 = 0$.

Το παράδειγμα αυτό θα γενικευτεί στην Πρόταση 5.13 που θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Θα δούμε τώρα δυο τυπικές εφαρμογές του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Πρόταση 5.9 ***Bolzano.*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Αν $f(a)f(b) < 0$, τότε υπάρχει ξ στο (a, b) ώστε $f(\xi) = 0$.*

Πράγματι, από την $f(a)f(b) < 0$ συνεπάγεται ότι $f(a) < 0 < f(b)$ ή $f(b) < 0 < f(a)$ και το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής.

Πρόταση 5.10 ***Ιδιότητα σταθερού προσήμου.*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου). Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο I, τότε είτε $f(x) > 0$ για κάθε x στο I είτε $f(x) < 0$ για κάθε x στο I.*

Μια από τις υποθέσεις λέει ότι η συνάρτηση δε μηδενίζεται πουθενά στο διάστημα I. Αν υποθέσουμε ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό, τότε πρέπει να υπάρχει κάποιος a στο I με $f(a) < 0$ και κάποιος b στο I με $f(b) > 0$. Επειδή το

I είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι το διάστημα $[a,b]$ ή $[b,a]$ με άκρα a και b είναι υποσύνολο του I και, επομένως, η $y=f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα αυτό. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[a,b]$ ή $[b,a]$ και, επομένως, στο I ώστε να είναι $f(\xi)=0$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα είτε θα είναι $f(x)>0$ για κάθε x στο I είτε θα είναι $f(x)<0$ για κάθε x στο I.

Το γεωμετρικό περιεχόμενο της ιδιότητας σταθερού προσήμου είναι ότι *αν μια καμπύλη δεν τέμνει τον x-άξονα, τότε είτε θα είναι ολόκληρη πάνω από τον x-άξονα είτε θα είναι ολόκληρη κάτω από τον x-άξονα.*

Ασκήσεις.

Α. Θεωρήματα Φραγμένης Συνάρτησης και Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής.

1. Έχουν οι παρακάτω συναρτήσεις μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0,1)$;

$$y=x^2\,,\quad y=x^2-x+1,\quad y=\sin(\pi x),\quad y=\cot(\pi x),\quad y=\sin(2\pi x).$$

2. Αποδείξτε ότι η $y=\sin\frac{1}{x}$ έχει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0,+\infty)$ και ότι παίρνει και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της σε άπειρα σημεία του διαστήματος αυτού. Ποια είναι αυτά τα σημεία;

   Αποδείξτε ότι οι $y=x\sin x$ και $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ δεν είναι ούτε άνω φραγμένες ούτε κάτω φραγμένες στο διάστημα $(0,+\infty)$.

   (Υπόδειξη: Δείτε τις ασκήσεις 6, 7 και 8 της ενότητας 3.10.)

3. Αποδείξτε ότι η $y=\frac{1}{1+x}\sin\frac{1}{x}$ είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη αλλά δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0,+\infty)$.

   (Υπόδειξη: Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης ανάμεσα στα γραφήματα των $y=\frac{1}{1+x}$ και $y=-\frac{1}{1+x}$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ όπως περιγράφεται στις ασκήσεις 6, 7 και 8 της ενότητας 3.10.)

4. Δυο (σημειακά) οχήματα κινούνται πάνω σε ένα επίπεδο από τη χρονική στιγμή $t=a$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t=b$ $(a<b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποια χρονική στιγμή ανάμεσα στις $t=a$ και $t=b$ κατά την οποία η απόσταση ανάμεσα στα δυο οχήματα γίνεται μέγιστη και κάποια χρονική στιγμή κατά την οποία η απόσταση ανάμεσά τους γίνεται ελάχιστη.

   Με ποια *φυσική* προϋπόθεση εργαστήκατε;

5. Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ισχύει $f(x)>l$ για κάθε x στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός $\rho>l$ ώστε να ισχύει $f(x)\geq\rho$ για κάθε x στο $[a,b]$.

   Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτού του αποτελέσματος;

6. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει *θετικός* αριθμός ρ ώστε να ισχύει $f(x) \geq g(x) + \rho$ για κάθε x στο $[a, b]$.

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $y = f(x) - g(x)$ στο $[a, b]$.)

   Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτού του αποτελέσματος;

B. Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής.

1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7 - 3x^6 + 5x^5 + 13x^4 - x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $[0, 1]$.

2. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δυο λύσεις.

3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = 0$ έχει ακριβώς μια λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, 3)$.

   (Υπόδειξη: Για τη μοναδικότητα της λύσης σε κάθε διάστημα, μελετήστε τη μονοτονία της συνάρτησης.)

4. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

5. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε x στο $[0, 1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[0, 1]$ ώστε να είναι $f(\xi) = \xi^2$.

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε την $y = f(x) - x^2$.)

6. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$. Αν $f(a) < g(a)$ και $f(b) > g(b)$, αποδείξτε ότι υπάρχει ξ στο (a, b) ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε την $y = f(x) - g(x)$.)

   Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτού του αποτελέσματος;

7. Δυο (σημειακά) οχήματα Μ και Ν κινούνται με τελείως αυθαίρετο τρόπο πάνω σε μια οριζόντια ευθεία. Τη χρονική στιγμή $t = a$ το Μ είναι δεξιότερα του Ν ενώ τη χρονική στιγμή $t = b$ το Ν είναι δεξιότερα του Μ. Αποδείξτε ότι σε κάποια ενδιάμεση χρονική στιγμή τα δυο οχήματα θα βρεθούν το ένα δίπλα στο άλλο.

   Με ποια *φυσική* προϋπόθεση εργαστήκατε;

8. $^{(*)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής και ένα-προς-ένα σε κάποιο διάστημα I. Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο I.

   (Υπόδειξη: Αν η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη, θα υπάρχουν x_1, x_2 και x_3 στο I με $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε να είναι είτε $f(x_1), f(x_3) < f(x_2)$ είτε $f(x_1), f(x_3) > f(x_2)$. Στην πρώτη περίπτωση θεωρήστε κάποιον c με την ιδιότητα $\max\{f(x_1), f(x_3)\} < c < f(x_2)$.)

9. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I. Αν $f(x) \neq g(x)$ για κάθε x στο I, αποδείξτε ότι είτε $f(x) < g(x)$ για κάθε x στο I είτε $f(x) > g(x)$ για κάθε x στο I.

   (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την ιδιότητα σταθερού προσήμου στην $y = f(x) - g(x)$.)

   (*) Έστω ότι, επιπλέον, και η $y = h(x)$ είναι συνεχής στο I. Αν για κάθε x στο I είναι $h(x) = f(x)$ ή $h(x) = g(x)$, αποδείξτε ότι είτε $h(x) = f(x)$ για κάθε x στο I είτε $h(x) = g(x)$ για κάθε x στο I.

   (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το προηγούμενο αποτέλεσμα στις $y = h(x)$ και $y = \frac{f(x)+g(x)}{2}$.)

   Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτού του αποτελέσματος;

10. (*) Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I και ότι είναι $g(x)^2 = f(x)^2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε x στο I. Αποδείξτε ότι είτε $g(x) = f(x)$ για κάθε x στο I είτε $g(x) = -f(x)$ για κάθε x στο I.

    (Υπόδειξη: Κατ΄ αρχάς παρατηρήστε ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε x στο I. *Πρώτος τρόπος:* Εφαρμόστε την ιδιότητα σταθερού προσήμου στις $y = f(x)$ και $y = g(x)$. *Δεύτερος τρόπος:* Εφαρμόστε την ιδιότητα σταθερού προσήμου στην $y = h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. *Τρίτος τρόπος:* Με άτοπο. *Τέταρτος τρόπος:* Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση.)

    Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτού του αποτελέσματος;

    Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο υποδιάστημα I του $[0, +\infty)$ ή του $(-\infty, 0]$ και ότι είναι $f(x)^2 = |x|$ για κάθε x στο I. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = \sqrt{|x|}$ για κάθε x στο I είτε $f(x) = -\sqrt{|x|}$ για κάθε x στο I.

    Πόσες συναρτήσεις $y = f(x)$ υπάρχουν συνεχείς στο $(-\infty, +\infty)$ που ικανοποιούν την ισότητα $f(x)^2 = x^2$ για κάθε x;

    Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο υποδιάστημα I του $[-1, 1]$ και ότι είναι $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε x στο I. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε x στο I είτε $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε x στο I.

11. (**) Γενικεύστε την άσκηση 9 ως εξής.

    Υποθέστε ότι οι $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $\ldots$, $y = f_n(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I και ότι σε κάθε x στο I έχουν n *διαφορετικές* τιμές. Τι συμπεραίνετε σχετικά με τη διάταξη μεγέθους αυτών των συναρτήσεων;

    Υποθέστε, επιπλέον, ότι και η $y = h(x)$ είναι συνεχής στο I και ότι σε κάθε x στο I η τιμή της είναι ίση με την τιμή (στον ίδιο x) μιας από τις n αρχικές συναρτήσεις ή, ισοδύναμα, ότι ισχύει $(h(x) - f_1(x)) \cdots (h(x) - f_n(x)) = 0$ για κάθε x στο I. Τι συμπεραίνετε για τη σχέση της $y = h(x)$ με τις $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $\ldots$, $y = f_n(x)$;

12. (*) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο υποδιάστημα I του $[1, +\infty)$ ή του $[0, 1]$ και ότι ικανοποιεί την ισότητα $(f(x)-x)(f(x)-x^2)(f(x)-x^3) =$

0 για κάθε x στο I. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = x$ για κάθε x στο I είτε $f(x) = x^2$ για κάθε x στο I είτε $f(x) = x^3$ για κάθε x στο I.

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση.)

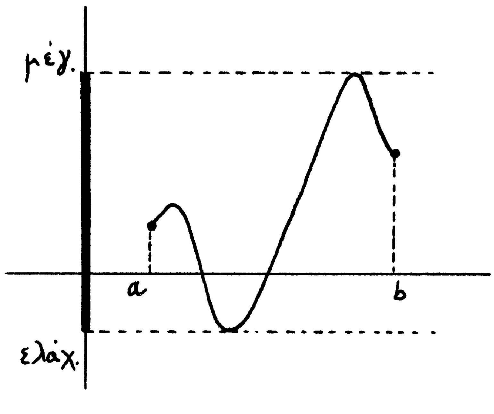
Αν $I = [0, +\infty)$, τότε – με τις ίδιες κατά τα άλλα υποθέσεις – ποιες είναι οι δυνατότητες για την $y = f(x)$;

5.6 Το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $y = f(x)$ αφού αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να απαντήσουμε σε ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, αν για κάποιον συγκεκριμένο c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει λύση ή όχι. Στην ενότητα αυτή θα δούμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις στις οποίες το πρόβλημα του προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης έχει απλή – τουλάχιστο θεωρητικά – λύση.

Πρόταση 5.11 *Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα I, τότε το σύνολο τιμών της (που αντιστοιχεί στο I) είναι το κλειστό και φραγμένο διάστημα με άκρα την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο I.*

Απόδειξη: Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχουν x_1, x_2 στο $[a, b]$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αν συμβολίσουμε $m_1 = f(x_1)$, $m_2 = f(x_2)$ την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε, προφανώς, κάθε τιμή της ανήκει στο διάστημα $[m_1, m_2]$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι υποσύνολο του διαστήματος $[m_1, m_2]$.



Σχήμα 5.10: Σύνολο τιμών = [ελάχιστη τιμή, μέγιστη τιμή].

Αντιστρόφως, ας πάρουμε οποιονδήποτε c στο διάστημα $[m_1, m_2]$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$, το οποίο είναι υποσύνολο του $[a, b]$. Επειδή η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$ και ο c είναι ανάμεσα στις τιμές $m_1 = f(x_1)$ και $m_2 = f(x_2)$, υπάρχει ξ ανάμεσα στους x_1 και x_2 και, επομένως, στο $[a, b]$ ώστε να είναι $c = f(\xi)$. Άρα κάθε c στο διάστημα $[m_1, m_2]$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης, οπότε το διάστημα $[m_1, m_2]$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της συνάρτησης.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι ακριβώς το διάστημα $[m_1, m_2]$.

Άρα για να βρούμε το σύνολο τιμών συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό και φραγμένο διάστημα αρκεί μόνο να υπολογίσουμε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό. Στο Κεφάλαιο 6 θα γνωρίσουμε, με τη βοήθεια των παραγώγων, μερικές μεθόδους υπολογισμού αυτών των τιμών της συνάρτησης. Πάντως, σε μερικές απλές περιπτώσεις οι υπολογισμοί αυτοί είναι και τώρα εφικτοί.

Παραδείγματα: (1) Η $y = x^2$ είναι αύξουσα στο $[1, 4]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα αυτό είναι ο $1^2 = 1$ και η μέγιστη τιμή της είναι ο $4^2 = 16$. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[1, 4]$ είναι το διάστημα $[1, 16]$.

(2) Η $y = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 3]$, οπότε η ελάχιστη τιμή της στο διάστημα αυτό είναι ο $\frac{1}{3}$ και η μέγιστη τιμή της είναι ο $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[\frac{1}{2}, 3]$ είναι το διάστημα $[\frac{1}{3}, 2]$.

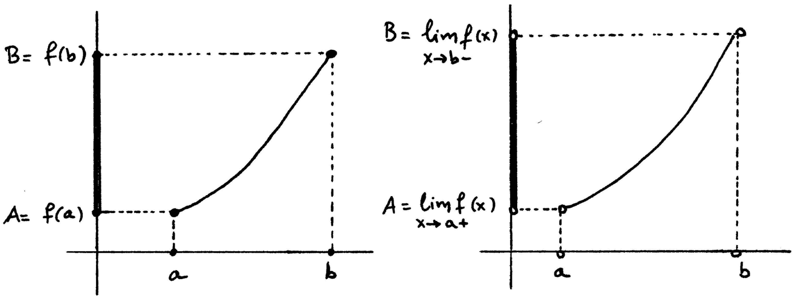
(3) Θεωρούμε την $y = x^2 - 6x + 5$ στο διάστημα $[-1, 6]$. Η συνάρτηση γράφεται $y = (x - 3)^2 - 4$, οπότε είναι φθίνουσα στο $[-1, 3]$ και αύξουσα στο $[3, 6]$. Άρα η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο $[-1, 6]$ είναι ο $3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$ και η μέγιστη τιμή της είναι ο μεγαλύτερος από τους $(-1)^2 - 6(-1) + 5 = 12$ και $6^2 - 6 \cdot 6 + 5 = 5$, δηλαδή ο 12. Άρα το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[-1, 6]$ είναι το $[-4, 12]$. Ειδικώτερα: το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[-1, 3]$ είναι το $[-4, 12]$ και το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[3, 6]$ είναι το $[-4, 5]$.

Μπορεί να δοθεί πλήρης περιγραφή του συνόλου τιμών συνάρτησης *συνεχούς σε διάστημα* οποιουδήποτε τύπου. Θα περιοριστούμε στη σημαντική ειδική περίπτωση συνάρτησης η οποία εκτός από συνεχής είναι *και γνησίως μονότονη σε διάστημα* οποιουδήποτε τύπου. Η περίπτωση αυτή είναι σημαντική διότι, με τις μεθόδους που θα γνωρίσουμε στο Κεφάλαιο 6, μπορούμε να χωρίσουμε τα πεδία ορισμού των περισσότερων συναρτήσεων που εμφανίζονται στην πράξη σε διαστήματα στα οποία αυτές είναι γνησίως μονότονες.

Πριν διατυπώσουμε την Πρόταση 5.12 ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, αν μια συνάρτηση είναι μονότονη σε διάστημα, τότε υπάρχουν τα πλευρικά όριά της και στα δυο άκρα του διαστήματος· το αριστερό πλευρικό όριο στο δεξιό άκρο και το δεξιό πλευρικό όριο στο αριστερό άκρο.

Πρόταση 5.12 (1) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = [a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $J = [A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$.*
(2) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο ανοικτό διάστημα I. Τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το ανοικτό διάστημα J με άκρα τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στα άκρα του I (με την ίδια διάταξη).*
(3) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο διάστημα I που περιέχει μόνο το ένα από τα δυο άκρα του. Τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα J με άκρα την τιμή της συνάρτησης στο άκρο που ανήκει στο I και το πλευρικό όριο της συνάρτησης στα άκρο που δεν ανήκει στο I (με την ίδια διάταξη).*

Τα συμπεράσματα των (1), (2) και (3) ισχύουν και στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα I. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα του διαστήματος J αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (1) πρέπει να είναι $J = [B, A]$ αντί $J = [A, B]$.



Σχήμα 5.11: Σύνολο τιμών γνησίως αύξουσας συνεχούς συνάρτησης.

Απόδειξη: (1) Απλή εφαρμογή της Πρότασης 5.11, διότι η μέγιστη τιμή της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ είναι ο $B = f(b)$ και η ελάχιστη τιμή της είναι ο $A = f(a)$.
(2) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο (a, b) και $\lim_{x \to a+} f(x) = A$ και $\lim_{x \to b-} f(x) = B$. Εννοείται ότι ο a μπορεί να είναι αριθμός ή $-\infty$ και ο b μπορεί να είναι αριθμός ή $+\infty$. Τα ίδια ισχύουν και για τους A και B, αντιστοίχως.

Έστω οποιοσδήποτε x στο (a, b). Θεωρούμε x' ώστε $a < x' < x$ και, επειδή για κάθε x'' που ικανοποιεί την $a < x'' < x' < x$ ισχύει $f(x'') < f(x') < f(x)$, συνεπάγεται ότι $A = \lim_{x'' \to a+} f(x'') \leq f(x')$ και, επομένως, $A < f(x)$. Κατόπιν, θεωρούμε x' ώστε $x < x' < b$ και, επειδή για κάθε x'' που ικανοποιεί την $x < x' < x'' < b$ ισχύει $f(x) < f(x') < f(x'')$, συνεπάγεται ότι $f(x') \leq \lim_{x'' \to b-} f(x'') = B$ και, επομένως, $f(x) < B$. Συμπεραίνουμε ότι κάθε τιμή της $y = f(x)$ ανήκει στο διάστημα (A, B), δηλαδή ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι υποσύνολο του (A, B).

Αντιστρόφως, έστω οποιοσδήποτε c στο διάστημα (A, B), δηλαδή $A < c < B$. Από την Πρόταση 4.16 συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < c$ κοντά στον a και $c < f(x)$ κοντά στον b. Άρα υπάρχει κάποιος a' στο (a, b) και κοντά στον a ώστε να είναι $f(a') < c$ και κάποιος b' στο (a, b) και κοντά στον b ώστε να είναι $c < f(b')$. Τώρα, η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a', b']$, οπότε, ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής, ο c είναι τιμή της $y = f(x)$ στο $[a', b']$ και, επομένως, στο (a, b). Άρα το διάστημα (A, B) είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της $y = f(x)$.

Άρα το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ είναι ίσο με το (A, B).
(3) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b)$ και $f(a) = A$ και $\lim_{x \to b-} f(x) = B$.

Αν ο x ανήκει στο $[a, b)$, δηλαδή $a \leq x < b$, αποδεικνύουμε όπως πριν ότι $A \leq f(x) < B$ και, επομένως, το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ είναι υποσύνολο του διαστήματος $[A, B)$.

Αντιστρόφως, αν ο c ανήκει στο $[A, B)$, δηλαδή $f(a) = A \leq c < B$, τότε βλέπουμε όπως πριν ότι υπάρχει κάποιος b' στο $[a, b)$ και κοντά στον b ώστε να είναι $c < f(b')$. Από την $f(a) \leq c < f(b')$ και το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι ο c είναι τιμή της συνάρτησης στο $[a, b']$ και, επομένως, στο $[a, b)$. Άρα το διάστημα $[A, B)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της $y = f(x)$.

Άρα το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ είναι ίσο με το $[A, B)$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια στην περίπτωση που η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(a, b]$. Τέλος, οι αλλαγές που πρέπει να γίνουν στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα είναι προφανείς.

Παραδείγματα: (1) Έστω η $y = 2x^2 + 1$ στο διάστημα $(1, 3)$. Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(1, 3)$ και $\lim_{x\to 1+}(2x^2 + 1) = 3$ και $\lim_{x\to 3-}(2x^2 + 1) = 19$. Επομένως, το σύνολο τιμών της $y = 2x^2 + 1$ που αντιστοιχεί στο διάστημα $(1, 3)$ είναι το διάστημα $(3, 19)$.

(2) Έστω η $y = \frac{x+1}{x-1}$ στο $(1, +\infty)$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $\lim_{x\to 1+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Άρα το σύνολο τιμών της $y = \frac{x+1}{x-1}$ που αντιστοιχεί στο $(1, +\infty)$ είναι το $(1, +\infty)$.

(3) Έστω η $y = \log \frac{1}{x}$ στο $[1, +\infty)$. Είναι $\log \frac{1}{1} = 0$ και $\lim_{x\to +\infty} \log \frac{1}{x} = -\infty$. Επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$, το σύνολο τιμών της που αντιστοιχεί στο $[1, +\infty)$ είναι το $(-\infty, 0]$.

(4) Έστω η $y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ στο $(-\infty, +\infty)$. Είναι $\lim_{x\to -\infty} \tanh x = -1$ και $\lim_{x\to +\infty} \tanh x = 1$ και, επειδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

(5) **Ύπαρξη n-οστής ρίζας**. Αν ο n είναι φυσικός τότε για κάθε $b \geq 0$ υπάρχει $a \geq 0$ ώστε $a^n = b$.

Η αιτιολόγηση είναι απλή. Η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$ και είναι $0^n = 0$ και $\lim_{x\to +\infty} x^n = +\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της $y = x^n$ που αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι το $[0, +\infty)$. Επομένως, κάθε $b \geq 0$ είναι τιμή της συνάρτησης στο $[0, +\infty)$, δηλαδή υπάρχει $a \geq 0$ ώστε $a^n = b$.

Στο παράδειγμα αυτό έγινε, ουσιαστικά, μια απόδειξη του Θεωρήματος 1.2, το οποίο δεν είχαμε αποδείξει στο Κεφάλαιο 1. Θα προσέξατε, όμως, ότι στην τωρινή απόδειξη χρησιμοποιήθηκε – εμμέσως – το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής το οποίο *δεν* έχουμε αποδείξει. Επομένως, *ούτε τώρα έχουμε αποδείξει το Θεώρημα 1.2!*

Τέλος, θα δούμε και τη σημαντική περίπτωση υπολογισμού του συνόλου τιμών πολυωνυμικής συνάρτησης, που δεν εμπίπτει στις προηγούμενες δυο προτάσεις.

Πρόταση 5.13 (1) *Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n-1}x^{2n-1}$ περιττού βαθμού (δηλαδή $a_{2n-1} \neq 0$). Το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.*
(2) *Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ άρτιου βαθμού (δηλαδή $a_{2n} \neq 0$). Αν $a_{2n} > 0$, τότε η συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, και το σύνολο τιμών της είναι το $[m, +\infty)$. Αν $a_{2n} < 0$, τότε η συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, έστω m, και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, m]$.*

Απόδειξη: (1) Έστω $a_{2n-1} > 0$, οπότε είναι $\lim_{x\to -\infty} p(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} p(x) = +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε c και από την Πρόταση 4.16 συνεπάγεται ότι ισχύει $p(x) < c$ κοντά στο $-\infty$ και $c < p(x)$ κοντά στο $+\infty$. Άρα υπάρχει κάποιος μεγάλος αρνητικός a και κάποιος μεγάλος θετικός b ώστε να είναι $p(a) < c < p(b)$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι ο c είναι τιμή της συνάρτησης. Άρα το $(-\infty, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της $y = p(x)$ και, επειδή το αντίστροφο είναι προφανές, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Αν $a_{2n-1} < 0$, τότε είναι $\lim_{x\to -\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} p(x) = -\infty$ και η απόδειξη μένει ουσιαστικά ίδια.
(2) Έστω $a_{2n} > 0$. Θεωρούμε οποιαδήποτε τιμή της $y = p(x)$, για παράδειγμα την $p(0) = a_0$. Επειδή είναι $\lim_{x\to -\infty} p(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to +\infty} p(x) = +\infty$, από την Πρόταση 4.16 συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος μεγάλος αρνητικός a ώστε να είναι $p(x) > a_0$ για κάθε x στο

$(-\infty, a)$ και κάποιος μεγάλος θετικός b ώστε να είναι $p(x) > a_0$ στο $(b, +\infty)$. Η $y = p(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, οπότε έχει ελάχιστη τιμή, έστω m, στο διάστημα αυτό. Μάλιστα, επειδή ο 0 ανήκει στο $[a, b]$, είναι $m \leq p(0) = a_0$ και, επομένως, είναι $m \leq p(x)$ για κάθε x στο $(-\infty, a)$ και κάθε x στο $(b, +\infty)$. Συμπεραίνουμε ότι ο m είναι η ελάχιστη τιμή της $y = p(x)$ σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και όχι μόνο στο $[a, b]$.

Είναι, λοιπόν, σαφές ότι το σύνολο τιμών της $y = p(x)$ είναι υποσύνολο του $[m, +\infty)$. Αντιστρόφως, έστω οποιοσδήποτε c στο $[m, +\infty)$, δηλαδή $m \leq c < +\infty$. Ο m είναι τιμή της $y = p(x)$, δηλαδή υπάρχει κάποιος x_0 ώστε να είναι $p(x_0) = m$. Από την Πρόταση 4.16, επειδή $c < \lim_{x \to +\infty} p(x)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος μεγάλος θετικός b' ώστε να είναι $c < p(b')$. Άρα ο c είναι ανάμεσα στις τιμές $p(x_0)$ και $p(b')$ της συνάρτησης, οπότε από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής ο c ανήκει στο σύνολο τιμών της. Άρα το $[m, +\infty)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών και συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $y = p(x)$ είναι το $[m, +\infty)$.

Αν $a_{2n} < 0$, η απόδειξη είναι παρόμοια.

Παραδείγματα: (1) Το σύνολο τιμών της $y = -2x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 + 7x - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ διότι είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού.

(2) Η $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$ γράφεται $y = x^2(x - 2)^2 - 7$. Άρα είναι $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7 \geq -7$ για κάθε x και, επιπλέον, ο -7 είναι τιμή της συνάρτησης για $x = 0$ και $x = 2$. Επομένως, ο -7 είναι η ελάχιστη τιμή της $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 7$ και, επειδή αυτή είναι πολυωνυμική συνάρτηση άρτιου βαθμού, το σύνολο τιμών της είναι το $[-7, +\infty)$.

Ας επαναλάβουμε ότι στο Κεφάλαιο 6 θα γνωρίσουμε μεθόδους υπολογισμού των ελάχιστων και των μέγιστων τιμών αρκετών συναρτήσεων.

Ασκήσεις.

1. Ποια είναι τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων;

   $$y = -2x^3 + x^2 - 5x + 6, \qquad y = x^4 - 2x^2 + 7, \qquad y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1.$$

2. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N$. Αν $a_0 a_N < 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει *θετικός* αριθμός ξ ώστε $p(\xi) = 0$.

3. Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα. Η γνήσια μονοτονία (αν ισχύει) των συναρτήσεων θα αποδειχθεί με στοιχειώδη, φυσικά, τρόπο.

   (i) $y = \sin x$ και $y = \cos(5x)$ στο $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

   (ii) $y = x + \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, -1]$, στο $[-1, 0)$, στο $(0, 1]$ και στο $[1, +\infty)$.

   (iii) $y = e^x + x$ και $y = \frac{1}{1+e^{2x}}$ στο $(-\infty, +\infty)$.

4. Αποδείξτε ότι η $y = \frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ και $(3, +\infty)$.

   Υπολογίστε το αντίστοιχο σύνολο τιμών της συνάρτησης για καθένα από τα διαστήματα αυτά.

   Πόσες ακριβώς λύσεις έχει η εξίσωση $\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{5}{x-3} = c$, όπου c είναι οποιοσδήποτε αριθμός;

(Υπόδειξη: Διακρίνατε περιπτώσεις: $c < 0$, $c > 0$ και $c = 0$.)

Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση Β3 της προηγούμενης ενότητας.

5.7 Αντίστροφες συναρτήσεις.

Γνωρίζουμε ότι, αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως μονότονη σε κάποιο διάστημα I, τότε αυτή είναι, προφανώς, ένα-προς-ένα στο I και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι, αν J είναι το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ που αντιστοιχεί στο διάστημα I, τότε η $x = f^{-1}(y)$ έχει πεδίο ορισμού το J και σύνολο τιμών το διάστημα I. Η Πρόταση 5.12 δίνει πλήρη και λεπτομερή περιγραφή του συνόλου τιμών της $y = f(x)$ στην περίπτωση που αυτή, εκτός από γνησίως μονότονη, είναι και *συνεχής* στο διάστημα I. Συγκεκριμένα: τότε το σύνολο τιμών J είναι κι αυτό *διάστημα* και, μάλιστα, ίδιου τύπου με το I. Η Πρόταση 5.14 που ακολουθεί συμπληρώνει την Πρόταση 5.12, αναφέροντας ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι κι αυτή *συνεχής* στο J.

Πρόταση 5.14 (1) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $I = [a, b]$. Τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $J = [A, B]$, όπου $A = f(a)$, $B = f(b)$. Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$.*
(2) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο ανοικτό διάστημα I. Τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το ανοικτό διάστημα J με άκρα τα πλευρικά όρια της συνάρτησης στα άκρα του I (με την ίδια διάταξη). Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J με σύνολο τιμών το I.*
(3) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο διάστημα I που περιέχει μόνο το ένα από τα δυο άκρα του. Τότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα J με άκρα την τιμή της συνάρτησης στο άκρο που ανήκει στο I και το πλευρικό όριο της συνάρτησης στα άκρο που δεν ανήκει στο I (με την ίδια διάταξη). Επίσης, η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο J με σύνολο τιμών το I.*

Τα συμπεράσματα των (1), (2) και (3) ισχύουν και στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα I. Η μόνη διαφορά είναι ότι τα άκρα του διαστήματος J αλλάζουν διάταξη. Για παράδειγμα, στην περίπτωση (1) πρέπει να είναι $J = [B, A]$ αντί $J = [A, B]$.

Απόδειξη: (1) Γνωρίζουμε από την Πρόταση 5.12 ότι το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ είναι το $[A, B]$ με $A = f(a)$ και $B = f(b)$ και, επομένως, ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[A, B]$ με σύνολο τιμών το $[a, b]$. Μένει να αποδείξουμε ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι συνεχής σε κάθε η στο $[A, B]$.

Έστω οποιοσδήποτε η στο $[A, B]$ και ο αντίστοιχος $\xi = f^{-1}(\eta)$. Αν $A < \eta < B$, παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θεωρούμε x_1, x_2 στο $[a, b]$ ώστε να είναι $\xi - \epsilon \leq x_1 < \xi < x_2 \leq \xi + \epsilon$. Ορίζουμε τους $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ στο $[A, B]$, οπότε είναι $y_1 < \eta < y_2$. Ορίζουμε και $\delta = \min\{\eta - y_1, y_2 - \eta\}$. Τότε για κάθε y που ικανοποιεί την $|y - \eta| < \delta$ συνεπάγεται ότι $y_1 \leq \eta - \delta < y < \eta + \delta \leq y_2$, οπότε $\xi - \epsilon \leq x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq \xi + \epsilon$ και, επομένως, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(\eta)| = |f^{-1}(y) - \xi| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι συνεχής στον η.

Αν $\eta = A$, οπότε $\xi = f^{-1}(\eta) = a$, παίρνουμε πάλι οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και θεωρούμε x_2 στο $[a, b]$ ώστε να είναι $a < x_2 \leq a + \epsilon$. Ορίζουμε τον $y_2 = f(x_2)$ στο $[A, B]$, οπότε είναι

$A < y_2$. Ορίζουμε και $\delta = y_2 - A$. Τότε για κάθε y που ικανοποιεί την $A \leq y < A + \delta = y_2$ συνεπάγεται $a = f^{-1}(A) \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 \leq a+\epsilon$ και, επομένως, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(A)| = |f^{-1}(y) - a| < \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι συνεχής στον $\eta = A$.

Αν $\eta = B$, με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι συνεχής στον η. Άρα η $x = f^{-1}(y)$ είναι συνεχής στο $[A, B]$.

(2) – (3) Όπως στο (1), αποδεικνύουμε τη συνέχεια της $x = f^{-1}(y)$ σε κάθε σημείο η του διαστήματος J επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους του (1).

Παραδείγματα: (1) Με στοιχειώδη τρόπο αποδεικνύεται ότι η $y = x^3 + x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$.

Επειδή είναι $\lim_{x\to-\infty}(x^3 + x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}(x^3 + x) = +\infty$, συνεπάγεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$ – αυτό το γνωρίζαμε διότι η $y = x^3 + x$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση περιττού βαθμού. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.

Παρατηρήστε ότι δεν είναι ανάγκη να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης για να δούμε αν είναι συνεχής.

(2) Η $y = -xe^x + 1$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Επειδή είναι $-0e^0 + 1 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty}(-xe^x + 1) = -\infty$, το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 1]$ και η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν είναι ανάγκη να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης για να δούμε αν είναι συνεχής. Μάλιστα, τώρα είναι αδύνατο να βρεθεί ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης, αφού δε λύνεται η εξίσωση $-xe^x + 1 = y$ με άγνωστο τον x.

Ιδού και μερικά πιο σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) **Η λογαριθμική συνάρτηση**. Η $y = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$.

Επειδή είναι $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών είναι το $(0, +\infty)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή αυτή που έχουμε ήδη συμβολίσει $x = \log y$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η $x = \log y$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$. Είναι, όμως, ενδιαφέρον ότι *η συνέχεια της $x = \log y$ προκύπτει και ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.14.* Επίσης, ήδη γνωρίζουμε τα όρια $\lim_{y\to0+}\log y = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty}\log y = +\infty$. Κι αυτά, όμως, προκύπτουν ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.14. Πράγματι, επειδή η $x = \log y$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα πλευρικά όρια $\lim_{y\to0+}\log y$ και $\lim_{y\to+\infty}\log y$. Επειδή, όμως, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$, προκύπτει ότι $\lim_{y\to0+}\log y = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty}\log y = +\infty$.

(2) **Οι n-οστές ρίζες**. (i) Έστω περιττός φυσικός n. Η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$.

Επειδή είναι $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση, την οποία έχουμε ήδη συμβολίσει

$x = \sqrt[n]{y}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Και πάλι, όμως, *η συνέχεια της $x = \sqrt[n]{y}$ προκύπτει ως άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.14.* Επίσης, επειδή η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τα πλευρικά όρια $\lim_{y\to-\infty} \sqrt[n]{y}$ και $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y}$. Επειδή, όμως, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$, αμέσως προκύπτει ότι $\lim_{y\to-\infty} \sqrt[n]{y} = -\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y} = +\infty$.

(ii) Έστω άρτιος φυσικός n. Η $y = x^n$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Επειδή είναι $0^n = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$ και η αντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή η $x = \sqrt[n]{y}$, είναι γνησίως αύξουσα και *συνεχής* με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. Επίσης, επειδή η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα με άκρα τον $\sqrt[n]{0} = 0$ και το όριο $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y}$. Επειδή, όμως, το σύνολο τιμών είναι το $[0, +\infty)$, αμέσως προκύπτει ότι $\lim_{y\to+\infty} \sqrt[n]{y} = +\infty$.

(3) **Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις**. Έχουμε ήδη ορίσει τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, δηλαδή το τόξο-συνημίτονο, το τόξο-ημίτονο, την τόξο-εφαπτόμενη και την τόξο-συνεφαπτόμενη. Γνωρίζουμε, επίσης, τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους καθώς και τη μονοτονία τους. Το ουσιαστικά νέο που προκύπτει ως συνέπεια της Πρότασης 5.14 είναι η συνέχεια αυτών των συναρτήσεων.

(i) Η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $[0, \pi]$. Επειδή $\cos 0 = 1$ και $\cos\pi = -1$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[0, \pi]$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$. Ορίζεται, λοιπόν, η αντίστροφη συνάρτηση τόξο-συνημίτονο, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arccos y$ και είναι **συνεχής** και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

(ii) Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Επειδή $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ και $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι το διάστημα $[-1, 1]$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο-ημίτονο, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arcsin y$ και είναι **συνεχής** και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(iii) Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Επειδή $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$ και $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x = +\infty$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο-εφαπτόμενη, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \arctan y$ και είναι **συνεχής** και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Βρίσκουμε, επίσης, τα όρια: $\lim_{y\to-\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{y\to+\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Η $y = \cot x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(0, \pi)$. Επειδή $\lim_{x\to0+} \cot x = +\infty$ και $\lim_{x\to\pi-} \cot x = -\infty$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(0, \pi)$ είναι το διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Ορίζεται, λοιπόν, η αντίστροφη συνάρτηση τόξο-συνεφαπτόμενη, την οποία έχουμε συμβολίσει $x = \mathrm{arccot}\, y$ και είναι **συνεχής** και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, \pi)$. Επίσης: $\lim_{y\to-\infty} \mathrm{arccot}\, y = \pi$ και $\lim_{y\to+\infty} \mathrm{arccot}\, y = 0$.

(4) **Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις**. Οι αντίστροφες υπερβο-

λικές συναρτήσεις, δηλαδή το τόξο-υπερβολικό συνημίτονο και το τόξο-υπερβολικό ημίτονο, έχουν ήδη οριστεί και έχουμε βρει τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους καθώς και τη μονοτονία τους. Παρακάτω θα ορίσουμε και τις δυο άλλες αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις, την τόξο-υπερβολική εφαπτόμενη και την τόξο-υπερβολική συνεφαπτόμενη. Αυτό που θα προκύψει τώρα ως συνέπεια της Πρότασης 5.14 είναι η συνέχεια όλων αυτών των συναρτήσεων. Προκύπτει, επίσης, ένας λιγότερο στοιχειώδης αλλά απλούστερος τρόπος υπολογισμού των συνόλων τιμών των τεσσάρων υπερβολικών συναρτήσεων.
(i) Η $y = \cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[0, +\infty)$. Επειδή $\cosh 0 = 1$ και $\lim_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $[0, +\infty)$ είναι το $[1, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο-υπερβολικό συνημίτονο, που την έχουμε συμβολίσει $x = \text{arccosh}\ y$, και είναι **συνεχής** και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $[1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.
(ii) Η $y = \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \sinh x = +\infty$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, +\infty)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση τόξο-υπερβολικό ημίτονο, που την έχουμε συμβολίσει $x = \text{arcsinh}\ y$, και είναι **συνεχής** και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.

Η αλήθεια είναι ότι από τους τύπους $x = \text{arccosh}\ y = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ και $x = \text{arcsinh}\ y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ προκύπτει με δεύτερο τρόπο η συνέχεια των δυο αντίστροφων υπερβολικών συναρτήσεων.

Μέχρι τώρα η μόνη αναφορά που έχουμε κάνει για τις επόμενες δυο συναρτήσεις είναι στις ασκήσεις της ενότητας 3.11.
(iii) Η $y = \tanh x = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} \tanh x = -1$ και $\lim_{x\to+\infty} \tanh x = 1$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, +\infty)$ είναι το $(-1, 1)$. Άρα ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-υπερβολική εφαπτόμενη**, που τη συμβολίζουμε $x = \text{arctanh}\ y$, και είναι **συνεχής** και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της $(-1, 1)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$.
(iv) Η $y = \coth x = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to0+} \coth x = +\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} \coth x = 1$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$ είναι το $(1, +\infty)$.

Ομοίως, η $y = \coth x$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(-\infty, 0)$. Επειδή $\lim_{x\to-\infty} \coth x = -1$ και $\lim_{x\to0-} \coth x = -\infty$, το σύνολο τιμών που αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$ είναι το $(-\infty, -1)$.

Άρα η $y = \coth x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι ένα-προς-ένα και έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Επομένως, ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση **τόξο-υπερβολική συνεφαπτόμενη**, που τη συμβολίζουμε $x = \text{arccoth}\ y$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Η $x = \text{arccoth}\ y$ είναι **συνεχής** στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Ειδικότερα, η $x = \text{arccoth}\ y$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1)$ του πεδίου ορισμού της με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Προσέξτε: η $x = \operatorname{arccoth} y$ *δεν* είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ παρά το ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(-\infty,-1)$ και $(1,+\infty)$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες, βρείτε τα αντίστοιχα σύνολα τιμών και βγάλτε συμπεράσματα για τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις. Τέλος, βρείτε τους τύπους των αντίστροφων συναρτήσεων και ελέγξτε τα προηγούμενα συμπεράσματά σας.

   (i) Η $y = x^2 + 2x$ στο $[0,1]$.

   (ii) Η $y = \frac{1}{x}$ στο $(0,1]$.

   (iii) Η $y = \frac{1}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$.

2. Αποδείξτε ότι

   (i) $\operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$ για κάθε y στο $(-1,1)$.

   (ii) $\operatorname{arccoth} y = \frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1}$ για κάθε y στο $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

   Παρατηρήστε ότι οι δυο συναρτήσεις $x = \operatorname{arctanh} y$ και $x = \operatorname{arccoth} y$ σχηματίζουν *μία* συνάρτηση με τύπο

   $$x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{y+1}{y-1}\right|$$

   με πεδίο ορισμού το $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$. Σχεδιάστε το γράφημά της και βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.

3. (*) Έστω η $y = f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

   Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty,+\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$. Αποδείξτε ότι είναι $f^{-1}(y) - \frac{1}{f^{-1}(y)} = 2y$ για κάθε y στο $(-\infty,+\infty)$.

   Αν για κάποια συνάρτηση $x = h(y)$ συνεχή στο $(-\infty,+\infty)$, με μια τουλάχιστον *θετική* τιμή, ισχύει $h(y) - \frac{1}{h(y)} = 2y$ για κάθε y στο $(-\infty,+\infty)$, αποδείξτε ότι $h(y) = f^{-1}(y)$ για κάθε y στο $(-\infty,+\infty)$.

   Να επαναλάβετε τα προηγούμενα θεωρώντας την $y = f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty,0)$.

   Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

4. (*) Έστω η $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

   Αποδείξτε ότι ισχύει $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ για κάθε x στο $(0,+\infty)$ και, επομένως, η συνάρτηση δεν είναι ένα-προς-ένα.

   Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, ότι το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $x = g_1(y)$ με πεδίο ορισμού το $[1,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $[1,+\infty)$.

Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, ότι το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι το $[1, +\infty)$ και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $x = g_2(y)$ με πεδίο ορισμού το $[1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, 1]$.

Αποδείξτε ότι $g_1(y) + \frac{1}{g_1(y)} = 2y = g_2(y) + \frac{1}{g_2(y)}$ για κάθε y στο $[1, +\infty)$.

Αν για κάποια συνάρτηση $x = h(y)$ συνεχή στο $[1, +\infty)$ ισχύει $h(y) + \frac{1}{h(y)} = 2y$ για κάθε y στο $[1, +\infty)$, αποδείξτε ότι είτε $h(y) = g_1(y)$ για κάθε y στο $[1, +\infty)$ είτε $h(y) = g_2(y)$ για κάθε y στο $[1, +\infty)$.

Να επαναλάβετε τα προηγούμενα θεωρώντας την $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0)$.

Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

5. $^{(*)}$ Έστω η $y = f(x) = x^3 - 3x$.

Αποδείξτε με στοιχειώδη τρόπο ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Βρείτε τα σύνολα τιμών των περιορισμών $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ και $y = f_3(x)$ της $y = f(x)$ σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ και $[1, +\infty)$, αντιστοίχως.

Τι γνωρίζουμε για τις $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ και $y = f_3(x)$ σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια;

Αν $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ και $x = g_3(y)$ είναι οι αντίστροφες των $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ και $y = f_3(x)$, αντιστοίχως, τι γνωρίζουμε γι αυτές σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια;

Αποδείξτε ότι, αν $x = g(y)$ είναι οποιαδήποτε από τις $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ και $x = g_3(y)$, τότε είναι $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της.

Έστω οποιοδήποτε διάστημα I και $x = g(y)$ συνεχής στο I με την ιδιότητα: $g(y)^3 - 3g(y) = y$ για κάθε y στο I. Αν $I = [-2, +\infty)$, αποδείξτε ότι η $x = g(y)$ ταυτίζεται με την $x = g_3(y)$. Αν $I = (-\infty, 2]$, αποδείξτε ότι η $x = g(y)$ ταυτίζεται με την $x = g_1(y)$. Αν, όμως, $I = [-2, 2]$, αποδείξτε ότι η $x = g(y)$ ταυτίζεται στο I είτε με την $x = g_1(y)$ είτε με την $x = g_2(y)$ είτε με την $x = g_3(y)$.

Είναι οι $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ και $x = g_3(y)$ αλγεβρικές συναρτήσεις;

Σχεδιάστε τα γραφήματα όλων των συναρτήσεων της άσκησης.

Κεφάλαιο 6

Παράγωγοι.

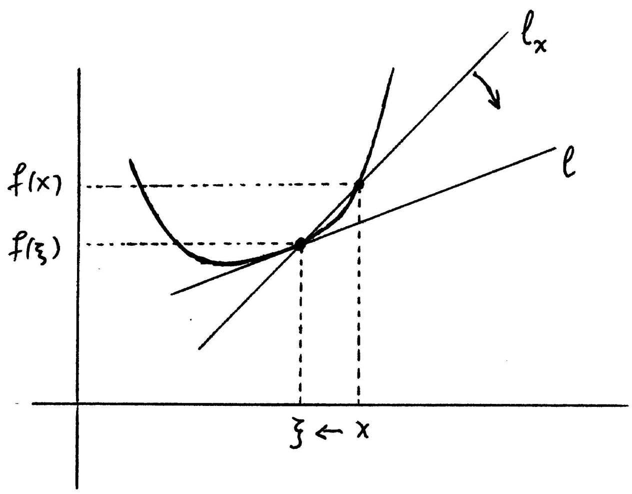
Εφαπτόμενη ευθεία και στιγμιαία ταχύτητα. Παράγωγος συνάρτησης. Οι παράγωγοι των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας και της κάθετης ευθείας στο γράφημα συνάρτησης. Παραγωγισιμότητα και συνέχεια. Παράγωγοι και αλγεβρικές πράξεις. Ο κανόνας της αλυσίδας. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης, οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Οι παράγωγοι της λογαριθμικής και της εκθετικής συνάρτησης και της δύναμης με άρρητο εκθέτη. Εφαπτόμενες ευθείες σε γενικότερες καμπύλες στο επίπεδο και στον χώρο. Τοπικά ακρότατα και το Θεώρημα του Fermat, το Θεώρημα του Rolle και τα Θεωρήματα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (του Lagrange και του Cauchy). Εφαρμογές της παραγώγου: μελέτη μονοτονίας και εύρεση τοπικών ακροτάτων, αποδείξεις ισοτήτων και ανισοτήτων. Παράγωγοι ανώτερης τάξης. Εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου: εύρεση τοπικών ακροτάτων, κυρτές και κοίλες συναρτήσεις, σημεία καμπής, ευθείες στήριξης γραφήματος, αποδείξεις ανισοτήτων. Οι Κανόνες του l' Hopitâl. Ιεράρχηση συναρτήσεων κατά τάξη μεγέθους – ειδικώτερα: πολυωνυμική, λογαριθμική και εκθετική τάξη μεγέθους. Ασυμπτωτική ισότητα συναρτήσεων.

6.1 Ένα γεωμετρικό και ένα φυσικό πρόβλημα.

Α. Εφαπτόμενη ευθεία.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια καμπύλη στο επίπεδο και ένα σημείο πάνω της και ότι θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο αυτό και εφάπτεται (στο ίδιο σημείο) στην καμπύλη. Περιορίζοντας λίγο το πρόβλημα – θα δούμε τη γενική περίπτωση λίγο αργότερα – ας δεχτούμε ότι η καμπύλη είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ ορισμένης σε κάποιο διάστημα (a, b) και ότι το σημείο που μας ενδιαφέρει είναι το $(\xi, f(\xi))$ για κάποιον ξ στο (a, b). Γνωρίζουμε ότι η εφαπτόμενη ευθεία – ας την ονομάσουμε l – περιέχει το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και για να την προσδιορίσουμε πρέπει να βρούμε είτε ένα ακόμη σημείο της είτε την κλίση της. Θεωρούμε τώρα ένα δεύτερο *μεταβλητό* σημείο $(x, f(x))$ της καμπύλης με $x \neq \xi$. Όταν ο x μεταβάλλεται πλησιάζοντας αρκετά κοντά τον ξ η αντίστοιχη *μεταβλητή* ευθεία – ας την ονομάσουμε l_x – η οποία διέρχεται από τα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(x, f(x))$, περιστρέφεται γύρω από το σταθερό της σημείο $(\xi, f(\xi))$ ακολουθώντας την κίνηση του μεταβλητού σημείου $(x, f(x))$ και *τείνει να ταυτιστεί με την εφαπτόμενη ευθεία* l. Επομένως, *η κλίση της μεταβλητής ευθείας* l_x *πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά την κλίση της σταθερής ευθείας* l. Όμως, η κλίση της l_x είναι ίση με τον λόγο

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \,.$$



Σχήμα 6.1: Η l_x στρέφεται και τείνει να ταυτιστεί με την l.

Άρα

$$\boxed{\text{κλίση της } l = \lim_{x\to\xi} \text{κλίση της } l_x = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \,.}$$

Β. Στιγμιαία ταχύτητα.

Ας υποθέσουμε ότι ένα όχημα κινείται πάνω σε έναν ευθύ δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα. Η ταχύτητα δεν είναι γνωστή – το ταχύμετρο είναι χαλασμένο – αλλά το ρολόι δουλεύει καθώς και ο δείκτης χιλιομετρικών αποστάσεων. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του οχήματος σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Αν μετρήσουμε τις αποστάσεις $s(t_1)$ και $s(t_2)$ του οχήματος από κάποιο σταθερό σημείο της ευθείας σε δυο χρονικές στιγμές t_1 και t_2, τότε η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις δυο αυτές χρονικές στιγμές είναι ίση με

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

Ποια είναι, όμως, η στιγμιαία ταχύτητα σε μια χρονική στιγμή τ; Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα του οχήματος δεν παρουσιάζει απότομες αλλαγές σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα, οπότε η στιγμιαία ταχύτητα τη στιγμή τ μπορεί να προσεγγιστεί από τη μέση ταχύτητα ανάμεσα στη στιγμή τ και σε μια πολύ κοντινή χρονική στιγμή t. Με άλλα λόγια, *η μέση ταχύτητα ανάμεσα στις χρονικές στιγμές τ και t πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά τη στιγμιαία ταχύτητα τη χρονική στιγμή τ όταν ο t πλησιάζει αρκετά κοντά τον τ.* Δηλαδή,

$$\boxed{\text{στιγμιαία ταχύτητα την χρονική στιγμή } \tau = \lim_{t \to \tau} \frac{s(t) - s(\tau)}{t - \tau} .}$$

Ασκήσεις.

1. Γράψτε σε μορφή ορίου

   (i) τη (στιγμιαία) επιτάχυνση οχήματος που κινείται σε ευθύ δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

   (ii) τη (στιγμιαία) ταχύτητα και τη (στιγμιαία) γωνιακή ταχύτητα ενός οχήματος που κινείται σε κυκλικό δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα και βρείτε τη σχέση ανάμεσα στις δυο αυτές ταχύτητες.

6.2 Παράγωγος.

Δεν είναι *σύμπτωση* η ομοιότητα ανάμεσα στον τύπο της κλίσης της εφαπτόμενης ευθείας και στον τύπο της στιγμιαίας ταχύτητας. Τα προβλήματα είναι, φυσικά, διαφορετικά αλλά η έννοια η οποία κρύβεται πίσω από αυτά είναι κοινή: **ρυθμός μεταβολής** – του ύψους $f(x)$ ως προς την οριζόντια μετατόπιση x στο πρώτο πρόβλημα και της απόστασης $s(t)$ ως προς τον χρόνο t στο δεύτερο πρόβλημα. Το πρόβλημα του υπολογισμού του ρυθμού μεταβολής μιας εξαρτημένης μεταβλητής ποσότητας ως προς μια ανεξάρτητη μεταβλητή ποσότητα καταλήγει πάντοτε σε ένα ανάλογο τύπο. Δίνουμε, λοιπόν, τον εξής ορισμό.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στον ξ και τουλάχιστον σε ένα διάστημα αριστερά ή δεξιά του ξ, δηλαδή είτε σε κάποιο διάστημα (a, b), όπου $a < \xi < b$, είτε σε κάποιο $(a, \xi]$ και σε κανένα σημείο κάποιου (ξ, b) είτε σε κάποιο $[\xi, b)$ και σε κανένα σημείο κάποιου (a, ξ). Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε λέμε ότι η $y = f(x)$ **έχει παράγωγο στον** ξ, το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος στον** ξ της $y = f(x)$ και το συμβολίζουμε

$$\boxed{f'(\xi) \quad \text{ή} \quad Df(\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{d\,f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \frac{d\,y}{dx}\Big|_{x=\xi} \quad = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} .}$$

Αν η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι αριθμός και όχι $\pm\infty$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη στον** ξ.

Αν η $y = f(x)$ έχει παράγωγο ή είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ξ στο πεδίο ορισμού της, τότε λέμε ότι **έχει παράγωγο στο πεδίο ορισμού της** ή ότι **είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της**, αντιστοίχως.

Παραδείγματα: (1) Η $y = x^2$ είναι παραγωγίσιμη στον 1 με παράγωγο στον 1 ίση με $\frac{d\,y}{dx}\big|_{x=1} = \frac{d\,x^2}{dx}\big|_{x=1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$.

(2) Η $y = \sqrt[3]{x}$ με πεδίο ορισμού $(-\infty,+\infty)$ έχει παράγωγο στον 0 ίση με $\frac{d\,y}{dx}\big|_{x=0} = \frac{d\,\sqrt[3]{x}}{dx}\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty$. Όμως, η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στον 0.

Μερικές φορές το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ με το οποίο ορίζεται η παράγωγος το γράφουμε με ένα λίγο διαφορετικό, αλλά ισοδύναμο, τρόπο. Κάνουμε την απλή αλλαγή μεταβλητής $h = x - \xi$, οπότε είναι

$$\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\,.$$

Το $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ με το οποίο ορίζεται η παράγωγος είναι πάντοτε απροσδιόριστη μορφή διότι το όριο του παρονομαστή είναι ίσο με 0. Ειδικώτερα, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, τότε και το όριο του αριθμητή είναι ίσο με 0 και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Ας κάνουμε τώρα ένα σχόλιο για το σύμβολο $\frac{dy}{dx}$. Αν συμβολίσουμε $\Delta x = x-\xi$, δηλαδή τη διαφορά δυο τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής, και $\Delta y = y-\eta = f(x)-f(\xi)$, δηλαδή τη διαφορά των αντίστοιχων τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, τότε ο λόγος διαφορών $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ γράφεται $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Σ' αυτήν την παράσταση ο παρονομαστής είναι μια *μη μηδενική* αλλά αρκετά μικρή ποσότητα διότι ο x πλησιάζει αρκετά κοντά τον ξ παραμένοντας $\neq \xi$. Τα παλιότερα χρόνια οι μαθηματικοί συνήθιζαν να θεωρούν μια – ανύπαρκτη στην πραγματικότητα – ποσότητα η οποία είναι *μικρότερη σε μέγεθος από κάθε μη μηδενικό αριθμό αλλά όχι κατ' ανάγκη μηδέν*, την ονόμαζαν **απειροστό μέγεθος** και τη συμβόλιζαν dx. Θεωρούσαν ότι η μεταβλητή ποσότητα Δx προσεγγίζει το απειροστό μέγεθος dx και, στην περίπτωση που η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, ότι και η αντίστοιχη διαφορά $\Delta y = f(x)-f(\xi)$ προσεγγίζει το απειροστό μέγεθος dy. Επομένως, θεωρούσαν ότι ο λόγος $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ προσεγγίζει τον λόγο $\frac{dy}{dx}$. Πρέπει να τονιστεί ότι ο λόγος $\frac{dy}{dx}$ είναι *συμβολικός* και ότι δεν έχει πραγματική υπόσταση *λόγου αριθμών* διότι η μόνη τέτοια υπόσταση θα ήταν μια απροσδιόριστη μορφή με τον 0 ως παρονομαστή. Θα δούμε, όμως, στα επόμενα ότι σε πολλές περιπτώσεις μπορούμε να χειριστούμε τον συμβολικό λόγο $\frac{dy}{dx}$ *σαν να ήταν* λόγος αριθμών έχοντας έτσι την ευχέρεια να χρησιμοποιήσουμε απλές ιδιότητες των λόγων.

Εκτός από τον ορισμό της παραγώγου που είδαμε υπάρχουν μερικοί ακόμη σχετικοί ορισμοί.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[\xi, b)$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε λέμε ότι η $y = f(x)$ έχει **παράγωγο στον** ξ **από**

τα δεξιά του ή **δεξιά πλευρική παράγωγο στον** ξ και συμβολίζουμε το όριο αυτό

$$\boxed{f'_+(\xi) \quad \text{ή} \quad D_+f(\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{d\,f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi+} \quad \text{ή} \quad \frac{d\,y}{dx}\Big|_{x=\xi+} \;=\; \lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,.}$$

Ομοίως, έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα $(a,\xi]$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε λέμε ότι η $y=f(x)$ έχει **παράγωγο στον ξ από τα αριστερά του** ή **αριστερή πλευρική παράγωγο στον** ξ και συμβολίζουμε το όριο αυτό

$$\boxed{f'_-(\xi) \quad \text{ή} \quad D_-f(\xi) \quad \text{ή} \quad \frac{d\,f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi-} \quad \text{ή} \quad \frac{d\,y}{dx}\Big|_{x=\xi-} \;=\; \lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\,.}$$

Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη σε διάστημα (a,b) και $a<\xi<b$. Είναι προφανές ότι, αν η $y=f(x)$ έχει παράγωγο στον ξ, τότε έχει παραγώγους στον ξ και από τα δεξιά του και από τα αριστερά του και αυτές οι πλευρικές παράγωγοι στον ξ είναι ίσες με την παράγωγο στον ξ, δηλαδή $f'_-(\xi)=f'_+(\xi)=f'(\xi)$. Αντιστρόφως, αν η $y=f(x)$ έχει παραγώγους στον ξ και από τα δεξιά του και από τα αριστερά του και αυτές είναι ίσες, τότε η $y=f(x)$ έχει παράγωγο στον ξ ίση με την κοινή τιμή των δυο πλευρικών παραγώγων.

Παραδείγματα: (1) Η $y=|x|$ ορίζεται στο $(-\infty,+\infty)$. Υπολογίζουμε τις πλευρικές παραγώγους στον 0: $\frac{d\,|x|}{dx}\big|_{x=0+}=\lim_{x\to0+}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0+}1=1$, $\frac{d\,|x|}{dx}\big|_{x=0-}=\lim_{x\to0-}\frac{|x|-|0|}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0-}(-1)=-1$. Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στον 0.

(2) Η $y=\sqrt{|x|}$ είναι κι αυτή ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$. Τώρα: $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0+}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0-}=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{|x|}-\sqrt{|0|}}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{1}{-\sqrt{-x}}=-\infty$. Άρα δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης στον 0.

(3) Η $y=\begin{cases}\sqrt{x}\,, & \text{αν } x>0,\\ 0\,, & \text{αν } x=0,\\ -\sqrt{-x}\,, & \text{αν } x<0,\end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$ και υπολογίζουμε: $\frac{d\,y}{dx}\big|_{x=0+}=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ και $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-}=\lim_{x\to0-}\frac{-\sqrt{-x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{1}{\sqrt{-x}}=+\infty$. Άρα υπάρχει η παράγωγος στον 0 και είναι ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0}=+\infty$.

(4) Η $y=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}\,, & \text{αν } x\neq0,\\ 0\,, & \text{αν } x=0,\end{cases}$ είναι ορισμένη στο $(-\infty,+\infty)$. Βλέπουμε ότι η $\frac{d\,y}{dx}\big|_{x=0+}=\lim_{x\to0+}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0+}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+\infty}\sin t$ δεν υπάρχει και, ομοίως, ότι η $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-}=\lim_{x\to0-}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to0-}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to-\infty}\sin t$, επίσης, δεν υπάρχει. Άρα η συνάρτηση δεν έχει καμία πλευρική παράγωγο στον 0.

Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε διάστημα $[\xi, b)$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (a, ξ), το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι, φυσικά, το ίδιο με το $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ διότι το όριο στον ξ από τα αριστερά του δεν έχει νόημα. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή η παράγωγος στον ξ ταυτίζεται με τη δεξιά πλευρική παράγωγο στον ξ. Ομοίως, αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε διάστημα $(a, \xi]$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (ξ, b), το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι το ίδιο με το $\lim_{x\to\xi-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και η παράγωγος στον ξ ταυτίζεται με την αριστερή πλευρική παράγωγο στον ξ.

Παράδειγμα: Η $y = \sqrt{x}$ είναι ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και η παράγωγος στον 0 είναι ίση με $\frac{d\sqrt{x}}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{d\sqrt{x}}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των ξ στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$ στους οποίους αυτή είναι παραγωγίσιμη, δηλαδή όλων των ξ για τους οποίους υπάρχει ο $f'(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε με αυτό το σύνολο ως πεδίο ορισμού ορίζεται η **παράγωγος συνάρτηση** της $y = f(x)$, η οποία συμβολίζεται

$$\boxed{f'(x) \quad \text{ή} \quad Df(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d\,f(x)}{dx} \quad \text{ή} \quad \frac{d\,y}{dx}\,.}$$

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τις παραγώγους καθώς και τις πλευρικές παραγώγους στον 0 των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = 2, \quad y = x, \quad y = 3x^2 - 5x + 3, \quad y = \sqrt[4]{x}\,, \quad y = \sqrt[5]{x}\,,$$

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x, \quad y = \begin{cases} 2x\,, & \text{αν } x \leq 0, \\ -3x\,, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x^2\,, & \text{αν } x \leq 0, \\ -3x^2\,, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} -2\sqrt{-x}\,, & \text{αν } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x}\,, & \text{αν } x \geq 0, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} \sqrt{x}\,, & \text{αν } x \geq 0, \\ -1, & \text{αν } x < 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 1-x, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ -1-x, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

2. Έστω $y = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \leq 0, \\ ax + b, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$ Βρείτε τους a, b ώστε η συνάρτηση να έχει παράγωγο στον 0.

   Κάντε το ίδιο για την $y = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x < 0, \\ ax + b, & \text{αν } x \geq 0. \end{cases}$

3. Έστω ότι η $y = g(x)$ είναι ορισμένη στο $(a, \xi]$ και η $y = h(x)$ είναι ορισμένη στο $[\xi, b)$ και έστω ότι είναι $g(\xi) = h(\xi)$ και $g'_-(\xi) = h'_+(\xi)$. Αποδείξτε ότι η $y = f(x) = \begin{cases} g(x)\,, & \text{αν } a < x \leq \xi, \\ h(x)\,, & \text{αν } \xi \leq x < b, \end{cases}$ έχει παράγωγο στον ξ και ότι $f'(\xi) = g'_-(\xi) = h'_+(\xi)$.

4. Ξαναδείτε την άσκηση 1 της ενότητας 6.1 και γράψτε σε μορφή *παραγώγου*

   (i) τη (στιγμιαία) επιτάχυνση οχήματος που κινείται σε ευθύ δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

   (ii) τη (στιγμιαία) ταχύτητα και τη (στιγμιαία) γωνιακή ταχύτητα ενός οχήματος που κινείται σε κυκλικό δρόμο με μεταβαλλόμενη ταχύτητα.

6.3 Παραδείγματα παραγώγων, Ι.

Α. Η παράγωγος οποιασδήποτε σταθερής συνάρτησης $y = c$, όπου c είναι αριθμός ανεξάρτητος του x, είναι μηδέν σε κάθε σημείο. Πράγματι, για κάθε ξ είναι

$$\left.\frac{d\,c}{dx}\right|_{x=\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{c-c}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 0 = 0.$$

Επομένως,

$$\boxed{\frac{dc}{dx} = 0.}$$

Β. Η $y = x$ έχει παράγωγο $\left.\frac{d\,x}{dx}\right|_{x=\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} 1 = 1$. Άρα η παράγωγος συνάρτηση της $y = x$ είναι η σταθερή συνάρτηση

$$\boxed{\frac{d\,x}{dx} = 1.}$$

Αυτό γενικεύεται ως εξής. Αν ο n είναι φυσικός ≥ 2, η $y = x^n$ έχει παράγωγο συνάρτηση

$$\boxed{\frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1} \quad (n \text{ φυσικός } \geq 2).}$$

Πράγματι, για κάθε ξ είναι

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\,x^n}{dx}\right|_{x=\xi} &= \lim_{x\to\xi}\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}(x^{n-1} + x^{n-2}\xi + \cdots + x\xi^{n-2} + \xi^{n-1})\\ &= n\xi^{n-1},\end{aligned}$$

διότι $\lim_{x\to\xi} x^{n-k}\xi^{k-1} = \xi^{n-k}\xi^{k-1} = \xi^{n-1}$ και το πλήθος των όρων είναι n.

Ίσως παρατηρήσατε ότι ο τύπος $\frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1}$, που είπαμε ότι ισχύει για φυσικό $n \geq 2$, ισχύει και για $n = 1$: $\frac{d\,x^1}{dx} = 1x^0$. Πράγματι, ισχύει και ταυτίζεται με τον προηγούμενο τύπο $\frac{d\,x}{dx} = 1$, *αλλά* με τον περιορισμό $x \neq 0$, διότι δεν ορίζεται το σύμβολο 0^0.

Γ. Ο προηγούμενος τύπος για την παράγωγο συνάρτηση της $y = x^n$ είναι ο ίδιος και στην περίπτωση που ο n είναι 0 ή αρνητικός ακέραιος. Εννοείται, φυσικά, ότι η παράγωγος δεν ορίζεται στον $\xi = 0$ διότι ο 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $y = x^n$ αν $n \leq 0$. Πράγματι, αν $n = 0$, τότε η συνάρτηση $y = x^0$ είναι η σταθερή συνάρτηση $y = 1$ στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπότε έχει παράγωγο μηδέν, το οποίο συμπίπτει με την παράσταση $0x^{0-1}$ στο ίδιο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Αν $n < 0$, ορίζουμε $m = -n$, οπότε ο m είναι φυσικός και για κάθε $\xi \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d\,x^n}{dx}\Big|_{x=\xi} &= \lim_{x\to\xi}\frac{x^n-\xi^n}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{x^{-m}-\xi^{-m}}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi}\frac{\xi^m-x^m}{\xi^m x^m(x-\xi)}\\ &= -\lim_{x\to\xi}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}\xi+\cdots+x\xi^{m-2}+\xi^{m-1}}{\xi^m x^m}\\ &= -\frac{m\xi^{m-1}}{\xi^{2m}} = -m\xi^{-m-1} = n\xi^{n-1}\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$\boxed{\frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1} \quad (n \text{ ακέραιος } \leq 0, x \neq 0).}$$

Δ. Αν ο n είναι *περιττός φυσικός* ≥ 3, η $y = \sqrt[n]{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Τότε η παράγωγος συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και τύπο

$$\boxed{\frac{d\,\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{x}}{x} \quad (n \text{ περιττός φυσικός } \geq 3, x \neq 0).}$$

Η παράγωγος στον 0 είναι $\frac{d\,\sqrt[n]{x}}{dx}\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} = +\infty$ διότι ο $n-1$ είναι άρτιος, οπότε είναι $\sqrt[n]{x^{n-1}} > 0$ για κάθε $x \neq 0$. Γι αυτό ο 0 δεν περιέχεται στο πεδίο ορισμού της παραγώγου συνάρτησης.

Για τον υπολογισμό της παραγώγου στον $\xi \neq 0$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt[n]{x}$. Ορίζουμε $\eta = \sqrt[n]{\xi}$ και τότε

$$\begin{aligned}\frac{d\,\sqrt[n]{x}}{dx}\Big|_{x=\xi} &= \lim_{x\to\xi}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{\xi}}{x-\xi} = \lim_{y\to\eta}\frac{y-\eta}{y^n-\eta^n}\\ &= \lim_{y\to\eta}\frac{1}{y^{n-1}+y^{n-2}\eta+\cdots+y\eta^{n-2}+\eta^{n-1}}\\ &= \frac{1}{n\eta^{n-1}} = \frac{1}{n}\,\frac{\eta}{\eta^n} = \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{\xi}}{\xi}\,.\end{aligned}$$

Αν ο n είναι *άρτιος φυσικός*, η $y = \sqrt[n]{x}$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και η παράγωγος συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και τον ίδιο τύπο όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Δηλαδή,

$$\boxed{\frac{d\,\sqrt[n]{x}}{dx} = \frac{1}{n}\,\frac{\sqrt[n]{x}}{x} \quad (n \text{ άρτιος φυσικός}\,, x > 0).}$$

Και πάλι η παράγωγος στον 0 είναι ίση με $+\infty$. Οι υπολογισμοί είναι ακριβώς ίδιοι και δε θα τους επαναλάβουμε.

Ε. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $y = x^a$, όπου a είναι οποιοσδήποτε μη ακέραιος *ρητός*. Το πεδίο ορισμού της $y = x^a$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ (με την εξαίρεση του 0, αν $a \leq 0$), αν η ανάγωγη μορφή του a έχει περιττό παρονομαστή, ή το $[0, +\infty)$ (με την εξαίρεση του 0, αν $a \leq 0$), αν η ανάγωγη μορφή του a έχει άρτιο παρονομαστή. Τότε η παράγωγος συνάρτηση έχει τύπο

$$\boxed{\frac{d\,x^a}{dx} = ax^{a-1} \left(\begin{array}{l} a \text{ ρητός } > 1 \text{ με ανάγωγη μορφή περιττού παρονομαστή}, \\ a \text{ ρητός } \leq 1 \text{ με ανάγωγη μορφή περιττού παρονομαστή}, \ x \neq 0, \\ a \text{ ρητός } > 1 \text{ με ανάγωγη μορφή άρτιου παρονομαστή}, \ x \geq 0, \\ a \text{ ρητός } \leq 1 \text{ με ανάγωγη μορφή άρτιου παρονομαστή}, \ x > 0. \end{array} \right)}$$

Πράγματι, έστω $a = \frac{m}{n}$, όπου ο m είναι ακέραιος και ο n είναι φυσικός. Στους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \sqrt[n]{x}$. Τότε είναι $y = t^m$ και ορίζουμε, επίσης, $\eta = \xi^a$ και $\tau = \sqrt[n]{\xi}$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d\,x^a}{dx}\Big|_{x=\xi} &= \lim_{x \to \xi} \frac{y - \eta}{x - \xi} = \lim_{t \to \tau} \frac{t^m - \tau^m}{t^n - \tau^n} \\ &= \lim_{t \to \tau} \frac{t^{m-1} + t^{m-2}\tau + \cdots + t\tau^{m-2} + \tau^{m-1}}{t^{n-1} + t^{n-2}\tau + \cdots + t\tau^{n-2} + \tau^{n-1}} \\ &= \frac{m\tau^{m-1}}{n\tau^{n-1}} = \frac{m}{n}\tau^{m-n} = \frac{m}{n}\big(\sqrt[n]{\xi}\big)^{m-n} = a\xi^{a-1}\,. \end{aligned}$$

ΣΤ. Τέλος,

$$\boxed{\frac{d\,\cos x}{dx} = -\sin x, \qquad \frac{d\,\sin x}{dx} = \cos x\,.}$$

Για τον πρώτο τύπο υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\,\cos x}{dx}\Big|_{x=\xi} &= \lim_{x \to \xi} \frac{\cos x - \cos \xi}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{-2\sin\frac{x-\xi}{2}\sin\frac{x+\xi}{2}}{x - \xi} \\ &= -\lim_{x \to \xi} \frac{\sin\frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \sin\frac{x+\xi}{2} = -1 \cdot \sin\frac{\xi+\xi}{2} = -\sin\xi \end{aligned}$$

και, ομοίως, για τον δεύτερο

$$\begin{aligned} \frac{d\,\sin x}{dx}\Big|_{x=\xi} &= \lim_{x \to \xi} \frac{\sin x - \sin \xi}{x - \xi} = \lim_{x \to \xi} \frac{2\sin\frac{x-\xi}{2}\cos\frac{x+\xi}{2}}{x - \xi} \\ &= \lim_{x \to \xi} \frac{\sin\frac{x-\xi}{2}}{\frac{x-\xi}{2}} \cos\frac{x+\xi}{2} = 1 \cdot \cos\frac{\xi+\xi}{2} = \cos\xi. \end{aligned}$$

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε, βάσει των τύπων που μάθαμε, όποιες από τις παρακάτω παραγώγους υπάρχουν.

$$\frac{d\,x^3}{dx}\Big|_{x=1}, \quad \frac{d\,\sqrt[5]{x}}{dx}\Big|_{x=-1}, \quad \frac{d\,\sqrt[3]{x}}{dx}\Big|_{x=0}, \quad \frac{d\,\sqrt{x}}{dx}\Big|_{x=-1}, \quad \frac{d\,\sqrt[4]{x}}{dx}\Big|_{x=1},$$

$$\left.\frac{d\,\sqrt[6]{x}}{dx}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{d\,x^{-1}}{dx}\right|_{x=-2}, \quad \left.\frac{d\,x^{\frac{2}{3}}}{dx}\right|_{x=-1}, \quad \left.\frac{d\,x^{\frac{4}{5}}}{dx}\right|_{x=0}, \quad \left.\frac{d\,x^{\frac{5}{2}}}{dx}\right|_{x=0},$$

$$\left.\frac{d\,x^{\frac{5}{2}}}{dx}\right|_{x=-3}, \quad \left.\frac{d\,x^{-\frac{1}{2}}}{dx}\right|_{x=-3}, \quad \left.\frac{d\,x^{-\frac{3}{2}}}{dx}\right|_{x=0}.$$

2. Ποιων από τις παρακάτω παραγώγους συναρτήσεις το πεδίο ορισμού περιέχει τον 0; τον -1;

$$\frac{d\,x^3}{dx}, \quad \frac{d\,x^{-3}}{dx}, \quad \frac{d\,x^0}{dx}, \quad \frac{d\,\sqrt{x}}{dx}, \quad \frac{d\,\sqrt[5]{x}}{dx},$$

$$\frac{d\,x^{\frac{4}{3}}}{dx}, \quad \frac{d\,x^{\frac{2}{3}}}{dx}, \quad \frac{d\,x^{\frac{3}{2}}}{dx}, \quad \frac{d\,x^{-\frac{3}{2}}}{dx}, \quad \frac{d\,x^{-\frac{4}{5}}}{dx}.$$

3. Λύστε τις παρακάτω εξισώσεις.

$$\frac{d\,\sin x}{dx} = -1, \quad \frac{d\,\sin x}{dx} + \sin x = \sqrt{2}\,, \quad \cos x \frac{d\,\sin x}{dx} - \sin x \frac{d\,\cos x}{dx} = 1.$$

4. Βρείτε βάσει του ορισμού τις παραγώγους συναρτήσεις των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = (\sin x)^2\,, \quad y = (\cos x)^3\,, \quad y = \sin(2x), \quad y = \cos(7x).$$

5. Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός κύβου ως προς το μήκος της ακμής του είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς του.

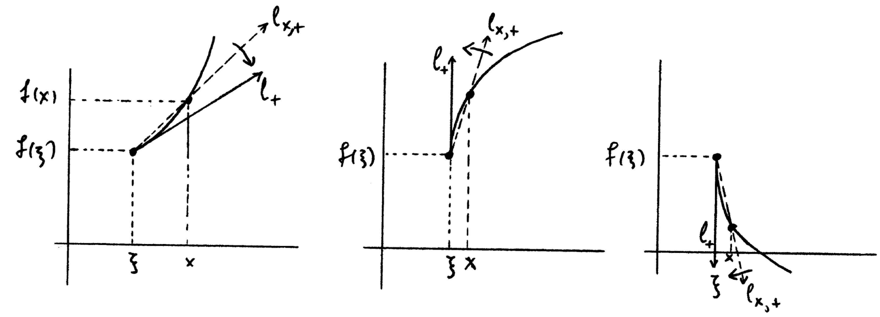
   Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού ενός κυκλικού δίσκου ως προς το μήκος της διαμέτρου του είναι ίσος με το μισό του μήκους της αντίστοιχης περιφέρειάς του.

   Αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου μιας σφαίρας ως προς το μήκος της διαμέτρου της είναι ίσος με το μισό του εμβαδού της αντίστοιχης εξωτερικής επιφάνειάς της.

6.4 Παράγωγος και γράφημα συνάρτησης.

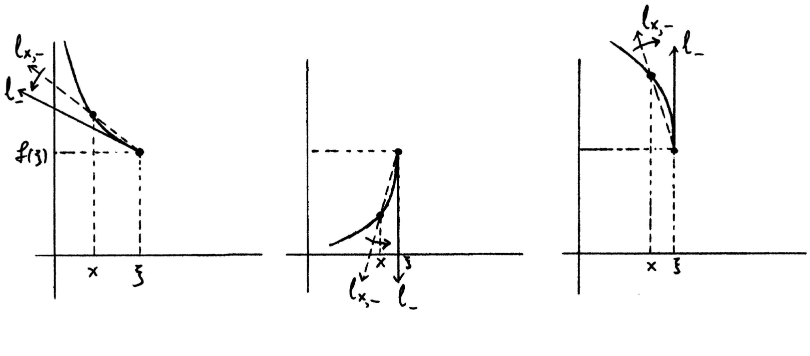
Στην ενότητα αυτή θα δούμε λίγο πιο προσεκτικά το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας της παραγώγου.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[\xi, b)$. Αν ο x μεταβάλλεται στο διάστημα (ξ, b), τότε η μεταβλητή *ημιευθεία* $l_{x,+}$ με κορυφή το σταθερό σημείο $(\xi, f(\xi))$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ είναι πλάγια και έχει κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Έστω, τώρα, ότι ο x πλησιάζει αρκετά κοντά τον ξ. Αν το σημείο $(x, f(x))$ πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά το σημείο $(\xi, f(\xi))$ (*δηλαδή αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ από τα δεξιά του*), τότε η $l_{x,+}$ τείνει να ταυτισθεί με την *ημιευθεία* l_+ με κορυφή το $(\xi, f(\xi))$ η οποία εφάπτεται στο μέρος του γραφήματος της $y = f(x)$ με άκρο το σημείο $(\xi, f(\xi))$ και κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά. Η κλίση της μεταβλητής ημιευθείας είναι ίση με $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις. (i) Αν το $f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, τότε το όριο αυτό είναι ίσο με την κλίση της l_+ και, επομένως: η l_+ έχει κατεύθυνση από τα αριστερά προς τα δεξιά και από τα κάτω προς τα πάνω, αν το όριο είναι θετικό, ή από τα πάνω προς τα κάτω, αν το όριο είναι αρνητικό, ή η l_+ είναι οριζόντια, αν το όριο είναι 0. (ii) Αν το όριο είναι $f'_+(\xi)=+\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,+}$ γίνεται όσο θέλουμε μεγάλη θετική, οπότε η l_+ είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. (iii) Αν το όριο είναι $f'_+(\xi)=-\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,+}$ γίνεται όσο θέλουμε μεγάλη αρνητική, οπότε η l_+ είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα πάνω προς τα κάτω. Φυσικά, αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία από τα αριστερά προς τα δεξιά.

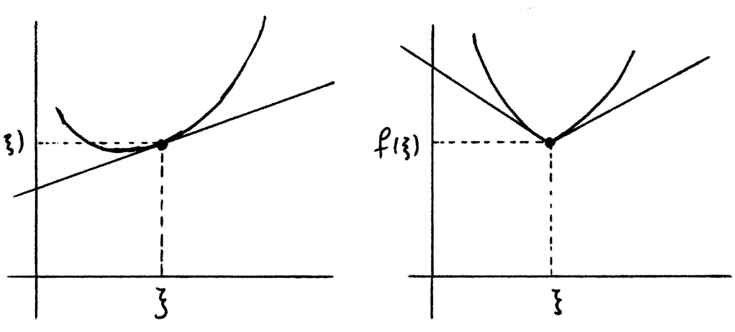


Σχήμα 6.2: Η προς τα δεξιά εφαπτόμενη ημιευθεία.

Ας εξετάσουμε τώρα τη «συμμετρική» κατάσταση. Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $(a,\xi]$. Αν ο x μεταβάλλεται στο διάστημα (a,ξ), τότε η μεταβλητή ημιευθεία $l_{x,-}$ με κορυφή το σταθερό σημείο $(\xi,f(\xi))$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x,f(x))$ είναι πλάγια και έχει κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έστω ότι ο x πλησιάζει αρκετά κοντά τον ξ. Αν το σημείο $(x,f(x))$ πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά το σημείο $(\xi,f(\xi))$ (*δηλαδή αν η* $y=f(x)$ *είναι συνεχής στον* ξ *από τα αριστερά του*), τότε η $l_{x,-}$ τείνει να ταυτισθεί με την ημιευθεία l_- με κορυφή το $(\xi,f(\xi))$ η οποία εφάπτεται στο μέρος του γραφήματος της $y=f(x)$ με άκρο το σημείο $(\xi,f(\xi))$ και κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά. Η κλίση της $l_{x,-}$ είναι ίση με $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και διακρίνουμε πάλι τις εξής περιπτώσεις. (i) Αν το $f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι αριθμός, τότε το όριο αυτό είναι ίσο με την κλίση της l_- και, επομένως: η l_- έχει κατεύθυνση από τα δεξιά προς τα αριστερά και από τα πάνω προς τα κάτω, αν το όριο είναι θετικό, ή από τα κάτω προς τα πάνω, αν το όριο είναι αρνητικό, ή η l_- είναι οριζόντια, αν το όριο είναι 0. (ii) Αν το όριο είναι $f'_-(\xi)=+\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,-}$ γίνεται όσο θέλουμε μεγάλη θετική, οπότε η l_- είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα πάνω προς τα κάτω. (iii) Αν το όριο είναι $f'_-(\xi)=-\infty$, τότε η κλίση της $l_{x,-}$ γίνεται όσο θέλουμε μεγάλη αρνητική, οπότε η l_- είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Αν δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$, τότε δεν υπάρχει ούτε και εφαπτόμενη ημιευθεία από τα δεξιά προς τα αριστερά.



Σχήμα 6.3: Η προς τα αριστερά εφαπτόμενη ημιευθεία.



Σχήμα 6.4: Η εφαπτόμενη ευθεία υπάρχει. Η εφαπτόμενη ευθεία δεν υπάρχει.

Έστω τώρα ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε διάστημα (a, b), όπου $a < \xi < b$. Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, *αν η* $y = f(x)$ *είναι συνεχής στον* ξ *και αν οι δυο πλευρικές παράγωγοι είναι ίσες, τότε οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στα δυο μέρη του γραφήματος με αρχή το* $(\xi, f(\xi))$ *είναι αντίθετες και, επομένως, σχηματίζουν μια ευθεία, την ευθεία* l *η οποία εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης στο* $(\xi, f(\xi))$. Αν οι δυο πλευρικές παράγωγοι δεν είναι ίσες, τότε οι δυο εφαπτόμενες ημιευθείες δεν είναι αντίθετες και, επομένως, δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία. Φυσικά, αν μια από τις δυο πλευρικές παραγώγους δεν υπάρχει, τότε ούτε η αντίστοιχη εφαπτόμενη ημιευθεία υπάρχει.

Παραδείγματα: (1) Το γράφημα της $y = |x|$ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο σημείο $(0, 0)$. Η μια έχει κορυφή $(0, 0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx}\big|_{x=0+} = 1$ και κατεύθυνση από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω. Η άλλη έχει κορυφή $(0, 0)$, κλίση $\frac{d|x|}{dx}\big|_{x=0-} = -1$ και κατεύθυνση από τα δεξιά και κάτω προς τα αριστερά και πάνω. Οι δυο αυτές ημιευθείες δεν είναι αντίθετες, οπότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$.

(2) Το γράφημα της $y=\sqrt{|x|}$ έχει κι αυτό δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο $(0,0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0+}=+\infty$, η μια έχει κορυφή το $(0,0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Ομοίως, επειδή $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0-}=-\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει κορυφή το $(0,0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Άρα δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$.

(3) Το γράφημα της $y=\begin{cases}\sqrt{x}\,, & \text{αν } 0\leq x,\\ -\sqrt{-x}\,, & \text{αν } x\leq 0,\end{cases}$ έχει δυο εφαπτόμενες ημιευθείες στο $(0,0)$. Επειδή $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0+}=+\infty$, η μια έχει κορυφή το $(0,0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω. Ομοίως, επειδή $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-}=+\infty$, η άλλη ημιευθεία έχει κορυφή το $(0,0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα πάνω προς τα κάτω. Οι δυο ημιευθείες είναι αντίθετες, οπότε σχηματίζουν την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$, η οποία είναι, προφανώς, κατακόρυφη· είναι η ευθεία $x=0$.

Στην περίπτωση που η $y=f(x)$ είναι ορισμένη μόνο στη μια πλευρά του ξ και είναι συνεχής στον ξ από την πλευρά αυτή, μπορούμε να μιλάμε μόνο για μια εφαπτόμενη ημιευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi,f(\xi))$.

Παράδειγμα: Το γράφημα της $y=\sqrt{x}$ έχει μόνο μια εφαπτόμενη ημιευθεία στο $(0,0)$. Επειδή $\frac{d\sqrt{x}}{dx}\big|_{x=0+}=+\infty$, η ημιευθεία αυτή έχει κορυφή το $(0,0)$ και είναι κατακόρυφη με κατεύθυνση από τα κάτω προς τα πάνω.

Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a,b), ότι $a<\xi<b$ και ότι η $y=f(x)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στον ξ. Όπως είδαμε, η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας l στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ είναι ίση με $f'(\xi)$, οπότε:

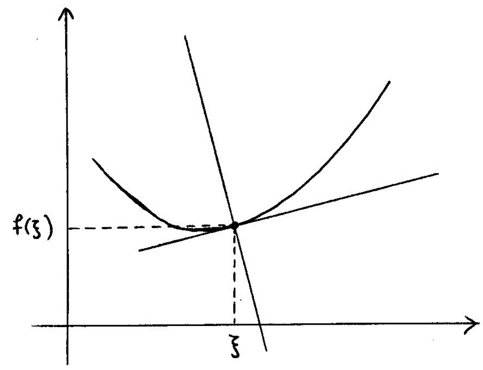
$$\boxed{\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας:}\qquad y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)\quad (f'(\xi)\neq\pm\infty).}$$

Θα προσδιορίσουμε τώρα την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται, επίσης, από το σημείο $(\xi,f(\xi))$ και είναι κάθετη στην εφαπτόμενη ευθεία. Είναι ευνόητο ότι την ευθεία αυτή την αποκαλούμε **ευθεία κάθετη στο γράφημα** της $y=f(x)$ στο σημείο $(\xi,f(\xi))$. Αν $f'(\xi)\neq 0$, τότε η κλίση της κάθετης ευθείας είναι ίση με $-\frac{1}{f'(\xi)}$ και, επομένως, **η εξίσωση της κάθετης ευθείας** είναι

$$y=-\frac{1}{f'(\xi)}(x-\xi)+f(\xi).$$

Αν $f'(\xi)=0$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια, οπότε η κάθετη ευθεία είναι κατακόρυφη και η εξίσωσή της είναι

$$x=\xi.$$



Σχήμα 6.5: Η εφαπτόμενη ευθεία και η κάθετη ευθεία στο γράφημα.

Τέλος, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ και $f'(\xi) = +\infty$ ή $f'(\xi) = -\infty$, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο $(\xi, f(\xi))$ είναι κατακόρυφη και

$$\boxed{\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας:} \qquad x = \xi \quad (f'(\xi) = \pm\infty),}$$

οπότε η κάθετη ευθεία είναι οριζόντια με εξίσωση

$$y = f(\xi).$$

Παραδείγματα: (1) Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο (ξ, ξ^2) της $y = x^2$ είναι η $y = 2\xi(x-\xi)+\xi^2$. Η εξίσωση της κάθετης ευθείας στο ίδιο σημείο (ξ, ξ^2) είναι η $y = -\frac{1}{2\xi}(x-\xi)+\xi^2$, αν $\xi \neq 0$, και η $x = 0$, αν $\xi = 0$.

(2) Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(\xi, \xi^{\frac{1}{3}})$ της $y = x^{\frac{1}{3}}$ είναι η $y = \frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}}(x-\xi)+\xi^{\frac{1}{3}}$, αν $\xi \neq 0$, και η $x = 0$, αν $\xi = 0$. Η εξίσωση της κάθετης ευθείας στο ίδιο σημείο $(\xi, \xi^{\frac{1}{3}})$ είναι η $y = -3\xi^{\frac{2}{3}}(x-\xi)+\xi^{\frac{1}{3}}$, αν $\xi \neq 0$, και η $y = 0$, αν $\xi = 0$.

Για να βρούμε σε ποιο σημείο $(\xi, \xi^{\frac{1}{3}})$ η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$, εξισώνουμε τις κλίσεις των δυο αυτών ευθειών, $\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}} = 1$, και προκύπτει $\xi = \pm\frac{1}{\sqrt{27}}$.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε (αν υπάρχουν) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων ημιευθειών, της εφαπτόμενης ευθείας και της κάθετης ευθείας στο σημείο του γραφήματος που αντιστοιχεί στον 0 για καθεμιά από τις συναρτήσεις της άσκησης 1 της ενότητας 6.2.

2. Γνωρίζουμε από τη στοιχειώδη γεωμετρία ότι κάθε ευθεία η οποία εφάπτεται σε έναν κύκλο δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο εκτός από το σημείο επαφής. Ισχύει αυτό γενικότερα;

(i) Θεωρήστε την τετραγωνική παραβολή $y = x^2$. Σε κάθε σημείο της καμπύλης υπολογίστε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη στο σημείο αυτό και βρείτε πόσα κοινά σημεία έχει η εφαπτόμενη ευθεία με την καμπύλη.

(ii) Κάντε το ίδιο για την κυβική παραβολή $y = x^3$.

3. Βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτόμενης και της κάθετης ευθείας σε κάθε σημείο του γραφήματος καθεμιάς από τις συναρτήσεις που μελετήσαμε στην ενότητα 6.3.

4. Βρείτε τους αριθμούς b και c ώστε το γράφημα της $y = x^2 + bx + c$ να εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στο σημείο $(1, 1)$.

5. Σε ποια σημεία του το γράφημα της $y = x^{\frac{1}{3}}$ έχει εφαπτόμενη ευθεία κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; στην ευθεία $y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$; στην ευθεία $x = 4$; στην ευθεία $y = 1$;

6. Θεωρήστε την $y = f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0. Σε ένα από τα παραδείγματα είδαμε ότι η συνάρτηση δεν έχει πλευρικές παραγώγους στον 0.

   Σχεδιάστε το γράφημα της συνάρτησης και μελετήστε τη συμπεριφορά της μεταβλητής ημιευθείας $l_{x,+}$ με κορυφή το σταθερό σημείο $(0, 0)$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ καθώς $x \to 0+$. Τείνει να ταυτιστεί η $l_{x,+}$ με κάποια ημιευθεία με κορυφή το σημείο $(0, 0)$; Κάντε το ίδιο για την ημιευθεία $l_{x,-}$ με κορυφή το σημείο $(0, 0)$ η οποία διέρχεται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ καθώς $x \to 0-$.

7. Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0 και έχει παράγωγο στον 0 ίση με 0.

   Όπως στην προηγούμενη άσκηση, μελετήστε τη συμπεριφορά των ημιευθειών $l_{x,+}$ και $l_{x,-}$ με κορυφή το σημείο $(0, 0)$ οι οποίες διέρχονται από το μεταβλητό σημείο $(x, f(x))$ καθώς $x \to 0+$ και $x \to 0-$, αντιστοίχως.

8. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης και της κάθετης ευθείας σε κάθε σημείο της καμπύλης $y^4 = x^3$. (i) Η λύση είναι απλούστερη αν θεωρήσετε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή και την x ως εξαρτημένη μεταβλητή. (ii) Αν θεωρήσετε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή, τότε πρέπει να θεωρήσετε την καμπύλη ως ένωση των γραφημάτων των $y = x^{\frac{3}{4}}$ και $y = -x^{\frac{3}{4}}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και να προσέξετε ιδιαιτέρως το σημείο $(0, 0)$ της καμπύλης.

   Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την καμπύλη $y^2 = x^3$. Μήπως, τώρα, υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$;

9. Αποδείξτε ότι, αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στην καμπύλη $xy = a\,(a > 0)$, το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x-άξονα και τον y-άξονα διχοτομείται από το σημείο επαφής (της εφαπτόμενης ευθείας με την καμπύλη). Μπορείτε να θεωρήσετε οποιαδήποτε από τις x, y ως ανεξάρτητη μεταβλητή.

10. Αποδείξτε ότι, αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στην καμπύλη $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a\,(a > 0)$, το ευθύγραμμο τμήμα της που αποκόπτεται από τον x-άξονα και τον y-άξονα έχει σταθερό μήκος $a^{\frac{3}{2}}$.

    Σχεδιάστε την καμπύλη. Συμφωνεί το σχήμα που φτιάξατε με το προηγούμενο αποτέλεσμα για τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα;

6.5 Ιδιότητες των παραγώγων.

Α. Ισότητα παραγώγων.

Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται σε κάποιο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$. Τότε οι λόγοι $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και $\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}$ ταυτίζονται για κάθε x στην ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$, οπότε και τα όριά τους, αν υπάρχουν, είναι ίσα. Προφανώς, το ίδιο ισχύει και για τα αντίστοιχα πλευρικά όρια αν οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται σε κάποιο $(a, \xi]$ ή σε κάποιο $[\xi, b)$. Επομένως:

Πρόταση 6.1 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται σε κάποιο διάστημα (a, b) με $a < \xi < b$ ή σε κάποιο $(a, \xi]$ ή σε κάποιο $[\xi, b)$. Αν η μια από τις δυο συναρτήσεις έχει παράγωγο ή αριστερή πλευρική παράγωγο ή δεξιά πλευρική παράγωγο στον ξ, αντιστοίχως, τότε και η άλλη συνάρτηση έχει αντίστοιχη παράγωγο και οι δυο παράγωγοι είναι ίσες.*

Παραδείγματα: (1) Η $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και η σταθερή συνάρτηση $y = 1$ με πεδίο ορισμού πάλι το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται στο διάστημα $(0, +\infty)$. Άρα η παράγωγος της αρχικής συνάρτησης σε κάθε σημείο του $(0, +\infty)$ είναι ίση με 0. Ομοίως, η αρχική συνάρτηση και η σταθερή συνάρτηση $y = -1$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζονται στο διάστημα $(-\infty, 0)$. Άρα η παράγωγος της αρχικής συνάρτησης σε κάθε σημείο του $(-\infty, 0)$ είναι ίση με 0.

Προσέξτε: δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a, b) με $a < 0 < b$ ώστε η συνάρτηση να ταυτίζεται με την σταθερή συνάρτηση $y = 0$ στο διάστημα αυτό. Άρα δεν μπορούμε να πούμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0 στο σημείο 0. Πράγματι, η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στο 0.

(2) Η $y = \sqrt{|x|}$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ ταυτίζεται στο διάστημα $[0, +\infty)$ με την $y = \sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$. Άρα η παράγωγος της $y = \sqrt{|x|}$ σε κάθε σημείο του $(0, +\infty)$ είναι ίση με την παράγωγο της $y = \sqrt{x}$ στο ίδιο σημείο, οπότε $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$ για κάθε x στο $(0, +\infty)$. Επίσης, η παράγωγος της $y = \sqrt{|x|}$ στον 0 από τα δεξιά του είναι ίση με την παράγωγο της $y = \sqrt{x}$ στον 0

από τα δεξιά του, οπότε $\frac{d\sqrt{|x|}}{dx}\big|_{x=0+} = \frac{d\sqrt{x}}{dx}\big|_{x=0+} = +\infty$.

Β. Παραγωγισιμότητα και συνέχεια.

Πρόταση 6.2 *Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ ή στον ξ από τα αριστερά του ή στον ξ από τα δεξιά του, τότε είναι συνεχής στον ξ ή στον ξ από τα αριστερά του ή στον ξ από τα δεξιά του, αντιστοίχως.*

Απόδειξη: Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ, δηλαδή υπάρχει ο $f'(\xi)$ και είναι αριθμός. Τότε από την ισότητα $f(x) = \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}(x-\xi) + f(\xi)$ έχουμε

$$\lim_{x\to\xi} f(x) = \lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \lim_{x\to\xi}(x-\xi) + f(\xi) = f'(\xi)\cdot 0 + f(\xi) = f(\xi).$$

Άρα η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ.

Η απόδειξη είναι, προφανώς, παρόμοια και στις άλλες περιπτώσεις.

Παραδείγματα: (1) Το αντίστροφο της Πρότασης 6.2 δεν ισχύει εν γένει. Η $y = |x|$ είναι συνεχής στον 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στον 0.

(2) Στην Πρόταση 6.2 υποθέτουμε ότι η παράγωγος στον ξ είναι αριθμός. Αν η παράγωγος είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η $y = f(x)$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη συνεχής στον ξ. Η $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. Δεν είναι συνεχής στον 0 ούτε από τα δεξιά του ούτε από τα αριστερά του, αφού και τα δύο όρια $\lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$ και $\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0-}(-1) = -1$ είναι διαφορετικά από την τιμή 0 στον 0. Όμως, $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-0}{x-0} = +\infty$ και $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0-} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-0}{x-0} = +\infty$, οπότε υπάρχει η παράγωγος στον 0 και είναι ίση με $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = +\infty$.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι, αν η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στον ξ *και αν είναι συνεχής* στον ξ, τότε υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$. Η Πρόταση 6.2 εξασφαλίζει ότι, αν η παράγωγος είναι αριθμός, τότε δε χρειάζεται η υπόθεση ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στον ξ. Αν, όμως, η παράγωγος είναι $\pm\infty$, τότε για να υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία είναι ουσιαστική η υπόθεση της συνέχειας στον ξ. Στο τελευταίο παράδειγμα είναι φανερό ότι δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0,0)$ του γραφήματος.

Γ. Αλγεβρικές πράξεις με παραγώγους.

Πρόταση 6.3 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στον ξ. Τότε το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και, αν $g(\xi) \neq 0$, ο λόγος των δυο συναρτήσεων είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στον ξ και ισχύουν οι τύποι:*

$$\boxed{\begin{array}{l} (f+g)'(\xi) = f'(\xi) + g'(\xi), \quad (f-g)'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi), \\ (fg)'(\xi) = g(\xi)f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi), \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) = \frac{g(\xi)f'(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}. \end{array}}$$

Τα ίδια ισχύουν και για τις πλευρικές παραγώγους.

Απόδειξη: Και οι τέσσερις ισότητες αποδεικνύονται βάσει απλών αντίστοιχων ιδιοτήτων των ορίων. Για το άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned}(f+g)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi}\frac{(f(x)+g(x))-(f(\xi)+g(\xi))}{x-\xi}\\ &= \lim_{x\to\xi}\left(\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}+\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)\\ &= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}+\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\\ &= f'(\xi)+g'(\xi)\end{aligned}$$

και η απόδειξη για τη διαφορά είναι ίδια. Για το γινόμενο:

$$\begin{aligned}(fg)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)g(x)-f(\xi)g(\xi)}{x-\xi}\\ &= \lim_{x\to\xi}\left(g(x)\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}+f(\xi)\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)\\ &= \lim_{x\to\xi}g(x)\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}+f(\xi)\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\\ &= g(\xi)f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi).\end{aligned}$$

Τέλος, για τον λόγο:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(\xi) &= \lim_{x\to\xi}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(\xi)}{g(\xi)}}{x-\xi}\\ &= \lim_{x\to\xi}\left(\frac{1}{g(x)}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}-\frac{f(\xi)}{g(x)g(\xi)}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\right)\\ &= \lim_{x\to\xi}\frac{1}{g(x)}\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\\ &\quad -\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\lim_{x\to\xi}\frac{1}{g(x)}\lim_{x\to\xi}\frac{g(x)-g(\xi)}{x-\xi}\\ &= \frac{1}{g(\xi)}f'(\xi)-\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\frac{1}{g(\xi)}g'(\xi)=\frac{g(\xi)f'(\xi)-f(\xi)g'(\xi)}{g(\xi)^2}.\end{aligned}$$

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς οι ιδιότητες αυτές γράφονται (παραλείποντας, για απλούστευση, τον ξ)

$$D(f\pm g)=Df\pm Dg,\qquad D(fg)=gDf+fDg,\qquad D\Big(\frac{f}{g}\Big)=\frac{gDf-fDg}{g^2}$$

$$\frac{d(f(x)\pm g(x))}{dx}=\frac{d\,f(x))}{dx}\pm\frac{d\,g(x)}{dx},\quad \frac{d(f(x)g(x))}{dx}=g(x)\frac{d\,f(x)}{dx}+f(x)\frac{d\,g(x)}{dx},$$

$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}=\frac{g(x)\frac{d\,f(x)}{dx}-f(x)\frac{d\,g(x)}{dx}}{g(x)^2}$$

$$\frac{d(y\pm z)}{dx}=\frac{dy}{dx}\pm\frac{dz}{dx},\quad \frac{d(yz)}{dx}=z\frac{dy}{dx}+y\frac{dz}{dx},\quad \frac{d\left(\frac{y}{z}\right)}{dx}=\frac{z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}}{z^2},$$

όπου στην τελευταία σειρά χρησιμοποιούμε το σύμβολο $z=g(x)$ αντί του $y=g(x)$ για να μην το μπερδέψουμε με το $y=f(x)$.

Παραδείγματα: (1) Αν η $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και c είναι οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός, τότε η $y=cf(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και

$$\boxed{(cf)'(\xi) = cf'(\xi).}$$

Πράγματι, επειδή η σταθερή συνάρτηση $y = c$ έχει παράγωγο μηδέν, συνεπάγεται ότι $(cf)'(\xi) = 0 \cdot f(\xi) + cf'(\xi) = cf'(\xi)$.

(2) Έστω $y = a_0+a_1x+\cdots+a_N x^N$ οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση. Από το προηγούμενο παράδειγμα κάθε όρος του αθροίσματος έχει παράγωγο συνάρτηση την $\frac{d\,(a_k x^k)}{dx} = a_k \frac{d\,x^k}{dx} = k a_k x^{k-1}$ και, επομένως,

$$\boxed{\frac{d}{dx}\big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N\big) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + N a_N x^{N-1}\,.}$$

(3) Υπολογίζουμε

$$\frac{d\left(\frac{x^2+x-1}{x^3+2}\right)}{dx} = \frac{(x^3+2)\frac{d\,(x^2+x-1)}{dx} - (x^2+x-1)\frac{d\,(x^3+2)}{dx}}{(x^3+2)^2}$$

$$= \frac{(x^3+2)(2x+1) - (x^2+x-1)3x^2}{(x^3+2)^2} = \frac{-x^4-2x^3+3x^2+4x+2}{(x^3+2)^2}\,.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται οι παράγωγοι όλων των ρητών συναρτήσεων.

(4) Οι παράγωγοι συναρτήσεις της εφαπτόμενης και της συνεφαπτόμενης είναι

$$\boxed{\frac{d\,\tan x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}\,, \qquad \frac{d\,\cot x}{dx} = -\frac{1}{(\sin x)^2}\,.}$$

Για παράδειγμα:

$$\frac{d\,\tan x}{dx} = \frac{\cos x \frac{d\,\sin x}{dx} - \sin x \frac{d\,\cos x}{dx}}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}\,.$$

Η απόδειξη της δεύτερης ισότητας είναι ίδια.

Δ. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης.

Η επόμενη ιδιότητα είναι ιδιαιτέρως σημαντική για τον υπολογισμό παραγώγων.

Πρόταση 6.4 ***Κανόνας της αλυσίδας***. *Έστω ότι ορίζεται η σύνθεση $z = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ των $y = f(x)$ και $z = g(y)$. Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και η $z = g(y)$ είναι παραγωγίσιμη στον $\eta = f(\xi)$, τότε η $z = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και*

$$\boxed{(g \circ f)'(\xi) = g'(\eta) f'(\xi) = g'\big(f(\xi)\big) f'(\xi).}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση με τύπο

$$z = G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta}\,, & \text{αν } y \text{ είναι στο πεδίο ορισμού της } z = g(y) \text{ και } y \neq \eta, \\ g'(\eta)\,, & \text{αν } y = \eta. \end{cases}$$

Το πεδίο ορισμού της $z = G(y)$ είναι ίδιο με το πεδίο ορισμού της $z = g(y)$. Η $z = G(y)$ είναι συνεχής στον η διότι $\lim_{y\to\eta} G(y) = \lim_{y\to\eta} \frac{g(y)-g(\eta)}{y-\eta} = g'(\eta) = G(\eta)$. Επίσης, είναι προφανές από τον τύπο της $G(y)$ ότι ισχύει $g(y) - g(\eta) = G(y)(y - \eta)$ για κάθε y στο πεδίο ορισμού της $z = g(y)$, ακόμη και για τον $y = \eta$. Έχουμε, λοιπόν,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\xi} \frac{g(f(x)) - g(f(\xi))}{x - \xi} &= \lim_{x\to\xi} \frac{G(f(x))(f(x) - f(\xi))}{x - \xi} \\
&= \lim_{x\to\xi} G(f(x)) \lim_{x\to\xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \\
&= G(f(\xi))f'(\xi) = G(\eta)f'(\xi) = g'(\eta)f'(\xi),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το όριο $\lim_{x\to\xi} G(f(x)) = G(f(\xi))$, το οποίο ισχύει διότι η σύνθετη συνάρτηση $z = G(f(x))$ είναι συνεχής στον ξ.

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς ο κανόνας της αλυσίδας γράφεται:

$$D(g \circ f)(\xi) = Dg(\eta)Df(\xi) = Dg\big(f(\xi)\big)Df(\xi)$$

$$\frac{d\,g(f(x))}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{d\,g(y)}{dy}\Big|_{y=\eta} \frac{d\,f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{d\,g(y)}{dy}\Big|_{y=f(\xi)} \frac{d\,f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi}$$

$$\frac{dz}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{dz}{dy}\Big|_{y=\eta} \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi} = \frac{dz}{dy}\Big|_{y=f(\xi)} \frac{dy}{dx}\Big|_{x=\xi}.$$

Επιμένοντας λίγο ακόμη στο θέμα του συμβολισμού, αν γράψουμε τις ισότητες αυτές για τον γενικό x (αντί του ειδικού ξ), δηλαδή για τις παραγώγους συναρτήσεις, έχουμε τις ισότητες

$$D(g \circ f)(x) = Dg\big(f(x)\big)Df(x)$$

$$\frac{d\,g(f(x))}{dx} = \frac{d\,g(y)}{dy}\Big|_{y=f(x)} \frac{d\,f(x)}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\Big|_{y=f(x)} \frac{dy}{dx}.$$

Στις δύο τελευταίες ισότητες δεν επιτρέπεται να αγνοηθεί το σύμβολο $\big|_{y=f(x)}$, δηλαδή να γράψουμε $\frac{d\,g(f(x))}{dx} = \frac{d\,g(y)}{dy}\frac{d\,f(x)}{dx}$ ή $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$. Πράγματι, τα σύμβολα $\frac{d\,g(y)}{dy}$ και $\frac{dz}{dy}$ υποδηλώνουν τη συνάρτηση $z = g'(y)$, δηλαδή συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή την y. Όμως, το αποτέλεσμα πρέπει να είναι συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή την x (αφού όλα τα άλλα σύμβολα στις ισότητες αυτές έχουν ανεξάρτητη μεταβλητή την x) και, επομένως, *πρέπει ο y να αντικατασταθεί με τον $f(x)$ ώστε να εμφανισθεί τελικά η μεταβλητή x*. Μερικές φορές, βέβαια, χρησιμοποιούμε τις συντομεύσεις

$$\frac{d\,g(f(x))}{dx} = \frac{d\,g(y)}{dy}\frac{d\,f(x)}{dx}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

έχοντας, όμως, κατά νου ότι *στο τελικό αποτέλεσμα ο y πρέπει να αντικατασταθεί με τον $f(x)$*. Ειδικά η τελευταία γραφή είναι πολύ εύκολο να απομνημονευθεί αφού θυμίζει τον απλό κανόνα πολλαπλασιασμού λόγων. Θυμόμαστε, φυσικά, ότι τα $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ και $\frac{dy}{dx}$ δεν είναι λόγοι αλλά σύμβολα.

Παραδείγματα: (1) Υπολογίζουμε την παράγωγο της $z = \sin(x^2+3)$ στον 2. Χρησιμοποιούμε την *ενδιάμεση μεταβλητή* $y = x^2+3$ και γράφουμε $z = \sin y$. Η παράγωγος της $y = x^2+3$ στον 2 είναι $\frac{dy}{dx}\big|_{x=2} = \frac{d\,(x^2+3)}{dx}\big|_{x=2} = 2x|_{x=2} = 4$ και η παράγωγος της $z = \sin y$ στον $2^2+3 = 7$ είναι $\frac{dz}{dy}\big|_{y=7} = \frac{d\,\sin y}{dy}\big|_{y=7} = \cos y|_{y=7} = \cos 7$. Άρα $\frac{d\,\sin(x^2+3)}{dx}\big|_{x=2} = \frac{dz}{dx}\big|_{x=2} = \frac{dz}{dy}\big|_{y=7}\frac{dy}{dx}\big|_{x=2} = 4\cos 7$.

(2) Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $z = \sin(x^2+3)$. Χρησιμοποιούμε την *ενδιάμεση μεταβλητή* $y = x^2+3$ και γράφουμε $z = \sin y$. Η παράγωγος συνάρτηση της $y = x^2+3$ είναι η $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(x^2+3)}{dx} = 2x$ και η παράγωγος συνάρτηση της $z = \sin y$ είναι η $\frac{dz}{dy} = \frac{d\,\sin y}{dy} = \cos y$. Άρα $\frac{d\,\sin(x^2+3)}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\big|_{y=x^2+3}\frac{dy}{dx} = \cos y\big|_{y=x^2+3}2x = 2x\cos(x^2+3)$.

(3) Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $z = (\sin x)^n$. Χρησιμοποιούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $y = \sin x$ οπότε $z = y^n$ και έχουμε ότι $\frac{d\,(\sin x)^n}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\big|_{y=\sin x}\frac{dy}{dx} = ny^{n-1}\big|_{y=\sin x}\cos x = n(\sin x)^{n-1}\cos x$.

Ε. Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης.

Πριν διατυπώσουμε τον επόμενο κανόνα θα πούμε δυο λόγια για κάτι που θα αναπτύξουμε εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα. Ας υποθέσουμε ότι η $y = f(x)$ είναι αύξουσα σε κάποιο διάστημα (a,b) και ότι έχει παράγωγο σε κάποιον ξ στο (a,b). Επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα, ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0$ για κάθε $x \neq \xi$ στο (a,b) και, επομένως, η παράγωγος $f'(\xi) = \lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ είναι είτε αριθμός ≥ 0 είτε $+\infty$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα, τότε η παράγωγος $f'(\xi)$ είναι είτε αριθμός ≤ 0 είτε $-\infty$.

Αν η συνάρτηση είναι μονότονη – αύξουσα ή φθίνουσα – στο $[\xi,b)$ ή στο $(a,\xi]$, τότε έχουμε ανάλογα συμπεράσματα για το πρόσημο των αντίστοιχων πλευρικών παραγώγων $f'_+(\xi)$ ή $f'_-(\xi)$.

Πρόταση 6.5 ***Κανόνας αντίστροφης συνάρτησης***. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε κάποιο διάστημα I το οποίο περιέχει τον ξ. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ είναι, επίσης, κάποιο διάστημα J το οποίο περιέχει τον αντίστοιχο $\eta = f(\xi)$ και ότι η αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα J. Αν η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στον ξ, τότε η $x = f^{-1}(y)$ έχει παράγωγο στον η και*

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{f'(\xi)}\,, & \text{αν } f'(\xi) \text{ είναι αριθμός} > 0, \\ 0\,, & \text{αν } f'(\xi) = +\infty, \\ +\infty\,, & \text{αν } f'(\xi) = 0. \end{cases}}$$

Αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα, τότε ισχύουν τα ίδια με τις προφανείς αλλαγές: < 0 αντί > 0 και $-\infty$ αντί $+\infty$.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε τον κανόνα της αντίστροφης απεικόνισης γράφουμε

$$\begin{aligned}\big(f^{-1}\big)'(\eta) &= \lim_{y\to\eta}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(\eta)}{y-\eta}\\ &= \lim_{x\to\xi}\frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \lim_{x\to\xi}\frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}\,.\end{aligned}$$

Το τελευταίο όριο είναι προφανώς ίσο με $\frac{1}{f'(\xi)}$, αν ο $f'(\xi)$ είναι αριθμός >0, και ίσο με 0 αν ο $f'(\xi)$ είναι $+\infty$. Στην περίπτωση που είναι $f'(\xi)=0$, ο $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ τείνει στον 0 και έχει μόνο θετικές τιμές και, επομένως, ο $\frac{1}{\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}}$ τείνει στο $+\infty$.

Με τους εναλλακτικούς συμβολισμούς ο κανόνας της αντίστροφης συνάρτησης γράφεται:

$$D(f^{-1})(\eta)=\frac{1}{Df(\xi)}\,,\qquad \frac{d\,f^{-1}(y)}{dy}\Big|_{y=\eta}=\frac{1}{\frac{d\,f(x)}{dx}\big|_{x=\xi}}\,,\qquad \frac{dx}{dy}\Big|_{y=\eta}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}\big|_{x=\xi}}\,.$$

Για τις παραγώγους συναρτήσεις γράφουμε

$$\big(f^{-1}\big)'(y)=\frac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}\,,\qquad D(f^{-1})(y)=\frac{1}{Df\big(f^{-1}(y)\big)}\,,$$

$$\frac{d\,f^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{d\,f(x)}{dx}\big|_{x=f^{-1}(y)}}\,,\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}\big|_{x=f^{-1}(y)}}\,.$$

Όπως και στον κανόνα της αλυσίδας, δεν επιτρέπεται να συντομεύσουμε τις δυο τελευταίες ισότητες σε $\frac{d\,f^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{d\,f(x)}{dx}}$ και $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ διότι η συνάρτηση $\frac{d\,f^{-1}(y)}{dy}=\frac{dx}{dy}$, δηλαδή η παράγωγος της $x=f^{-1}(y)$, έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την y ενώ η συνάρτηση $\frac{d\,f(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}$ έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την x. Χρησιμοποιούμε, όμως, και τους συντομότερους τύπους

$$\frac{d\,f^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{\frac{d\,f(x)}{dx}}\,,\qquad\qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\,,$$

έχοντας κατά νου ότι *η μεταβλητή x που προκύπτει στα δεύτερα μέλη πρέπει να αντικατασταθεί με $f^{-1}(y)$ ώστε να προκύψει τελικά η μεταβλητή y*. Ειδικά ο δεύτερος τύπος $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ είναι πολύ εύκολο να απομνημονευθεί, αφού θυμίζει τον ανάλογο τύπο απλοποίησης σύνθετου λόγου.

Ο κανόνας αντίστροφης συνάρτησης έχει το εξής γεωμετρικό περιεχόμενο. Τα γραφήματα μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι, όπως γνωρίζουμε, συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο $y=x$. Αυτό συνεπάγεται ότι *οι εφαπτόμενες ευθείες στο ένα γράφημα και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες ευθείες στο άλλο γράφημα είναι συμμετρικές ως προς την κύρια διαγώνιο*. Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι *οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών του ενός γραφήματος είναι αντίστροφες των αντίστοιχων εφαπτόμενων ευθειών του άλλου γραφήματος*. Η λόγος είναι απλός: *δυο ευθείες συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ έχουν αντίστροφες* κλίσεις.

Παραδείγματα: (1) Έχουμε ήδη αποδείξει τον τύπο $\frac{d\,\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{y}}{y}$ για την παράγωγο συνάρτηση της $x = \sqrt[n]{y}$. Θα δούμε τώρα μια δεύτερη απόδειξη βασισμένη στον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης. Η $x = \sqrt[n]{y}$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $y = x^n$, οπότε

$$\frac{d\,\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}\big|_{x=\sqrt[n]{y}}} = \frac{1}{nx^{n-1}\big|_{x=\sqrt[n]{y}}} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{y}}{y}\,.$$

Παρεμπιπτόντως, ας αναφέρουμε ότι με ένα ακόμη βήμα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, μπορούμε να αποδείξουμε με δεύτερο τρόπο τον τύπο $\frac{d\,x^a}{dx} = ax^{a-1}$ για την παράγωγο συνάρτηση της $y = x^a$ στην περίπτωση που ο a είναι ρητός. Πράγματι, αν $a = \frac{m}{n}$, όπου ο m είναι ακέραιος και ο n φυσικός, τότε ορίζουμε $u = \sqrt[n]{x}$ και $y = x^a = u^m$ και έχουμε ότι

$$\frac{d\,x^a}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\Big|_{u=\sqrt[n]{x}}\frac{du}{dx} = mu^{m-1}\Big|_{u=\sqrt[n]{x}}\cdot\frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x}$$

$$= \frac{m}{n}(\sqrt[n]{x})^{m-1}\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{m}{n}\frac{(\sqrt[n]{x})^m}{x} = ax^{a-1}\,.$$

(2) Η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το διάστημα $[-1, 1]$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι, εξ ορισμού, η $x = \arcsin y$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ με σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arcsin y$. Η παράγωγος της $y = \sin x$ είναι $\frac{d\,\sin x}{dx} = \cos x = \sqrt{1-(\sin x)^2}$ και δεν είναι ποτέ ίση με $+\infty$. Παρατηρήστε ότι από τις τιμές $\cos x = \pm\sqrt{1-(\sin x)^2}$ επιλέξαμε αυτήν με το $+$ διότι είναι $\cos x \geq 0$ για κάθε x στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Αν $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-(\sin x)^2} > 0$, τότε έχουμε

$$\frac{d\,\arcsin y}{dy} = \frac{1}{\frac{d\,\sin x}{dx}\big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}\big|_{x=\arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,.$$

Αν $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-(\sin x)^2} = 0$, τότε είναι $\frac{d\,\arcsin y}{dy} = +\infty$. Άρα

$$\boxed{\frac{d\,\arcsin y}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, & \text{αν } -1 < y < 1, \\ +\infty\,, & \text{αν } y = \pm 1. \end{cases}}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arccos y$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[0, \pi]$.

$$\boxed{\frac{d\,\arccos y}{dy} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,, & \text{αν } -1 < y < 1, \\ -\infty\,, & \text{αν } y = \pm 1. \end{cases}}$$

(3) Η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2})$ με αντίστοιχο σύνολο τιμών το διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση είναι, εξ ορισμού, η $x = \arctan y$ και είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2})$. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \arctan y$. Η παράγωγος $\frac{d\,\tan x}{dx} = \frac{1}{(\cos x)^2}$ δεν είναι ποτέ ίση με 0 ή $+\infty$, οπότε

$$\frac{d\,\arctan y}{dy} = \frac{1}{\frac{d\,\tan x}{dx}\Big|_{x=\arctan y}} = \frac{1}{\frac{1}{(\cos x)^2}\Big|_{x=\arctan y}} = (\cos x)^2\Big|_{x=\arctan y}$$

$$= \frac{1}{1+(\tan x)^2}\Big|_{x=\arctan y} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Άρα

$$\boxed{\frac{d\,\arctan y}{dy} = \frac{1}{1+y^2}\,.}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε την παράγωγο συνάρτηση της $x = \operatorname{arccot} y$, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0,\pi)$.

$$\boxed{\frac{d\,\operatorname{arc\,cot} y}{dy} = -\frac{1}{1+y^2}\,.}$$

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = x^2 - 3x + 1 - \frac{x^3+2}{x^2+1}\,,\quad y = \frac{x^3 - x + 4\sin x}{x^2 + \sin x + 2}\,,\quad y = \sin x + \tan x.$$

2. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = \sin(x^n),\quad y = (\tan x)^n\,,\quad y = \tan(x^n),\quad y = \sqrt[n]{1+\cos x}\,,$$

$$y = \frac{(\sin x)^3 - 3(\sin x)^2 + 1}{(\sin x)^2 + 4\sin x + 4}\,,\quad y = \sin(\arccos x),\quad y = \arcsin(\cos x),$$

$$y = \arctan(\tan x),\quad y = \tan(\arctan x).$$

3. Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}\,, & \text{αν } x \neq 0,\\ 0, & \text{αν } x = 0.\end{cases}$

   Έχουμε δει ότι η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο στον 0. Υπολογίστε την παράγωγο στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

4. Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}\,, & \text{αν } x \neq 0,\\ 0, & \text{αν } x = 0.\end{cases}$

   Υπολογίστε την παράγωγο στο $(-\infty,+\infty)$. Είναι η παράγωγος συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$;

5. Γενικεύστε τις δυο προηγούμενες ασκήσεις ως εξής. Για κάθε a θεωρήστε την $y = \begin{cases} x^a \sin\frac{1}{x}\,, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   Για ποιές τιμές του a είναι η συνάρτηση συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$; παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$; είναι η παράγωγος συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$;

6. Από τον τύπο $x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} - 1$ βρείτε με παραγωγίσεις ανάλογους τύπους για τα αθροίσματα $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$ και $x + 4x^2 + 9x^3 + \cdots + n^2x^n$.

7. Έστω ότι οι $y = f_1(x), \ldots, y = f_n(x)$ είναι όλες παραγωγίσιμες στον ξ και καμιά δεν έχει τιμή 0 στον ξ. Αν $g(x) = f_1(x) \cdots f_n(x)$, αποδείξτε ότι

$$\frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = \frac{{f_1}'(\xi)}{f_1(\xi)} + \cdots + \frac{{f_n}'(\xi)}{f_n(\xi)}\,.$$

8. Για ποιες ρητές συναρτήσεις $y = r(x)$ ισχύει $\lim_{x\to+\infty} \frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$;

9. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένα διάστημα (a, b) και καμιά ρητή συνάρτηση $y = r(x)$ ώστε να ισχύει $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε x στο (a, b).

   (Υπόδειξη: Με άτοπο. Μελετήστε βαθμούς.)

10. Αποδείξτε ότι η παράγωγος μιας άρτιας συνάρτησης είναι περιττή συνάρτηση και η παράγωγος μιας περιττής συνάρτησης είναι άρτια συνάρτηση.

11. Αποδείξτε ότι η παράγωγος μιας περιοδικής συνάρτησης είναι κι αυτή περιοδική συνάρτηση.

12. Μια συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ ικανοποιεί την ισότητα $f(x)^2 + 4f(x) = x^3 - 5x^2 - 5x + 21$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

    Αποδείξτε ότι είναι $(2f(x)+4)f'(x) = 3x^2 - 10x - 5$ για κάθε x στον οποίο η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

    Αποδείξτε ότι υπάρχουν τέσσερις τέτοιες συναρτήσεις και βρείτε τα πεδία ορισμού τους, τους τύπους τους και τους τύπους των παραγώγων τους.

13. Έστω η $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 7$ στο $(-\infty, +\infty)$.

    Αποδείξτε με στοιχειώδη τρόπο ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της;

    Χωρίς να υπολογίσετε την αντίστροφη συνάρτηση $x = f^{-1}(y)$, αποδείξτε ότι είναι $\left(f^{-1}\right)'(y) = \begin{cases} \frac{1}{3(f^{-1}(y)+1)^2}\,, & \text{αν } y \neq 6, \\ +\infty, & \text{αν } y = 6. \end{cases}$

    Υπολογίστε την $x = f^{-1}(y)$, το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της και επαληθεύστε την παραπάνω ισότητα.

    (Υπόδειξη για το τελευταίο: Δείτε ότι $y = (x + 1)^3 + 6$.)

14. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου έχει μήκος κ και ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Υπολογίστε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή.

15. Κάποια χρονική στιγμή η ακτίνα ενός σφαιρικού μπαλονιού έχει μήκος κ και η παροχή αέρα στο μπαλόνι έχει ρυθμό μεταβολής ως προς τον χρόνο ίσο με μ. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας ως προς τον χρόνο την ίδια χρονική στιγμή;

16. Μια μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στη μια πλευρά και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά μιας ορθής γωνίας. Αν το ένα άκρο απομακρύνεται από την κορυφή της γωνίας με ταχύτητα v (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας), βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άλλο άκρο πλησιάζει την κορυφή (παραμένοντας στην ίδια πλευρά της γωνίας). Βρείτε, επίσης, τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ενός από τα άκρα από την κορυφή ως προς την απόσταση του άλλου άκρου από την κορυφή.

17. Ένα όχημα κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^2 = 4x^3$. Σε ποια θέση του οχήματος ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της δεύτερης συντεταγμένης του (ως προς τον χρόνο); Καλό θα ήταν να *μη* λύσετε ως προς οποιαδήποτε από τις μεταβλητές x, y.

    (Υπόδειξη: Οι συντεταγμένες $x = x(t), y = y(t)$ της θέσης του οχήματος ικανοποιούν την $y^2 = 4x^3$.)

6.6 Παραδείγματα παραγώγων, II.

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε τις παραγώγους τριών σημαντικών συναρτήσεων.

Α. Αρχίζουμε με τη λογαριθμική συνάρτηση $y = \log_a x$, όπου $a > 0$, $a \neq 1$, με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x} \qquad (x > 0).}$$

Εκτός από το γνωστό όριο $\lim_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$, θα μας χρειαστεί και το $\lim_{t\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})} = \frac{1}{e\cdot 1} = \frac{1}{e}$.

Από τη συνέχεια της $y = \log_a x$ και από τα δυο προηγούμενα όρια συνεπάγεται ότι $\lim_{t\to+\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \log_a e = \frac{1}{\log a}$ και $\lim_{t\to+\infty} \log_a \left(1 - \frac{1}{t}\right)^t = \log_a \frac{1}{e} = -\log_a e = -\frac{1}{\log a}$.

Στον επόμενο υπολογισμό θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{x}{h}$.

$$\lim_{h\to 0+} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \log_a \Big(\frac{x+h}{x}\Big) = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0+} \frac{x}{h} \log_a \Big(1 + \frac{h}{x}\Big)$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t\to+\infty} t \log_a \Big(1+\frac{1}{t}\Big) = \frac{1}{x} \lim_{t\to+\infty} \log_a \Big(1+\frac{1}{t}\Big)^t = \frac{1}{\log a}\,\frac{1}{x}\,.$$

Επίσης, στον επόμενο υπολογισμό θα κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = -\frac{x}{h}$.

$$\lim_{h\to 0-} \frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{1}{h} \log_a \Big(\frac{x+h}{x}\Big) = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0-} \frac{x}{h} \log_a \Big(1+\frac{h}{x}\Big)$$

$$= -\frac{1}{x} \lim_{t\to+\infty} t \log_a \Big(1-\frac{1}{t}\Big) = -\frac{1}{x} \lim_{t\to+\infty} \log_a \Big(1-\frac{1}{t}\Big)^t = \frac{1}{\log a}\,\frac{1}{x}\,.$$

Άρα $\frac{d\,\log_a x}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$.

Ειδική περίπτωση της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης είναι η

$$\frac{d\,\log x}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (x>0).$$

Παράδειγμα: Θα δούμε ότι

$$\frac{d\,\log|x|}{dx} = \frac{1}{x} \qquad (x\neq 0).$$

Πράγματι στο $(0,+\infty)$ έχουμε $\frac{d\,\log|x|}{dx} = \frac{d\,\log x}{dx} = \frac{1}{x}$ και στο $(-\infty,0)$ έχουμε $\frac{d\,\log|x|}{dx} = \frac{d\,\log(-x)}{dx} = \frac{1}{-x}\,(-1) = \frac{1}{x}$ από τον κανόνα της αλυσίδας.

Β. Η επόμενη παράγωγος που θα υπολογίσουμε είναι της εκθετικής συνάρτησης $y=a^x$, όπου $a>0$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$. Ο τύπος είναι:

$$\boxed{\frac{d\,a^x}{dx} = a^x \log a.}$$

Αν $a>0$, $a\neq 1$, χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αντίστροφης συνάρτησης. Η αντίστροφη συνάρτηση της $y=a^x$ είναι η $x=\log_a y$ και, επομένως,

$$\frac{d\,a^x}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}\big|_{y=a^x}} = \frac{1}{\frac{1}{\log a}\frac{1}{y}\big|_{y=a^x}} = a^x \log a.$$

Αν $a=1$, η $y=1^x=1$ είναι σταθερή και έχει παράγωγο μηδέν. Αλλά και η παράσταση $1^x \log 1$ είναι ίση με μηδέν και, επομένως, ισχύει ο τύπος της παραγώγου και σ' αυτή την περίπτωση.

Ως ειδική περίπτωση έχουμε την παράγωγο της $y=e^x$:

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x\,.$$

Γ. Τέλος, θα υπολογίσουμε την παράγωγο της $y=x^a$ όταν ο a είναι *άρρητος*. Σ' αυτήν την περίπτωση η $y=x^a$ έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$, αν $a>0$, ή το $(0,+\infty)$, αν $a<0$. Θα δούμε ότι

$$\boxed{\frac{d\,x^a}{dx} = ax^{a-1} \qquad \begin{pmatrix} a \text{ άρρητος} > 1,\ x \geq 0 \\ a \text{ άρρητος} < 1,\ x > 0. \end{pmatrix}}$$

Έστω $x > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα $y = x^a = e^{\log(x^a)} = e^{a\log x}$ και τον κανόνα της αλυσίδας. Θεωρούμε την ενδιάμεση μεταβλητή $z = a\log x$, οπότε είναι $y = e^z$ και

$$\frac{d\,x^a}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\Big|_{z=a\log x}\frac{dz}{dx} = e^z\Big|_{z=a\log x}\frac{a}{x} = e^{a\log x}\frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}\,.$$

Αν ο a είναι άρρητος < 0, η $y = x^a$ δεν ορίζεται καν στον 0. Αν ο a είναι άρρητος και $0 < a < 1$, τότε $\frac{d\,x^a}{dx}\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^a-0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} = +\infty$. Τέλος, αν ο a είναι άρρητος και $a > 1$, τότε $\frac{d\,x^a}{dx}\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^a-0^a}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} = 0 = a0^{a-1}$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = x\log x, \quad y = \log\big|\log|x|\big|, \quad y = \log\big(e^{3x^2+4} + \sin\big(x^{-\frac{5}{4}}\big)\big),$$

$$y = 2^{x^2+1}\log_3(\sin x), \quad y = 3^{-\sin(\log x)}\,, \quad y = \sin\Big(e^{\sqrt{\log(x^2+1)}}\Big).$$

2. Παρατηρήστε ότι τα παρακάτω όρια είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία και *ως τέτοιες* υπολογίστε τα.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}\,, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\,, \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x-1}\,.$$

Βάσει των ορίων αυτών αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x^a-1} = \frac{1}{a}\,, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^a-x^b}{x-1} = a-b, \quad \lim_{x\to 1}\frac{x^a-x^b}{\log x} = a-b,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x} = \log\frac{a}{b}\,, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = a-b, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tanh(ax)}{x} = a.$$

3. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ορισμένες στο διάστημα (a,b), ότι $a < \xi < b$ και $f(x) > 0$ για κάθε x στο (a,b).

Αν οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στον ξ, αποδείξτε ότι και η $y = f(x)^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και υπολογίστε την παράγωγό της στον ξ.

Υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = x^x\,, \quad y = (x^2+1)^{\sin x}\,, \quad y = |x-1|^{x-2}|x-2|^{x-1}\,.$$

4. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x, \qquad \frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x,$$

$$\frac{d\tanh x}{dx} = \frac{1}{(\cosh x)^2}, \qquad \frac{d\coth x}{dx} = -\frac{1}{(\sinh x)^2} \quad (x \neq 0).$$

5. Αποδείξτε ότι

$$\frac{d\,\mathrm{arccosh}\, y}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, & \text{αν } y > 1, \\ +\infty, & \text{αν } y = 1, \end{cases} \qquad \frac{d\,\mathrm{arcsinh}\, y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}},$$

$$\frac{d\,\mathrm{arctanh}\, y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad (|y| < 1), \qquad \frac{d\,\mathrm{arccoth}\, y}{dy} = \frac{1}{1-y^2} \quad (|y| > 1).$$

6.7 Καμπύλες και εφαπτόμενες ευθείες.

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ *συνεχείς* σε κάποιο διάστημα I της μεταβλητής t. Το σύνολο C των σημείων $(x, y) = (x(t), y(t))$ του επιπέδου, όταν η μεταβλητή t διατρέχει το διάστημα I, χαρακτηρίζεται **καμπύλη στο επίπεδο**. Ανάλογα με το πόσα από τα άκρα του περιέχει το I μιλάμε για καμπύλη C χωρίς άκρα ή για καμπύλη με ένα άκρο ή για καμπύλη με δυο άκρα.

Ας υπενθυμίσουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε σύμβολο αντί του t για την ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλαδή $(x, y) = (x(u), y(u))$, $(x, y) = (x(s), y(s))$ κλπ.

Οι συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ που περιγράφουν την καμπύλη C ονομάζονται, παραδοσιακά, **παραμετρικές εξισώσεις** της καμπύλης και η μεταβλητή t ονομάζεται **παράμετρος** της καμπύλης.

Σ' αυτήν την ενότητα δε θα ασχοληθούμε με οποιαδήποτε μεθοδική παρουσίαση της θεωρίας των καμπυλών, αλλά θα δούμε μόνο κάποια απλά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) Έστω ότι $x = x(t) = \kappa t + \lambda$ και $y = y(t) = \mu t + \nu$ για κάθε t στο $(-\infty, +\infty)$, όπου ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς κ, μ είναι $\neq 0$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι – ως συνεχείς – οι παραμετρικές εξισώσεις κάποιας καμπύλης C. Θα δούμε αμέσως ότι η καμπύλη αυτή είναι μια ευθεία στο επίπεδο και, αντιστρόφως, ότι κάθε ευθεία στο επίπεδο μπορεί να περιγραφεί με ένα ζευγάρι τέτοιων παραμετρικών εξισώσεων, μπορεί, δηλαδή, να **παραμετρικοποιηθεί**.

Πράγματι, απαλείφοντας την παράμετρο t, βρίσκουμε εύκολα ότι τα σημεία της καμπύλης C ικανοποιούν την εξίσωση $\mu x - \kappa y = \mu\lambda - \kappa\nu$. Επίσης, αν κάποιο σημείο (x, y) ικανοποιεί την $\mu x - \kappa y = \mu\lambda - \kappa\nu$ και είναι, για παράδειγμα, $\kappa \neq 0$, τότε θέτουμε $t = \frac{1}{\kappa}x - \frac{\lambda}{\kappa}$ και βρίσκουμε ότι γι αυτήν την τιμή του t είναι $x = \kappa t + \lambda$ και $y = \mu t + \nu$. Με άλλα λόγια, βλέπουμε ότι η καμπύλη C είναι ακριβώς το σύνολο των σημείων (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση $\mu x - \kappa y = \mu\lambda - \kappa\nu$. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και αν $\mu \neq 0$. Τώρα, όμως, γνωρίζουμε ότι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση $\mu x - \kappa y = \mu\lambda - \kappa\nu$ είναι μια ευθεία l στο επίπεδο: αν $\kappa \neq 0$, τότε η τελευταία εξίσωση γράφεται $y = y(x) = \frac{\mu}{\kappa}x + \frac{\kappa\nu - \mu\lambda}{\kappa}$

ενώ, αν $\mu \neq 0$, τότε η ίδια εξίσωση γράφεται $x = x(y) = \frac{\kappa}{\mu} y + \frac{\mu\lambda - \kappa\nu}{\mu}$. Ειδικώτερα, αν $\kappa \neq 0$ και $\mu \neq 0$, τότε και οι δυο τελευταίες εξισώσεις περιγράφουν την ευθεία, η οποία δεν είναι ούτε οριζόντια ούτε κατακόρυφη. Αν $\kappa = 0$, τότε μόνο η δεύτερη εξίσωση, που γίνεται $x = \lambda$, περιγράφει την ευθεία, η οποία είναι κατακόρυφη. Αν $\mu = 0$, τότε μόνο η πρώτη εξίσωση, που γίνεται $y = \nu$, περιγράφει την ευθεία, η οποία είναι οριζόντια. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι η καμπύλη C είναι ίδια με την ευθεία l.

Αντιστρόφως, ας θεωρήσουμε οποιαδήποτε ευθεία l στο επίπεδο με εξίσωση

$$ax + by = c,$$

όπου ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς a, b είναι $\neq 0$. Θέτουμε $\kappa = -b$, $\mu = a$ και βρίσκουμε λ, ν ώστε να είναι $\mu\lambda - \kappa\nu = c$. Όπως είδαμε προηγουμένως, η καμπύλη C με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = \kappa t + \lambda$ και $y = y(t) = \mu t + \nu$ είναι η ίδια με την ευθεία l.

Στους $t = 0$ και $t = 1$ αντιστοιχούν τα σημεία $A_0 = (\lambda, \nu)$ και $A_1 = (\kappa + \lambda, \mu + \nu)$ της ευθείας που μελετάμε και αυτά ορίζουν το διάνυσμα $\overrightarrow{A_0A_1} = (\kappa, \mu)$ που χαρακτηρίζεται **διάνυσμα κατεύθυνσης** της ευθείας – είναι παράλληλο με την ευθεία και δείχνει την κατεύθυνση από μικρότερες προς μεγαλύτερες τιμές του t.

Ένας ακόμη τρόπος να περιγράψουμε την ευθεία με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = \kappa t + \lambda$ και $y = y(t) = \mu t + \nu$ είναι να συνδυάσουμε τις δυο αυτές εξισώσεις σε μια **παραμετρική διανυσματική εξίσωση**, την $(x, y) = (\kappa t + \lambda, \mu t + \nu) = (\kappa, \mu)t + (\lambda, \nu)$. Με αυτόν τον τρόπο φαίνεται ότι η ευθεία αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του διανύσματος κατεύθυνσης (κ, μ) μετατοπισμένα ώστε να έχουν αρχή το σημείο (λ, ν) ή, με άλλα λόγια, η ευθεία είναι παράλληλη στο διάνυσμα κατεύθυνσης (κ, μ) και διέρχεται (για $t = 0$) από το σημείο (λ, ν).

Αν ο t διατρέχει κάποιο υποδιάστημα του $(-\infty, +\infty)$, τότε το σημείο $(x, y) = (\kappa t + \lambda, \mu t + \nu)$ διατρέχει κάποιο αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας.

(2) Αν $x = x(t) = r_0 \cos t + x_0$ και $y = y(t) = r_0 \sin t + y_0$ για κάθε t σε κάποιο διάστημα $I = [t_0, t_0 + 2\pi]$ μήκους 2π, με $r_0 > 0$, τότε η καμπύλη που ορίζεται είναι ο κύκλος κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r_0. Πράγματι, τα σημεία $(x, y) = (r_0 \cos t + x_0, r_0 \sin t + y_0)$ ικανοποιούν την

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = {r_0}^2$$

και, αντιστρόφως, κάθε σημείο (x, y) που ικανοποιεί την $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = {r_0}^2$ γράφεται $(x, y) = (r_0 \cos t + x_0, r_0 \sin t + y_0)$ για κατάλληλο t στο I. Μπορούμε, δηλαδή, να πούμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = r_0 \cos t + x_0$ και $y = y(t) = r_0 \sin t + y_0$ *παραμετρικοποιούν* τον κύκλο με εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = {r_0}^2$. Μάλιστα, καθώς ο t διατρέχει το διάστημα I από τα αριστερά προς τα δεξιά, το αντίστοιχο σημείο $(x, y) = (r_0 \cos t + x_0, r_0 \sin t + y_0)$ κάνει μια ακριβώς πλήρη περιστροφή πάνω στον κύκλο με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Αν ο t διατρέχει ένα διάστημα μήκους $< 2\pi$, το σημείο $(x, y) = (r_0 \cos t + x_0, r_0 \sin t + y_0)$ διατρέχει ένα τόξο του κύκλου.

(3) Αν είναι $x = x(t) = \kappa_0 \cos t + x_0$ και $y = y(t) = \mu_0 \sin t + y_0$ για κάθε t

σε κάποιο διάστημα $I = [t_0, t_0 + 2\pi]$ μήκους 2π, με $\kappa_0, \mu_0 > 0$, τότε η καμπύλη που ορίζεται είναι η **έλλειψη** με κέντρο συμμετρίας το σημείο (x_0, y_0) και μήκη αξόνων $2\kappa_0$ και $2\mu_0$. Το ότι η καμπύλη είναι έλλειψη φαίνεται από το ότι τα σημεία $(x, y) = (\kappa_0 \cos t + x_0, \mu_0 \sin t + y_0)$ ικανοποιούν την

$$\Big(\frac{x - x_0}{\kappa_0}\Big)^2 + \Big(\frac{y - y_0}{\mu_0}\Big)^2 = 1$$

και από το αντίστροφο. Επομένως, οι παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = \kappa_0 \cos t + x_0$ και $y = \mu_0 \sin t + y_0$ *παραμετρικοποιούν* την έλλειψη με εξίσωση $(\frac{x-x_0}{\kappa_0})^2 + (\frac{y-y_0}{\mu_0})^2 = 1$. Καθώς ο t διατρέχει το διάστημα I από τα αριστερά προς τα δεξιά, το αντίστοιχο σημείο $(x, y) = (\kappa_0 \cos t + x_0, \mu_0 \sin t + y_0)$ κάνει μια ακριβώς πλήρη περιστροφή πάνω στην έλλειψη με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Αν ο t διατρέχει ένα διάστημα μήκους $< 2\pi$, το σημείο $(x, y) = (\kappa_0 \cos t + x_0, \mu_0 \sin t + y_0)$ διατρέχει ένα τόξο της έλλειψης.

(4) Το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ σε κάποιο διάστημα I, δηλαδή το σύνολο των σημείων $(x, y) = (x, f(x))$ καθώς ο x διατρέχει το διάστημα I, είναι παράδειγμα καμπύλης στο επίπεδο. Πράγματι, μπορούμε να *παραμετρικοποιήσουμε* το γράφημα αυτό με τις παραμετρικές εξισώσεις $x = t$ και $y = f(t)$ με τον t να διατρέχει το διάστημα I.

Ομοίως, το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $x = g(y)$ σε κάποιο διάστημα I είναι καμπύλη στο επίπεδο, αφού μπορούμε να *παραμετρικοποιήσουμε* το γράφημα αυτό με τις παραμετρικές εξισώσεις $x = g(t)$ και $y = t$ με τον t να διατρέχει το διάστημα I.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται μια **καμπύλη στον χώρο**. Αν $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $z = z(t)$ είναι τρεις *συνεχείς* συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I της μεταβλητής t, τότε το σύνολο των σημείων $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ του χώρου, όταν η μεταβλητή t διατρέχει το διάστημα I, χαρακτηρίζεται *καμπύλη στον χώρο*.

Παραδείγματα: (1) Οι $x = x(t) = \kappa t + \lambda$, $y = y(t) = \mu t + \nu$ και $z = z(t) = \rho t + \sigma$ για κάθε t στο $(-\infty, +\infty)$, όπου ένας τουλάχιστον από τους κ, μ, ρ είναι $\neq 0$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις μιας ευθείας στον χώρο. Μπορούμε να συνδυάσουμε τις τρεις παραμετρικές εξισώσεις σε μια διανυσματική παραμετρική εξίσωση, την $(x, y, z) = (\kappa, \mu, \rho)t + (\lambda, \nu, \sigma)$, από την οποία διακρίνεται ότι η ευθεία είναι παράλληλη στο **διάνυσμα κατεύθυνσης** (κ, μ, ρ) και διέρχεται (για $t = 0$) από το σημείο (λ, ν, σ).

(2) Οι $x = x(t) = r_0 \cos t + x_0$, $y = y(t) = r_0 \sin t + y_0$ και $z = z(t) = \frac{h_0}{2\pi} t + z_0$ για t στο $(-\infty, +\infty)$, με $r_0 > 0$ και $h_0 > 0$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις μιας «ελικοειδούς» καμπύλης, η οποία είναι υποσύνολο μιας κυλινδρικής επιφάνειας. Όταν ο t διατρέχει οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π από τα αριστερά προς τα δεξιά, τότε το ζευγάρι $(x, y) = (r_0 \cos t + x_0, r_0 \sin t + y_0)$ κάνει μια πλήρη περιστροφή με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού στο xy-επίπεδο πάνω στον κύκλο με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r_0 και, ταυτόχρονα, ο z διατρέχει ένα διάστημα μήκους h_0 – το *βήμα* της ελικοειδούς καμπύλης – από τα κάτω προς τα πάνω. Επομένως, το σημείο (x, y, z) κάνει μια *περιστροφική και, ταυτόχρονα, κατακόρυφη*

κίνηση σε σταθερή απόσταση r_0 από την ευθεία l που τέμνει κάθετα το xy-επίπεδο στο σημείο $(x_0, y_0, 0)$.

Ας βρούμε, τώρα, την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε μια καμπύλη στο επίπεδο ή στον χώρο σε κάποιο σημείο της.

Έστω, λοιπόν, η καμπύλη στο επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στο διάστημα I της μεταβλητής t. Έστω, επίσης, το σημείο $(x(\tau), y(\tau))$ που αντιστοιχεί στο εσωτερικό σημείο τ του I. Θεωρούμε κάποιο *κοντινό* σημείο $\tau + h$ στο I, όπου h είναι αρκετά μικρός αριθμός, θετικός ή αρνητικός, και το αντίστοιχο σημείο $(x(\tau + h), y(\tau + h))$ της καμπύλης. Η ευθεία η οποία περιέχει αυτά τα δυο σημεία έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x(t) = \frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h}(t - \tau) + x(\tau),$$

$$y = y(t) = \frac{y(\tau + h) - y(\tau)}{h}(t - \tau) + y(\tau).$$

Όταν ο h πλησιάζει αρκετά τον 0, η ευθεία αυτή τείνει να ταυτιστεί με την εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη στο σημείο της $(x(\tau), y(\tau))$, οπότε είναι, τώρα, φανερό ότι αυτή η εφαπτόμενη ευθεία έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$\boxed{\text{εξισώσεις εφαπτόμενης ευθείας:} \qquad \begin{array}{c} x = x(t) = x'(\tau)(t - \tau) + x(\tau), \\ y = y(t) = y'(\tau)(t - \tau) + y(\tau). \end{array}}$$

Με απαλοιφή του t βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στη μορφή

$$\boxed{\text{εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας:} \qquad x'(\tau)\big(y - y(\tau)\big) = y'(\tau)\big(x - x(\tau)\big).}$$

Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας είναι το

$$(x'(\tau), y'(\tau)).$$

Αυτό το διάνυσμα ονομάζεται **διανυσματική παράγωγος** της **διανυσματικής συνάρτησης** $(x(t), y(t))$ στον $t = \tau$ και, φυσικά, προκύπτει παραγωγίζοντας κάθε συντεταγμένη ξεχωριστά. Για να ορίζεται ευθεία από τις $x = x(t) = x'(\tau)(t - \tau) + x(\tau)$ και $y = y(t) = y'(\tau)(t - \tau) + y(\tau)$ πρέπει ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $x'(\tau), y'(\tau)$ να είναι $\neq 0$. Διαφορετικά, η ευθεία εκφυλίζεται στο σημείο $x = x(\tau), y = y(\tau)$.

Αν ο τ είναι άκρο του διαστήματος I, τότε αναφερόμαστε σε εφαπτόμενη *ημιευθεία* και η παράμετρος t στις εξισώσεις της εφαπτόμενης ημιευθείας περιορίζεται σε τιμές $\geq \tau$, αν ο τ είναι αριστερό άκρο του I, ή τιμές $\leq \tau$, αν ο τ είναι δεξιό άκρο.

Με εντελώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι, αν μια καμπύλη στον χώρο ορίζεται από τις συνεχείς συναρτήσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$ και $z = z(t)$ στο διάστημα I της μεταβλητής t, τότε η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη στο σημείο της $(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ ορίζεται από τις συναρτήσεις

εξισώσεις εφαπτόμενης ευθείας:	$x = x(t) = x'(\tau)(t-\tau) + x(\tau),$ $y = y(t) = y'(\tau)(t-\tau) + y(\tau),$ $z = z(t) = z'(\tau)(t-\tau) + z(\tau).$

Το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας είναι το

$$(x'(\tau), y'(\tau), z'(\tau))$$

και ονομάζεται **διανυσματική παράγωγος** της **διανυσματικής συνάρτησης** $(x(t), y(t), z(t))$ στον $t = \tau$. Πάλι, για να ορίζεται ευθεία από τις παραπάνω συναρτήσεις πρέπει ένας τουλάχιστον από τους $x'(\tau), y'(\tau), z'(\tau)$ να είναι $\neq 0$.

Παραδείγματα: (1) Οι παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = t\cos t$, $y = y(t) = \sin t$ για t στο $(-\infty, +\infty)$ ορίζουν μια καμπύλη στο επίπεδο. Η εφαπτόμενη ευθεία της καμπύλης αυτής στο σημείο $(x(0), y(0)) = (0, 0)$ έχει παραμετρικές εξισώσεις $x = x'(0)(t-0)+x(0) = t$, $y = y'(0)(t-0)+y(0) = t$. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι (μετά από απαλοιφή του t) η $y = x$. Το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας είναι το $(x'(0), y'(0)) = (1, 1)$.

(2) Οι παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = t$, $y = y(t) = t^2$, $z = z(t) = t^3$ για t στο $(-\infty, +\infty)$ ορίζουν μια καμπύλη στον χώρο. Η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x(1), y(1), z(1)) = (1, 1, 1)$ έχει παραμετρικές εξισώσεις $x = x'(1)(t-1)+x(1) = t$, $y = y'(1)(t-1)+y(1) = 2t-1$, $z = z'(1)(t-1)+z(1) = 3t-2$. Το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας είναι το $(x'(1), y'(1), z'(1)) = (1, 2, 3)$.

(3) Ας θεωρήσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ (x στο I) ως καμπύλη με τις παραμετρικές εξισώσεις $x = t$ και $y = f(t)$ με t στο I.

Γνωρίζουμε ήδη από προηγούμενες ενότητες ότι η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ είναι η $y = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για x στο $(-\infty, +\infty)$.

Μόλις τώρα μάθαμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις της ίδιας εφαπτόμενης ευθείας είναι οι $x = 1\cdot(t-\xi)+\xi$ και $y = f'(\xi)(t-\xi)+f(\xi)$ για t στο $(-\infty, +\infty)$. Αυτές γράφονται $x = t$ και $y = f'(\xi)(t-\xi)+f(\xi)$ για t στο $(-\infty, +\infty)$ και, απαλείφοντας τον t, καταλήγουμε στην $y = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για x στο $(-\infty, +\infty)$.

Επομένως, και με τους δυο τρόπους βρίσκουμε την ίδια εξίσωση.

Ασκήσεις.

1. Ελέγξτε με τους τύπους το προφανές: η εφαπτόμενη ευθεία σε μια ευθεία σε οποιοδήποτε σημείο της είναι η ίδια ευθεία.

2. Βρείτε τις εξισώσεις και το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας μιας έλλειψης σε κάθε σημείο της.

3. Βρείτε τις εξισώσεις και το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας σε κάθε σημείο της (κυλινδρικής) ελικοειδούς καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = r_0\cos t + x_0$, $y = y(t) = r_0\sin t + y_0$ και $z = z(t) = \frac{h_0}{2\pi}t + z_0$ για t στο $(-\infty, +\infty)$, με $r_0 > 0$ και $h_0 > 0$.

4. Βρείτε τις εξισώσεις και το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας σε κάθε σημείο της (κωνικής) ελικοειδούς καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = r_0 t \cos t + x_0$, $y = y(t) = r_0 t \sin t + y_0$ και $z = z(t) = \frac{h_0}{2\pi} t + z_0$ για t στο $(-\infty, +\infty)$, με $r_0 > 0$ και $h_0 > 0$.

5. Έστω $a > 0$. Θεωρήστε το σύνολο των (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση
$$x^2 - y^2 = a^2 \,.$$
Αποδείξτε ότι το σύνολο αυτό αποτελείται από δυο καμπύλες από τις οποίες η μια παραμετρικοποιείται με τις εξισώσεις $x = \sqrt{t^2 + a^2}$ και $y = t$ με τον t να διατρέχει το $(-\infty, +\infty)$ και η άλλη με τις εξισώσεις $x = -\sqrt{t^2 + a^2}$ και $y = t$ με τον t να διατρέχει το $(-\infty, +\infty)$.

   Αποδείξτε ότι οι ίδιες καμπύλες παραμετρικοποιούνται η μια με τις εξισώσεις $x = x(t) = a \cosh t$ και $y = y(t) = a \sinh t$ με τον t να διατρέχει το $(-\infty, +\infty)$ και η άλλη με τις εξισώσεις $x = x(t) = -a \cosh t$ και $y = y(t) = a \sinh t$ με τον t να διατρέχει και πάλι το $(-\infty, +\infty)$.

   Χρησιμοποιώντας και τις δυο παραμετρικοποιήσεις, βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις και το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας σε καθεμιά από τις δυο καμπύλες σε κάθε σημείο της. Αποδείξτε αυτό που πρέπει να ισχύει: χρησιμοποιώντας τις παραπάνω δυο διαφορετικές παραμετρικοποιήσεις, σε οποιοδήποτε σημείο των δυο καμπυλών βρίσκουμε την *ίδια* εφαπτόμενη ευθεία.

6. Αποδείξτε ότι το σύνολο των (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση
$$xy = b,$$
με $b \neq 0$, αποτελείται από δυο καμπύλες από τις οποίες η μια παραμετρικοποιείται είτε με τις εξισώσεις $x = x(t) = t$ και $y = y(t) = \frac{b}{t}$ είτε με τις $x = x(t) = \frac{b}{t}$ και $y = t$ για t στο $(0, +\infty)$ και η άλλη παραμετρικοποιείται με τις ίδιες εξισώσεις για t στο $(-\infty, 0)$.

   Βρείτε τις εξισώσεις και το διάνυσμα κατεύθυνσης της εφαπτόμενης ευθείας σε καθεμιά από τις δυο καμπύλες σε κάθε σημείο της.

7. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε από τις δυο καμπύλες με εξίσωση $x^2 - y^2 = a^2\,(a > 0)$ και οποιαδήποτε από τις δυο καμπύλες με εξίσωση $xy = b\,(b \neq 0)$ τέμνονται κάθετα, δηλαδή ότι σε οποιοδήποτε σημείο τομής των καμπυλών αυτών οι δυο εφαπτόμενες ευθείες στις καμπύλες αυτές είναι κάθετες.

8. Οι εξισώσεις $x = x(t) = t^3$ και $y = y(t) = t^4$ για t στο $(-\infty, +\infty)$ παραμετρικοποιούν, προφανώς, το σύνολο C των σημείων (t^3, t^4).

   Αποδείξτε ότι με τις συγκεκριμένες παραμετρικές εξισώσεις δεν ορίζεται εφαπτόμενη ευθεία στο σύνολο C στο σημείο του $(0, 0)$.

   Αποδείξτε ότι το ίδιο σύνολο σημείων, παραμετρικοποιείται και με τις εξισώσεις $x = x(s) = s$ και $y = y(s) = s^{\frac{4}{3}}$ για s στο $(-\infty, +\infty)$.

   Ορίζουν οι νέες παραμετρικές εξισώσεις εφαπτόμενη ευθεία στο C στο σημείο του $(0, 0)$;

6.8 Τέσσερα σημαντικά θεωρήματα.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και έστω ξ στο (a, b). Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού μεγίστου** της $y = f(x)$ αν υπάρχει κάποιο πιθανόν μικρότερο διάστημα (c, d), το οποίο, επίσης, περιέχει τον ξ, ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε x στο (c, d). Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο $[\xi, b)$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (a, ξ), τότε ο ξ χαρακτηρίζεται και πάλι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$ αν υπάρχει κάποιο πιθανόν μικρότερο διάστημα $[\xi, d)$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε x στο $[\xi, d)$. Τέλος, αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο $(a, \xi]$ αλλά σε κανένα σημείο κάποιου (ξ, b), τότε ο ξ χαρακτηρίζεται και πάλι σημείο τοπικού μεγίστου της συνάρτησης αν υπάρχει κάποιο πιθανόν μικρότερο διάστημα $(c, \xi]$ ώστε να ισχύει $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε x στο $(c, \xi]$.

Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ελαχίστου** της $y = f(x)$ αν ισχύουν όσα περιέχονται στην προηγούμενη παράγραφο αλλά με την ανισότητα $f(x) \geq f(\xi)$ αντί της $f(x) \leq f(\xi)$.

Με άλλα λόγια, ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της $y = f(x)$ αν η τιμή που αυτή παίρνει στον ξ είναι μέγιστη ή ελάχιστη, αντιστοίχως, ανάμεσα σε όλες τις άλλες τιμές που παίρνει *κοντά* στον ξ.

Ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο τοπικού ακροτάτου** της $y = f(x)$ αν είναι σημείο είτε τοπικού μεγίστου είτε τοπικού ελαχίστου.

Είναι προφανές ότι, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει μέγιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) μεγίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού μεγίστου. Ομοίως, αν σε κάποιο σημείο μια συνάρτηση έχει ελάχιστη τιμή, οπότε αυτό χαρακτηρίζεται **σημείο (ολικού) ελαχίστου**, τότε αυτό είναι και σημείο τοπικού ελαχίστου.

Στο γράφημα της $y = f(x)$ ένα σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου ξ διακρίνεται ως εξής: το (έστω και μικρό) μέρος του γραφήματος *κοντά* στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω ή κάτω, αντιστοίχως, από την οριζόντια ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Παραδείγματα: (1) Ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = 1 + x^2(x+1)$, διότι η τιμή της συνάρτησης στον 0 είναι 1 και ισχύει $1 + x^2(x+1) \geq 1$ για κάθε x στο διάστημα $(-1, +\infty)$ το οποίο περιέχει τον 0. Ο 0 δεν είναι σημείο (ολικού) ελαχίστου, διότι υπάρχουν τιμές της συνάρτησης < 1. Για παράδειγμα, η τιμή στον -2 είναι $-3 < 1$ και, εξ άλλου, είναι $\lim_{x \to -\infty}(1 + x^2(x+1)) = -\infty$.

(2) Ο 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = x - \sqrt{x}$ στο $[0, +\infty)$, διότι η τιμή της συνάρτησης στον 0 είναι 0 και ισχύει $x - \sqrt{x} \leq 0$ στο διάστημα $[0, 1)$. Ο 0 δεν είναι σημείο (ολικού) μεγίστου, αφού υπάρχουν τιμές της συνάρτησης > 0.

(3) Από τα γραφήματα συναρτήσεων που συναντάμε συνήθως δημιουργείται η εντύπωση ότι, αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει ένα τουλάχιστον από τα άκρα του, τότε το άκρο αυτό είναι αυτομάτως σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης. Θεωρήστε, όμως, τη συνάρτηση

$$y = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

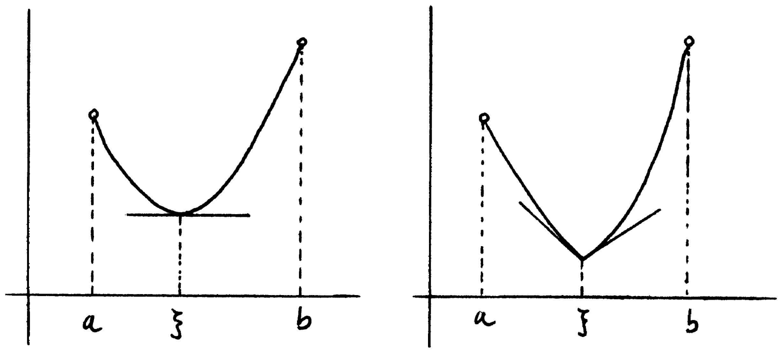
η οποία είναι ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$.

Είναι ιδιαίτερα διδακτικό να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης αυτής. Παρεμπιπτόντως, ξαναδείτε τις ασκήσεις 6, 7 και 8 της ενότητας 3.10, τις ασκήσεις 7 και 8 της ενότητας 4.8, τις ασκήσεις Α2 και Α3 της ενότητας 5.5, το σχετικό παράδειγμα στην ενότητα 6.2, τις ασκήσεις 6 και 7 της ενότητας 6.4 και τις ασκήσεις 3, 4 και 5 της ενότητας 6.5.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στον 0, διότι $\lim_{x\to 0+} x\sin\frac{1}{x}=0$. Παρατηρούμε ότι στα σημεία $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n2\pi}$ $(n\in\mathbf{Z}, n\geq 0)$ είναι $x\sin\frac{1}{x}=x>0$ ενώ στα σημεία $x=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+n2\pi}$ $(n\in\mathbf{Z}, n\geq 0)$ είναι $x\sin\frac{1}{x}=-x<0$. Αν ο ακέραιος n γίνει αρκετά μεγάλος θετικός, τα σημεία αυτά πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά τον 0. Επομένως, όσο μικρό κι είναι ένα διάστημα $[0,d)$, υπάρχουν σημεία του στα οποία η συνάρτηση παίρνει τιμές μεγαλύτερες και τιμές μικρότερες από την τιμή της στον 0. Άρα ο 0 *δεν* είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης.

Το πρώτο σημαντικό θεώρημα είναι το εξής.

Θεώρημα 6.1 ***Θεώρημα του Fermat.*** *Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a,b) και έστω ξ στο (a,b). Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y=f(x)$, τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η παράγωγος της $y=f(x)$ στον ξ,
(ii) είτε υπάρχει η παράγωγος της $y=f(x)$ στον ξ και ισχύει $f'(\xi)=0$.



Σχήμα 6.6: Το Θεώρημα του Fermat.

Απόδειξη: Έστω ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y=f(x)$. Δηλαδή υπάρχει υποδιάστημα (c,d) του (a,b) το οποίο περιέχει τον ξ και είναι $f(x)\leq f(\xi)$ για κάθε x στο (c,d). Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το (i), δηλαδή έστω ότι υπάρχει η παράγωγος $f'(\xi)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν οι $f'_+(\xi)$ και $f'_-(\xi)$ και είναι ίσες με την $f'(\xi)$ – και είναι κατ' αρχάς πιθανό η κοινή τιμή τους να είναι ένα από τα $\pm\infty$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε x στο διάστημα (ξ,d) είναι $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leq 0$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $f'(\xi)=f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leq 0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι για κάθε x στο διάστημα (c,ξ) είναι $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geq 0$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $f'(\xi)=f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geq 0$. Από τις δυο ανισότητες συνεπάγεται ότι $f'(\xi)=0$ και, επομένως, ισχύει το (ii).

Αν ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου, τότε επαναλαμβάνουμε τους ίδιους συλλογισμούς, αντικαθιστώντας το ≥ 0 με το ≤ 0 και αντιστρόφως.

Το γεωμετρικό περιεχόμενο του Θεωρήματος του Fermat είναι το εξής. Αν η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο *ανοικτό* διάστημα που περιέχει τον ξ και ο ξ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$, τότε *είτε δεν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο* $(\xi, f(\xi))$ *είτε υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία και η κλίση της είναι ίση με* 0*, δηλαδή είναι οριζόντια.*

Παραδείγματα: (1) Ο 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = |x|$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αλλά η συνάρτηση αυτή δεν έχει παράγωγο στον 0.

(2) Ο 0 είναι το μοναδικό σημείο (ολικού) ελαχίστου της συνάρτησης $y = x^2$, η οποία είναι ορισμένη στο $(-\infty, +\infty)$, και η παράγωγος της συνάρτησης στον 0 είναι, πράγματι, ίση με $\frac{dx^2}{dx}\big|_{x=0} = 2x\big|_{x=0} = 0$.

Το Θεώρημα του Fermat μας δίνει το εξής πόρισμα.

Αν θέλουμε να βρούμε τα σημεία τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα, τότε αρκεί να τα ψάξουμε ανάμεσα στα παρακάτω σημεία: τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος, τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν έχει παράγωγο και τα σημεία στα οποία η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με 0. Κανένα άλλο σημείο δεν είναι υποψήφιο σημείο τοπικού ακροτάτου.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ στο διάστημα $[0, 4]$. Η παράγωγος είναι η $y = \frac{d(2x^3-9x^2+12x+5)}{dx} = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$, οπότε τα μόνα υποψήφια σημεία τοπικού ακροτάτου της συνάρτησης στο διάστημα $[0, 4]$ είναι τα άκρα 0 και 4 του διαστήματος καθώς και οι 1 και 2 στους οποίους μηδενίζεται η παράγωγος. Οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία αυτά είναι 5, 37, 10 και 9, αντιστοίχως.

Τώρα σκεφτόμαστε ως εξής. Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, 4]$, οπότε έχει οπωσδήποτε σημεία ολικού μεγίστου και ελαχίστου. Αυτά είναι οπωσδήποτε κάποια από τα παραπάνω τέσσερα σημεία και, επομένως, ο 0 είναι το σημείο ολικού ελαχίστου (οπότε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι 5) και ο 4 είναι το σημείο ολικού μεγίστου (οπότε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 37). Μένει να δούμε αν οι 1 και 2 είναι σημεία τοπικού ακροτάτου ή όχι.

Στο διάστημα $[0, 2]$ η συνάρτηση είναι συνεχής, οπότε έχει σημεία ολικού μεγίστου και ολικού ελαχίστου στο διάστημα αυτό. Αυτά είναι κάποια από τα τρία σημεία 0, 1 και 2 – τα άκρα και το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος. Οι αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης είναι 5, 10 και 9, οπότε ο 1 είναι το σημείο ολικού μεγίστου στο $[0, 2]$ και, επομένως, είναι και σημείο τοπικού μεγίστου στο $[0, 4]$.

Με τον ίδιο συλλογισμό βλέπουμε ότι, αφού οι τιμές στους 1, 2 και 4 είναι 10, 9 και 37, αντιστοίχως, ο 2 είναι σημείο ολικού ελαχίστου στο $[1, 4]$ και, επομένως, είναι σημείο τοπικού ελαχίστου στο $[0, 4]$.

Θα ξαναδούμε το παράδειγμα αυτό στην επόμενη ενότητα με πιο απλό τρόπο.

Το Θεώρημα του Fermat έχει ένα συμπλήρωμα για την περίπτωση που το σημείο τοπικού ακροτάτου είναι άκρο του διαστήματος στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση.

Πρόταση 6.6 (1) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[\xi, b)$ και ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της $y = f(x)$. Τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η $f'_+(\xi)$,
(ii) είτε υπάρχει η $f'_+(\xi)$ και ισχύει $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, αντιστοίχως.
(2) *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $(a, \xi]$ και ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή ελαχίστου της $y = f(x)$. Τότε*
(i) είτε δεν υπάρχει η $f'_-(\xi)$,
(ii) είτε υπάρχει η $f'_-(\xi)$ και ισχύει $f'_-(\xi) \geq 0$ ή $f'_-(\xi) \leq 0$, αντιστοίχως.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$. Δηλαδή υπάρχει διάστημα $[\xi, d)$ ώστε να είναι $f(x) \leq f(\xi)$ για κάθε x στο $[\xi, d)$. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το (i), οπότε υπάρχει η παράγωγος $f'_+(\xi)$. Τώρα παρατηρούμε ότι είναι $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$ για κάθε x στο διάστημα (ξ, d) και, επομένως, $f'_+(\xi) = \lim_{x \to \xi+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0$.
Η περίπτωση του τοπικού ελαχίστου στο (1) αλλά και το (2) έχουν παρόμοια απόδειξη.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, γράφοντας $f'_+(\xi) \leq 0$ ή $f'_+(\xi) \geq 0$, περιλαμβάνουμε την περίπτωση να είναι $f'_+(\xi) = -\infty$ ή $f'_+(\xi) = +\infty$, αντιστοίχως. Ομοίως για την $f'_-(\xi)$.

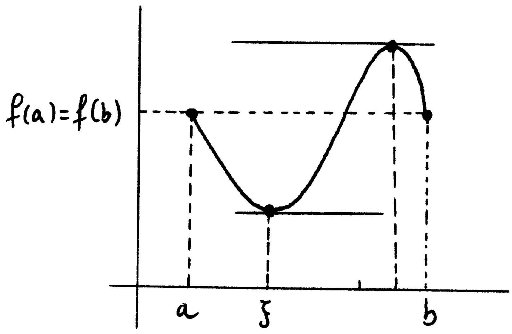
Παραδείγματα: (1) Η $y = x$ στο διάστημα $[0, 2]$ έχει τον 0 σημείο τοπικού ελαχίστου και η παράγωγός της στον 0 είναι, πράγματι, ίση με $1 \geq 0$. Η ίδια συνάρτηση έχει στο ίδιο διάστημα τον 2 σημείο τοπικού μεγίστου και η παράγωγός της στον 2 είναι ίση με $1 \geq 0$.

(2) Η $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 2]$ έχει τον 0 σημείο τοπικού ελαχίστου και η παράγωγός της στον 0 είναι, πράγματι, ίση με $+\infty \geq 0$.

Το δεύτερο σημαντικό θεώρημα είναι το

Θεώρημα 6.2 ***Θεώρημα του Rolle***. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Αν είναι $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε να είναι $f'(\xi) = 0$.*

Απόδειξη: Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.
(i) Αν η $y = f(x)$ είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή όλες οι τιμές της είναι ίσες με $f(a) = f(b)$, τότε η παράγωγός της είναι ίση με 0 σε κάθε σημείο του (a, b), οπότε το αποτέλεσμα είναι προφανές.
Αν η $y = f(x)$ δεν είναι σταθερή στο $[a, b]$, τότε είτε (ii) έχει μια τουλάχιστον τιμή $> f(a) = f(b)$ είτε (iii) έχει μια τουλάχιστον τιμή $< f(a) = f(b)$. Εξετάζουμε τις δυο περιπτώσεις ξεχωριστά.
(ii) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής και συμπεραίνουμε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$, ο οποίος είναι σημείο ολικού μεγίστου της $y = f(x)$. Αφού υπάρχει κάποια τιμή μεγαλύτερη από την $f(a) = f(b)$, συνεπάγεται ότι και η μέγιστη τιμή $f(\xi)$ είναι $> f(a) = f(b)$ και, επομένως, ο ξ ανήκει στο (a, b). Βάσει της υπόθεσης, η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στον ξ και, βάσει του Θεωρήματος του Fermat, ισχύει $f'(\xi) = 0$.
(iii) Από το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$, ο οποίος είναι σημείο ολικού ελαχίστου της $y = f(x)$. Αφού υπάρχει κάποια τιμή $< f(a) = f(b)$, συνεπάγεται ότι και η ελάχιστη τιμή $f(\xi)$ είναι $< f(a) = f(b)$ και, επομένως, ο ξ ανήκει στο



Σχήμα 6.7: Το Θεώρημα του Rolle.

(a, b). Βάσει της υπόθεσης, η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στον ξ και, βάσει του Θεωρήματος του Fermat, ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε $f'(\xi) = 0$.

Παράδειγμα: Η $y = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, \sqrt{3}]$, έχει παράγωγο στο διάστημα $(-2, \sqrt{3})$ και οι τιμές της στα άκρα είναι και οι δυο 1. Άρα υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(-2, \sqrt{3})$, στον οποίο η παράγωγος $y = 3x^2 + 4x - 3$ είναι ίση με 0. Για να βρούμε τον ξ λύνουμε την εξίσωση $3x^2 + 4x - 3 = 0$. Οι λύσεις είναι οι $\frac{-2 \pm \sqrt{13}}{3}$ και ανήκουν και οι δυο στο $(-2, \sqrt{3})$.

Το Θεώρημα του Rolle δεν αναφέρει τρόπο εύρεσης του ξ για τον οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.

Αν η $y = f(x)$ στο Θεώρημα του Rolle δεν έχει παράγωγο έστω και σε ένα μόνο σημείο του (a, b), υπάρχει περίπτωση να μην υπάρχει κανένας ξ στο (a, b) ωστε $f'(\xi) = 0$.

Παράδειγμα: Η $y = |x|$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$ και οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος είναι και οι δυο 1. Όμως, δεν υπάρχει κανένας ξ στο $(-1, 1)$ στον οποίο η παράγωγος έχει τιμή 0.

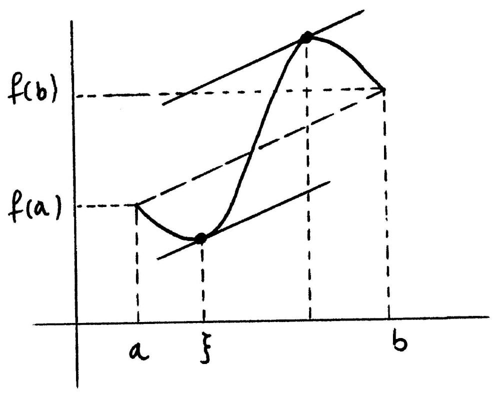
Οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle επιτρέπουν να είναι η παράγωγος $+\infty$ ή $-\infty$ σε σημεία του διαστήματος (a, b). Το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει.

Παράδειγμα: Η $y = x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{7}{3}}$ έχει παράγωγο $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}}$, αν $x \neq 0$, και $\frac{dy}{dx} = +\infty$, αν $x = 0$. Η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή 0 στα άκρα του $[-1, 1]$. Η παράγωγος είναι 0 στα σημεία $\pm\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Το επόμενο είναι το τρίτο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 6.3 ***Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Lagrange).*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και* *ότι έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).}$$



Σχήμα 6.8: Το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Απόδειξη: Σχηματίζουμε την $y = h(x) = (b-a)f(x) - (f(b) - f(a))x$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b). Επίσης, ισχύει $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε να είναι $h'(\xi) = 0$. Συνεπάγεται $(b-a)f'(\xi) - (f(b) - f(a)) = 0$ και, επομένως, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Το Θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 6.3. Πράγματι, αν $f(a) = f(b)$, από το Θεώρημα 6.3 συνεπάγεται ότι για κάποιον ξ στο (a, b) είναι $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Επομένως, το Θεώρημα 6.3 συνεπάγεται το Θεώρημα του Rolle. Από την άλλη μεριά το Θεώρημα 6.3 αποδείχτηκε βάσει του Θεωρήματος του Rolle. Άρα τα δυο θεωρήματα είναι *ισοδύναμα*.

Αν παρατηρήσουμε το γράφημα της $y = f(x)$ στο Θεώρημα 6.3, βλέπουμε ότι ο αριθμός $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ δεν είναι τίποτε άλλο από την κλίση του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Επομένως, το γεωμετρικό περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.3 είναι ότι, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχει παράγωγο στο (a, b), τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της σε κάποιο σημείο $(\xi, f(\xi))$ *έχει την ίδια κλίση ή, ισοδύναμα, είναι παράλληλη* με το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Παράδειγμα: Η $y = x^{\frac{1}{3}}$ είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και έχει παράγωγο στο $(-1, 1)$. Στον 0 η παράγωγος είναι $+\infty$ και σε κάθε $x \neq 0$ η παράγωγος είναι $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. Άρα υπάρχει ξ στο $(-1, 1)$ ώστε να είναι $\frac{1}{3}\xi^{-\frac{2}{3}} = \frac{1^{\frac{1}{3}} - (-1)^{\frac{1}{3}}}{1-(-1)} = 1$. Λύνοντας, βρίσκουμε $\xi = \pm\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Συνεχίζουμε με το τέταρτο σημαντικό θεώρημα.

Θεώρημα 6.4 ***Το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Cauchy).*** *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) έτσι ώστε (i) να είναι $g(a) \neq g(b)$ και (ii) σε κανένα x του (a, b) να μην ισχύει $f'(x) = g'(x) = 0$. Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε να είναι*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}\,.$$

Απόδειξη: Σχηματίζουμε την $y = h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$ και παρατηρούμε ότι αυτή είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Επίσης, ισχύει $h(a) = h(b)$. Άρα υπάρχει κάποιος ξ στο (a, b) ώστε να είναι $h'(\xi) = 0$. Συνεπάγεται $(g(b) - g(a))f'(\xi) - (f(b) - f(a))g'(\xi) = 0$ και, επομένως, $(g(b) - g(a))f'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi)$. Επειδή είναι $g(a) \neq g(b)$, συνεπάγεται $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = f'(\xi)$. Αν $g'(\xi) = 0$, τότε είναι και $f'(\xi) = 0$, που αντιφάσκει με μια από τις υποθέσεις. Άρα είναι $g'(\xi) \neq 0$, οπότε $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Παράδειγμα: Αν $0 < a < b$, τότε για κάθε m, n φυσικούς υπάρχει ξ ώστε $a < \xi < b$ και $\frac{b^m - a^m}{b^n - a^n} = \frac{m\xi^{m-1}}{n\xi^{n-1}} = \frac{m}{n}\xi^{m-n}$.

Το Θεώρημα 6.4 αποδείχτηκε βάσει του Θεωρήματος του Rolle. Από την άλλη μεριά, το Θεώρημα 6.3 είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 6.4. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την $y = g(x) = x$ στο Θεώρημα 6.4, τότε προκύπτει το Θεώρημα 6.3. Τώρα, είδαμε προηγουμένως ότι το Θεώρημα του Rolle είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 6.3. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, από όλα αυτά ότι τα τρία θεωρήματα είναι *ισοδύναμα*.

Ασκήσεις.

1. Είναι ο 0 σημείο τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων;

$$y = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x < 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x\big(1 + \sin\frac{1}{x}\big), & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} x^2\big(-1 + \sin\frac{1}{x}\big), & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η δεύτερη και η τέταρτη συνάρτηση είναι παραγωγίσιμες στον 0.

(Υπόδειξη: Για τις δυο τελευταίες συναρτήσεις η απάντηση είναι πολύ απλή.)

Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων.

2. Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε να είναι

(i) $a < \xi < b$ και $\frac{\sin b - \sin a}{b - a} = \cos\xi$.

(ii) $a < \xi < b$ και $\frac{\sin b - \sin a}{e^b - e^a} = e^{-\xi}\cos\xi$.

(iii) $a < \xi < b$ και $\frac{e^b - e^a}{\arctan b - \arctan a} = (1 + \xi^2)e^{\xi}$.

3. Μπορεί η εξίσωση $x^3-12x=c$ να έχει δυο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $[-2,2]$; στο $(-\infty,-2]$; στο $[2,+\infty)$;

4. Θεωρήστε τη συνάρτηση $y=2-x^{\frac{2}{5}}$ και παρατηρήστε ότι έχει την ίδια τιμή 1 στους 1 και -1. Υπάρχει κανένας ξ στο διάστημα $(-1,1)$ στον οποίο να μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης;

5. Με το Θεώρημα του Rolle και την αρχή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε πολυώνυμο n-οστού βαθμού έχει το πολύ n διαφορετικές ρίζες.

6. Αποδείξτε ότι η παράγωγος της $y=(x+4)(x+1)(x-2)(x-3)$ έχει ακριβώς τρεις διαφορετικές ρίζες.

   Γενικότερα, υποθέστε ότι $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ και αποδείξτε ότι η παράγωγος της $y=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ έχει ακριβώς $n-1$ διαφορετικές ρίζες. Προσδιορίστε τη θέση των ριζών της παραγώγου σε σχέση με τους $a_1,\ldots,a_n$.

   (Υπόδειξη: Δείτε την προηγούμενη άσκηση.)

7. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2=x\sin x+\cos x$ έχει ακριβώς δυο λύσεις. Προσδιορίστε τη θέση των δυο αυτών λύσεων σε σχέση με τον 0.

8. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x=1$; η εξίσωση $e^x=1+x$; η εξίσωση $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}$; Γενικεύστε με την αρχή της επαγωγής: πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$;

   (Υπόδειξη: Όλες οι εξισώσεις έχουν μια προφανή λύση.)

9. Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι συνεχής στο $[1,4]$, ότι $f(1)=-7$ και $f'(x)\geq 3$ για κάθε x στο διάστημα $(1,4)$.

   Είναι δυνατό να ισχύει $f(4)=1$; Αποδείξτε ότι $f(4)\geq 2$.

   Για κάθε αριθμό $\mu\geq 2$ βρείτε συγκεκριμένη συνάρτηση $y=f(x)$ με όλες τις παραπάνω ιδιότητες ώστε να είναι $f(4)=\mu$.

   (Υπόδειξη: Βρείτε συνάρτηση $y=f(x)=ax+b$ με τις παραπάνω ιδιότητες.)

10. Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και ότι έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I. Υποθέτουμε ότι η απόσταση των αριθμών y_1 και y_2 είναι d, ότι οι x_1 και x_2 ανήκουν στο διάστημα I και ότι $f(x_1)=y_1$ και $f(x_2)=y_2$.

    (i) Αν είναι $|f'(x)|\geq m>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, αποδείξτε ότι η απόσταση των x_1 και x_2 είναι το πολύ $\frac{d}{m}$.

    (ii) Αν είναι $|f'(x)|\leq m<+\infty$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, αποδείξτε ότι η απόσταση των x_1 και x_2 είναι τουλάχιστον $\frac{d}{m}$.

11. Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I.

    Αποδείξτε ότι η $y=f(x)$ είναι ένα-προς-ένα στο I.

12. $^{(*)}$ Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο διάστημα I και $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε x στο I. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δυο οποιεσδήποτε λύσεις της $f(x) = 0$ στο I βρίσκεται τουλάχιστον μια λύση της $g(x) = 0$ και αντιστρόφως.

    (Υπόδειξη: Έστω a, b στο I με $a < b$ και $f(a) = f(b) = 0$. Υποθέστε ότι είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε x στο (a, b). Μπορεί να είναι $g(a) = 0$ ή $g(b) = 0$; Κατόπιν, θεωρήστε τη συνάρτηση $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ στο $[a, b]$ και καταλήξτε σε άτοπο.)

    Ταιριάζει το συμπέρασμα αυτό με το ζευγάρι των συναρτήσεων $y = \cos x$ και $y = \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$;

13. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στα άκρα a, b.

    Αν $f'_+(a) < 0 < f'_-(b)$, αποδείξτε ότι οποιοδήποτε σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$ (την ύπαρξη του οποίου εγγυάται το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής) ανήκει οπωσδήποτε στο διάστημα (a, b).

    Ποιο είναι το συμπέρασμα αν $f'_+(a) > 0 > f'_-(b)$;

14. $^{(**)}$ **Θεώρημα του Darboux**. Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο διάστημα $[a, b]$ και $f'_+(a) < c < f'_-(b)$ ή $f'_+(a) > c > f'_-(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα (a, b) ώστε να είναι $f'(\xi) = c$.

    (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης στην $y = g(x) = f(x) - cx$.)

    Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι κάτι σαν «θεώρημα ενδιάμεσης τιμής» για την παράγωγο στο $[a, b]$ χωρίς, όμως, να προϋποτίθεται η συνέχεια της παραγώγου.

15. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[\xi - h, \xi + h]$ και παραγωγίσιμη στην ένωση $(\xi - h, \xi) \cup (\xi, \xi + h)$. Αποδείξτε ότι:

    (i) υπάρχει ζ στο διάστημα $(0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{h} = f'(\xi+\zeta)+f'(\xi-\zeta)$.

    (ii) υπάρχει ζ στο διάστημα $(0, h)$ ώστε $\frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h} = f'(\xi + \zeta) - f'(\xi - \zeta)$.

16. $^{(*)}$ Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + \sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

    (Υπόδειξη: Για $x > 0$ εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x, x + \sqrt{x}]$ και χρησιμοποιήστε την ιδιότητα παρεμβολής.)

17. $^{(**)}$ Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x + 1) - f(x)) = 0$.

    (Υπόδειξη: Θεωρήστε $\epsilon > 0$ και τον ορισμό του $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Κατόπιν, για κατάλληλα μεγάλους x εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x, x + 1]$ ώστε να βρείτε ότι $|f(x + 1) - f(x)| < \epsilon$.)

18. $^{(**)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[\xi, b)$ και παραγωγίσιμη στο (ξ, b). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi+} f'(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχει και η παράγωγος $f'_+(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε $\epsilon > 0$ και τον ορισμό του $\lim_{x\to\xi+} f'(x) = \eta$. Για x κατάλληλα κοντά στον ξ εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[\xi, x]$ ώστε να βρείτε ότι $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} - \eta\right| < \epsilon$.)

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $(a, \xi]$ και παραγωγίσιμη στο (a, ξ). Αν υπάρχει το $\lim_{x\to\xi-} f'(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχει και η παράγωγος $f'_-(\xi)$ και είναι ίση με την τιμή του ορίου.

6.9 Εφαρμογές.

Α. Ακρότατα και μονοτονία.

Πρόταση 6.7 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(1) Η $y = f(x)$ είναι σταθερή στο I αν και μόνο αν είναι $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.
(2) Η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο I αν και μόνο αν είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.
(3) Η $y = f(x)$ είναι φθίνουσα στο I αν και μόνο αν είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.

Απόδειξη: (1) Αν η $y = f(x)$ είναι σταθερή, τότε ήδη γνωρίζουμε ότι η παράγωγός της είναι μηδέν. Αντιστρόφως, έστω ότι είναι $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Θεωρούμε δυο οποιουσδήποτε x_1 και x_2 στο διάστημα I με $x_1 < x_2$ (πιθανόν κάποιος από αυτούς να είναι άκρο του I). Η $y = f(x)$ είναι τότε συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και έχει παράγωγο στο διάστημα (x_1, x_2). Συνεπάγεται ότι υπάρχει ξ στο (x_1, x_2) και, επομένως, ξ εσωτερικό σημείο του I, ώστε να είναι $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) = 0$. Άρα είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι τιμές της $y = f(x)$ είναι ίσες μεταξύ τους, οπότε η $y = f(x)$ είναι σταθερή στο I.
(2) Αν η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο I, τότε, όπως αποδείξαμε πριν από την Πρόταση 6.5, ισχύει $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Αντιστρόφως, έστω ότι είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Όπως και στην απόδειξη του (1), θεωρούμε δυο οποιουσδήποτε x_1 και x_2 στο διάστημα I με $x_1 < x_2$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ξ στο (x_1, x_2) και, επομένως, ξ εσωτερικό σημείο του I, ώστε να είναι $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi) \geq 0$. Άρα είναι $f(x_1) \leq f(x_2)$ και, επομένως, η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο I.
(3) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (2).

Ιδού το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 6.7. Το γράφημα μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα είναι *οριζόντια καμπύλη* αν και μόνο αν *οι εφαπτόμενες ευθείες σε κάθε σημείο της είναι οριζόντιες*. Ομοίως, το γράφημα μιας συνάρτησης σε κάποιο διάστημα είναι καμπύλη η οποία *ανεβαίνει από τα αριστερά και κάτω προς τα δεξιά και πάνω* αν και μόνο αν *οι εφαπτόμενες ευθείες σε κάθε σημείο της έχουν μη αρνητικές κλίσεις*. Υπάρχει, επομένως, σχέση αλληλοκαθορισμού ανάμεσα στην κατεύθυνση μιας καμπύλης και στις κατευθύνσεις των εφαπτόμενων ευθειών της.

Αξίζει να διατυπώσουμε μια παραλλαγή της Πρότασης 6.7.

Πρόταση 6.8 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(1) Αν είναι $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο I.
(2) Αν είναι $f'(x) < 0$ για κάθε x εσωτερικό του I, τότε η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο I.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του αντίστοιχου μέρους της Πρότασης 6.7.

Στις Προτάσεις 6.7 και 6.8 όταν γράφουμε $f'(x) \geq 0$ ή $f'(x) > 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση να είναι $f'(x) = +\infty$. Ομοίως, όταν γράφουμε $f'(x) \leq 0$ ή $f'(x) < 0$ περιλαμβάνουμε και την περίπτωση να είναι $f'(x) = -\infty$. Το ίδιο ισχύει και για την Πρόταση 6.9 παρακάτω.

Δεν ισχύουν τα αντίστροφα των (1) και (2) της Πρότασης 6.8. Αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε το μόνο γενικό συμπέρασμα είναι αυτό που ισχύει επειδή η συνάρτηση είναι αύξουσα, δηλαδή ότι είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I. Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει αν η $y = f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα: Η $y = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ αλλά δεν ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$. Υπολογίζουμε: $\frac{d\,x^3}{dx} = 3x^2$ για κάθε x και είναι > 0 για κάθε $x \neq 0$ αλλά είναι 0 για $x = 0$.

Πρέπει να τονιστεί ότι στις Προτάσεις 6.7 και 6.8 οι υποθέσεις και τα συμπεράσματα ισχύουν σε διάστημα. *Αν οι υποθέσεις ισχύουν σε ενώσεις διαστημάτων, τότε τα συμπεράσματα μπορεί να μην ισχύουν κι αυτά στις ενώσεις διαστημάτων.*

Παραδείγματα: (1) Η $y = \frac{|x|}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά δεν είναι σταθερή στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι σταθερή -1 στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και σταθερή 1 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(2) Η $y = \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο $-\frac{1}{x^2} < 0$ στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι χρήσιμο για την αναγνώριση των σημείων τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

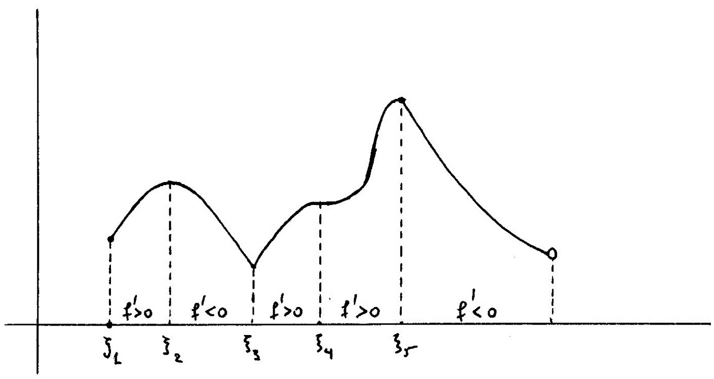
Πρόταση 6.9 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b), συνεχής σε κάποιο υποδιάστημα (c, d) του (a, b) και ο ξ ανήκει στο (c, d).*
(1) Αν είναι $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο (c, ξ) και $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο (ξ, d), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

(2) Αν είναι $f'(x) \leq 0$ για κάθε x στο (c, ξ) και $f'(x) \geq 0$ για κάθε x στο (ξ, d), τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.

Απόδειξη: (1) Η $y = f(x)$ είναι αύξουσα στο $(c, \xi]$ και φθίνουσα στο $[\xi, d)$, οπότε ο $f(\xi)$ είναι η μέγιστη τιμή της στο διάστημα (c, d).
(2) Ομοίως.

Ιδού μια συνηθισμένη περίπτωση εφαρμογής της Πρότασης 6.9.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $y = f(x)$ συνεχή σε κάποιο διάστημα (οποιουδήποτε τύπου) και έστω ότι έχουμε βρει σημεία $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ στα οποία περιλαμβάνονται τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος ώστε σε καθένα από τα ενδιάμεσα ανοικτά υποδιαστήματα η συνάρτηση έχει παράγωγο με σταθερό πρόσημο. Τότε (i) τα (πιθανά) άκρα του διαστήματος είναι σημεία τοπικού ακροτάτου, (ii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος έχει διαφορετικό πρόσημο είναι σημείο τοπικού ακροτάτου και (iii) κάθε ξ_k το οποίο χωρίζει υποδιαστήματα στα οποία η παράγωγος έχει ίδιο πρόσημο δεν είναι σημείο τοπικού ακροτάτου.



Σχήμα 6.9: Διαστήματα μονοτονίας και σημεία τοπικού ακροτάτου.

Δε χρειάζεται να έχει παράγωγο η $y = f(x)$ στα $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ · αρκεί μόνο να είναι συνεχής στα σημεία αυτά.

Παραδείγματα: (1) Θα ξαναδούμε ένα από τα παραδείγματα της ενότητας 6.8. Η $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 4]$ και έχει παράγωγο $y = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$ στο $(0, 4)$. Αυτή είναι θετική στο διάστημα $(0, 1)$ και στο $(2, 4)$ και αρνητική στο $(1, 2)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και στο $[2, 4]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ και, επομένως, οι 0 και 2 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης και οι 1 και 4 είναι σημεία τοπικού μεγίστου.

(2) Η $y = x^4(x-1)^4$ είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ με παράγωγο $\frac{d\,(x^4(x-1)^4)}{dx} = 4x^3(x-1)^4 + 4x^4(x-1)^3 = 8x^3(x-1)^3(x-\frac{1}{2})$. Αυτή είναι θετική στο $(0, \frac{1}{2})$ και στο $(1, +\infty)$ και αρνητική στο $(-\infty, 0)$ και στο $(\frac{1}{2}, 1)$. Άρα η αρχική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$ και στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο $[\frac{1}{2}, 1]$. Επομένως, οι 0 και 1 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και ο $\frac{1}{2}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου. Η τιμή στα σημεία 0 και 1 είναι 0 και, επειδή ισχύει $0 \leq x^4(x-1)^4$ για κάθε x, οι 0 και 1 είναι σημεία ολικού ελαχίστου. Ο $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου, διότι η τιμή στο σημείο αυτό είναι $\frac{1}{256}$, ενώ είναι $\lim_{x\to\pm\infty} x^4(x-1)^4 = +\infty$.

(3) Η $y = x + \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Η παράγωγος είναι $\frac{d}{dx}(x + \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{x^2}$ και είναι θετική στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και αρνητική στα διαστήματα $(-1, 0)$ και $(0, 1)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$ και, επομένως, ο -1 είναι σημείο τοπικού μεγίστου και ο 1 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Μάλιστα, ο -1 είναι σημείο ολικού μεγίστου για το διάστημα $(-\infty, 0)$ και ο 1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου για το διάστημα $(0, +\infty)$.

(4) Η $y = |\sin x|$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και είναι ίση με $y = \sin x$ στο διάστημα $(0, \pi)$ και ίση με $y = -\sin x$ στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$. Επομένως, η παράγωγος είναι ίση με $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$ στο $(0, \pi)$ και ίση με $\frac{d\,(-\sin x)}{dx} = -\cos x$ στο $(\pi, 2\pi)$. Συνεπάγεται ότι η παράγωγος είναι θετική στα διαστήματα $(0, \frac{\pi}{2})$ και $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ και αρνητική στα διαστήματα $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ και $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Επομένως, οι 0, π και 2π είναι σημεία τοπικού ελαχίστου και οι $\frac{\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2}$ είναι σημεία τοπικού μεγίστου. Επειδή η τιμή στα τρία πρώτα σημεία είναι ίση με 0, τα σημεία αυτά είναι σημεία ολικού ελαχίστου και, επειδή η τιμή στα δυο δεύτερα σημεία είναι ίση με 1, τα σημεία αυτά είναι σημεία ολικού μεγίστου.

Παρεμπιπτόντως, θα άξιζε να υπολογίσουμε τις παραγώγους στους 0, π και 2π. Στον 0: $\frac{d\,|\sin x|}{dx}\big|_{x=0} = \lim_{x\to 0+} \frac{|\sin x| - |\sin 0|}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \cos 0 = 1$. Στον 2π: $\frac{d\,|\sin x|}{dx}\big|_{x=2\pi} = \lim_{x\to 2\pi-} \frac{|\sin x| - |\sin(2\pi)|}{x-2\pi} = \lim_{x\to 2\pi-} \frac{-\sin x + \sin(2\pi)}{x-2\pi} = -\lim_{x\to 2\pi-} \frac{\sin x - \sin(2\pi)}{x-2\pi} = -\cos(2\pi) = -1$. Όμως, στον π δεν υπάρχει παράγωγος. Πράγματι: $\frac{d\,|\sin x|}{dx}\big|_{x=\pi+} = \lim_{x\to\pi+} \frac{|\sin x| - |\sin\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi+} \frac{-\sin x + \sin\pi}{x-\pi} = -\lim_{x\to\pi+} \frac{\sin x - \sin\pi}{x-\pi} = -\cos\pi = 1$ και $\frac{d\,|\sin x|}{dx}\big|_{x=\pi-} = \lim_{x\to\pi-} \frac{|\sin x| - |\sin\pi|}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi-} \frac{\sin x - \sin\pi}{x-\pi} = \cos\pi = -1$.

Β. Ισότητες, ανισότητες.

Θα δούμε πώς αποδεικνύονται διάφορες ισότητες και ανισότητες με τη βοήθεια των Θεωρημάτων Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού ή των Προτάσεων 6.7 και 6.8.

Παραδείγματα: (1) Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τις παραγώγους $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ και $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$ και ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι $(\cos x)^2 +$

$(\sin x)^2 = 1$ για κάθε x.

Υπολογίζουμε $\frac{d\left((\cos x)^2+(\sin x)^2\right)}{dx} = -2\cos x \sin x + 2\sin x \cos x = 0$ για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$. Από την Πρόταση 6.7 συνεπάγεται ότι η $y = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$ είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή υπάρχει κάποιος αριθμός c ώστε να είναι $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = c$ για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$. Βρίσκουμε την τιμή του c, δοκιμάζοντας οποιαδήποτε βολική τιμή του x· για παράδειγμα: $c = (\cos 0)^2 + (\sin 0)^2 = 1$.

(2) Θα αποδείξουμε την ανισότητα

$$\boxed{e^x \geq x + 1}$$

για κάθε x με δυο τρόπους (ουσιαστικά ίδιους).
Πρώτος τρόπος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = f(x) = e^x - x - 1$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$ και θεωρούμε κατ' αρχάς οποιονδήποτε $x > 0$. Υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(0, x)$ για τον οποίο ισχύει $\frac{e^x-x-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) = e^{\xi} - 1$. Επειδή είναι $\xi > 0$, συνεπάγεται $e^{\xi} - 1 > 0$ και, επομένως, $e^x - x - 1 > 0$. Αν, τώρα, θεωρήσουμε οποιονδήποτε $x < 0$, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(x, 0)$ για τον οποίο ισχύει $\frac{e^x-x-1}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) = e^{\xi} - 1$. Επειδή $\xi < 0$, συνεπάγεται $e^{\xi} - 1 < 0$ και, επομένως, και πάλι ισχύει $e^x - x - 1 > 0$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει η γνήσια ανισότητα $e^x > x + 1$ και για $x = 0$ ισχύει, προφανώς, η ισότητα $e^0 = 0 + 1$.
Δεύτερος τρόπος. Μπορούμε να αποδείξουμε την ίδια ανισότητα με έναν λίγο διαφορετικό τρόπο. Θεωρούμε πάλι τη συνάρτηση $y = f(x) = e^x - x - 1$ και βλέπουμε ότι ο $f'(x) = e^x - 1$ είναι > 0 για κάθε $x > 0$ και είναι < 0 για κάθε $x < 0$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$. Άρα ισχύει $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

(3) Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ για κάθε x.
Πρώτος τρόπος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$. Είναι $f(0) = 0$ και θεωρούμε $x \neq 0$. Υπάρχει κάποιος ξ στο διάστημα $(0, x)$ ή $(x, 0)$ για τον οποίο ισχύει $\frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) = \xi - \sin \xi$. Αν $x > 0$, τότε είναι $\xi > 0$ και, επομένως, $\xi > \sin \xi$. Επίσης, αν $x < 0$, τότε είναι $\xi < 0$ και, επομένως, $\xi < \sin \xi$. Σε κάθε περίπτωση συνεπάγεται $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.
Δεύτερος τρόπος. Η ίδια συνάρτηση $y = f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ έχει παράγωγο $f'(x) = x - \sin x$ η οποία είναι > 0 στο $(0, +\infty)$ και < 0 στο $(-\infty, 0)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και, επομένως, είναι $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Ασκήσεις.

Α. Ακρότατα και μονοτονία.

1. Βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα σημεία τοπικού και ολικού ακροτάτου

καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις.

$$y = x^2 - x - 1, \quad y = x^3 - 15x^2 + 72x + 7, \quad y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 3}, \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x+4},$$

$$y = x^2 e^{-x}, \quad y = \sin x - \cos x, \quad y = \frac{\sin(3x)}{3} - \cos x, \quad y = x + \sin x,$$

$$y = x + |\sin x|, \quad y = \frac{\log x}{x}, \quad y = |x| e^{-|x-1|}, \quad y = \arctan x - \log(1 + x^2).$$

2. (*) Αποδείξτε ότι η $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

3. (**) Θεωρήστε την $y = \begin{cases} x - x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   Αποδείξτε ότι $\frac{dy}{dx}\big|_{x=0} = 1 > 0$.

   Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει κανένας $a > 0$, οσοδήποτε μικρός, ώστε η συνάρτηση να είναι αύξουσα στο διάστημα $(-a, a)$.

4. Βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.

   (i) $y = (x-1)|x|$ στο $[-1, 3]$.

   (ii) $y = |x^2 - 3x + 2|$ στο $[-3, 10]$.

   (iii) $y = \frac{(\log x)^2}{x}$ στο $[1, 3]$.

   (iv) $y = x + \frac{1}{x}$ στο $[\frac{1}{3}, 3]$.

   (v) $y = e^x \sin x$ στο $[0, 2\pi]$.

5. Βρείτε την τιμή του $a > 0$ για την οποία η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $y = a \log x + 2a - x$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι η ελάχιστη δυνατή.

6. Έστω $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$. Βρείτε τα σημεία ολικού ελαχίστου των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = (x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2, \qquad y = |x - a_1| + \cdots + |x - a_n|.$$

7. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι Hölder-συνεχής στον ξ με Hölder-εκθέτη > 1 (δείτε την άσκηση 7 της ενότητας 5.1). Αποδείξτε ότι $f'(\xi) = 0$.

8. (*) Υποθέτουμε ότι $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|^\rho$ για κάθε x_1, x_2 σε κάποιο διάστημα I. Τότε η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **Hölder-συνεχής** στο I με **Hölder-εκθέτη** ρ. Στην ειδική περίπτωση $\rho = 1$, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **Lipschitz-συνεχής** στο I.

   Αποδείξτε ότι, αν $\rho > 1$, η $y = f(x)$ είναι σταθερή στο I.

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.)

9. Έστω $y = f(x)$ ορισμένη στο διάστημα (a, b), $a < \xi < b$ και $f'(\xi) > 0$. Αποδείξτε ότι είναι $f(x) > f(\xi)$ κοντά στον ξ και από τα δεξιά του και ότι είναι $f(x) < f(\xi)$ κοντά στον ξ και από τα αριστερά του.

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του $f'(\xi)$ και την Πρόταση 4.16.)

   Να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 3.

   Μπορεί να είναι ο ξ σημείο τοπικού ακροτάτου της $y = f(x)$;

   Τι αλλάζει αν είναι $f'(\xi) < 0$;

10. (*) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I και ότι $f'(x) \neq 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Από την άσκηση 11 της προηγούμενης ενότητας γνωρίζουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ένα-προς-ένα στο I.

    (1) Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως μονότονη στο I.

    (Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος:* Δείτε την άσκηση Β8 της ενότητας 5.5. *Δεύτερος τρόπος:* Από το Θεώρημα του Fermat και την υπόθεση, για κάθε x_1, x_3 στο I με $x_1 < x_3$ τα μοναδικά σημεία μεγίστου και ελαχίστου της $y = f(x)$ στο $[x_1, x_3]$ είναι τα x_1, x_3. Άρα για κάθε x_1, x_2, x_3 στο I με $x_1 < x_2 < x_3$ είναι $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ ή $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. *Τρίτος τρόπος:* Συνέπεια του (2) που ακολουθεί.)

    (2) Αποδείξτε ότι είτε είναι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I είτε είναι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I.

    (Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος:* Συνέπεια του (1) που προηγήθηκε. *Δεύτερος τρόπος:* Αν υπάρχουν a, b εσωτερικά του I με $a < b$ και $f'(a) < 0 < f'(b)$ ή $f'(a) > 0 > f'(b)$, βρίσκουμε άτοπο απο την άσκηση 13 ή 14 της προηγούμενης ενότητας.)

11. **Απόσταση σημείου από ευθεία**. Έστω οποιαδήποτε ευθεία l του επιπέδου και οποιοδήποτε σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Ονομάζουμε απόσταση του M από την l την ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l και τη συμβολίζουμε $d(M, l)$.
    (i) Αν η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa$, αποδείξτε ότι

    $$d(M, l) = |\kappa - x_0|.$$

    (ii) Αν η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, αποδείξτε ότι

    $$d(M, l) = \frac{|\mu x_0 + \nu - y_0|}{\sqrt{1 + \mu^2}}\,.$$

    Αν η εξίσωση της ευθείας είναι στη μορφή $ax + by = c$, όπου ένας τουλάχιστον από τους a, b είναι $\neq 0$, τότε

    $$d(M, l) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

12. Λυγίζουμε μια λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποια σημεία της πρέπει να λυγίσουμε τη ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;

13. Θεωρούμε μια ευθεία γραμμή η οποία χωρίζει ένα επίπεδο σε δυο ημιεπίπεδα καθώς και ένα σημείο A_1 στο ένα ημιεπίπεδο σε απόσταση d_1 από την ευθεία και ένα σημείο A_2 στο άλλο ημιεπίπεδο σε απόσταση d_2 από την ευθεία. Ένα (σημειακό) όχημα κινείται με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_1 όταν βρίσκεται στο πρώτο ημιεπίπεδο και με ταχύτητα σταθερού μέτρου v_2 όταν βρίσκεται στο δεύτερο ημιεπίπεδο. Βρείτε την τροχιά που πρέπει να ακολουθήσει το όχημα ώστε από το σημείο A_1 να φτάσει στο σημείο A_2 στον ελάχιστο χρόνο.

14. Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r.

    Ποιος είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μια βάση του πάνω στη βάση του κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;

    Ποιος είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μια βάση του πάνω στη βάση του κώνου και έχει τη μέγιστη επιφάνεια;

15. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, b]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, b)$, ότι $f(0) = g(0) = 0$ και ότι $f'(x) > 0$ και $g'(x) > 0$ για κάθε x στο $(0, b)$.

    (i) Αν η $y = f'(x)$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$, αποδείξτε ότι η $y = \frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, b]$.

    $^{(*)}$ (ii) Αν η $y = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ είναι αύξουσα στο $(0, b)$, αποδείξτε ότι η $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι αύξουσα στο $(0, b]$.

    Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

    $$y = \frac{x}{\sin x}\,, \quad y = \frac{\frac{1}{2}x^2}{1 - \cos x}\,, \quad y = \frac{\frac{1}{6}x^3}{x - \sin x}\,, \quad \cdots$$

    είναι αύξουσες στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

B. Ισότητες, ανισότητες.

1. Αποδείξτε ότι είναι $\frac{d\,(\arccos y + \arcsin y)}{dy} = 0$ για κάθε y στο διάστημα $(-1, 1)$.

   Αποδείξτε την πρώτη ισότητα στην άσκηση B2 της ενότητας 1.4, δηλαδή ότι είναι $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ για κάθε y στο διάστημα $[-1, 1]$.

   Με τον ίδιο τρόπο αποδείξτε και τη δεύτερη ισότητα στην ίδια άσκηση.

2. Αποδείξτε ότι είναι $\frac{d\,(\arctan x + \arctan \frac{1}{x})}{dx} = 0$ για κάθε $x \neq 0$.

   Αποδείξτε ότι είναι $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ για κάθε $x > 0$ και $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ για κάθε $x < 0$.

   Πώς συμβιβάζεται με την Πρόταση 6.7 το ότι η $y = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ έχει παράγωγο μηδέν σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της αλλά δεν είναι σταθερή σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της;

3. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (a, b) και $a < 0 < b$. Υποθέτουμε ότι είναι $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = -f(x)$ για κάθε x στο (a, b) και $f(0) = 0$ και $g(0) = 1$.

   Γνωρίζετε κάποιο ζευγάρι τέτοιων συναρτήσεων;

   Αποδείξτε ότι είναι $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ για κάθε x στο (a, b).

   Αν οι $y = F(x)$ και $y = G(x)$ έχουν τις ίδιες ιδιότητες, αποδείξτε ότι $F(x) = f(x)$ και $G(x) = g(x)$ για κάθε x στο (a, b).

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε την $y = (F(x) - f(x))^2 + (G(x) - g(x))^2$.)

4. Αποδείξτε ότι $\frac{2}{\pi} x < \sin x < x$ για κάθε x στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$.

5. Αποδείξτε ότι $\log \frac{1+x}{1-x} > 2x + \frac{2x^3}{3}$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1)$.

6. Αποδείξτε ότι $\log \frac{1+x}{1-x} < 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{2}$ για κάθε x στο διάστημα $(0, \frac{1}{2}]$.

7. Αποδείξτε ότι $e^{\frac{x}{x+1}} < 1 + x$ για κάθε $x > -1$.

8. Αποδείξτε ότι $x > \arctan x > x - \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x > 0$.

9. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ότι έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b).

   (i) Αν είναι $f'(x) \geq \mu$ για κάθε x στο (a, b), αποδείξτε ότι $f(a) + \mu(x - a) \leq f(x) \leq f(b) + \mu(x - b)$ για κάθε x στο $[a, b]$.

   (ii) Αν είναι $f'(x) \leq \mu$ για κάθε x στο (a, b), αποδείξτε ότι $f(b) + \mu(x - b) \leq f(x) \leq f(a) + \mu(x - a)$ για κάθε x στο $[a, b]$.

10. Έστω $0 < x < y < +\infty$. Αποδείξτε ότι:

    (i) αν $a > 1$, τότε $ax^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ay^{a-1}$.

    (ii) αν $0 < a < 1$, τότε $ay^{a-1} < \frac{y^a - x^a}{y - x} < ax^{a-1}$.

11. Έστω $x < y$ και $a > 0$, $a \neq 1$. Αποδείξτε ότι $a^x \log a < \frac{a^y - a^x}{y - x} < a^y \log a$.

12. Έστω $0 < x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{y} < \frac{1}{y - x} \log(\frac{y}{x}) < \frac{1}{x}$.

13. Έστω $0 \leq x < y$. Αποδείξτε ότι $\frac{y - x}{1 + y^2} < \arctan y - \arctan x < \frac{y - x}{1 + x^2}$.

14. Αποδείξτε ότι είναι

    $$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!}, \quad e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}, \quad e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

    για κάθε $x \geq 0$.

    Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων;

    Κατόπιν, αποδείξτε ότι για $x \leq 0$ ισχύει η πρώτη, η τρίτη, η πέμπτη κλπ ανισότητα καθώς και η αντίστροφη της δεύτερης, της τέταρτης κλπ ανισότητας.

15. Αποδείξτε ότι είναι

$$\sin x \le \frac{x}{1!}\,, \quad \sin x \ge \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}\,, \quad \sin x \le \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

για κάθε $x \ge 0$ και ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται για $x \le 0$.

Αποδείξτε, επίσης, ότι είναι

$$\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2!}\,, \quad \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\,, \quad \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

για κάθε x.

Ποια είναι η γενική μορφή αυτών των ανισοτήτων;

16. $^{(**)}$ Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$.

Βρείτε την ελάχιστη τιμή της $y = \frac{a_1 + \cdots + a_n + x}{(n+1)\sqrt[n+1]{a_1 \cdots a_n x}}$ στο $(0, +\infty)$. Βρείτε όλα τα σημεία ολικού ελαχίστου.

Ανισότητα του Cauchy. Αποδείξτε ότι ισχύει

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\,.$$

(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο αποτέλεσμα και την αρχή της επαγωγής.)

Αποδείξτε ότι: $\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ αν και μόνο αν $a_1 = \ldots = a_n$.

17. Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \mu_1, \ldots, \mu_n > 0$ και $\mu_1 + \cdots + \mu_n = 1$. Επίσης, έστω $0 < t < 1$ και $a, b > 0$.

Ανισότητα του Young. Αποδείξτε ότι

$$a^{1-t} b^t \le (1-t)a + tb$$

και ότι η ανισότητα γίνεται ισότητα αν και μόνο αν $a = b$.

(Υπόδειξη: Να ορίσετε $x = \frac{b}{a}$ και να μελετήσετε την $y = x^t - tx + t$ στο $(0, +\infty)$.)

$^{(*)}$ **Ανισότητα του Hölder.** Αποδείξτε ότι

$${a_1}^{1-t}{b_1}^t + \cdots + {a_n}^{1-t}{b_n}^t \le \big(a_1 + \cdots + a_n\big)^{1-t}\big(b_1 + \cdots + b_n\big)^t$$

και ότι η ανισότητα γίνεται ισότητα αν και μόνο αν $\frac{a_k}{A} = \frac{b_k}{B}$ για κάθε k, όπου $A = a_1 + \cdots + a_n$ και $B = b_1 + \cdots + b_n$.

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την ανισότητα του Young σε κάθε ζεύγος $\frac{a_k}{A}$, $\frac{b_k}{B}$ και προσθέστε.)

$^{(*)}$ Αποδείξτε ότι η $y = (\mu_1 {a_1}^x + \cdots + \mu_n {a_n}^x)^{\frac{1}{x}}$ είναι αύξουσα στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(Υπόδειξη: Αν $0 < x < x'$, εφαρμόστε την ανισότητα του Hölder στους αριθμούς μ_k, $\mu_k {a_k}^{x'}$ με $t = \frac{x}{x'}$. Οι περιπτώσεις $x < x' < 0$ και $x < 0 < x'$ είναι παρόμοιες.)

$^{(*)}$ Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0}(\mu_1 {a_1}^x + \cdots + \mu_n {a_n}^x)^{\frac{1}{x}} = {a_1}^{\mu_1} \cdots {a_n}^{\mu_n}$.

(Υπ: $\log(\mu_1 {a_1}^x + \cdots + \mu_n {a_n}^x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log\left(\mu_1 {a_1}^x + \cdots + \mu_n {a_n}^x\right)}{\mu_1 {a_1}^x + \cdots + \mu_n {a_n}^x - 1} \frac{\mu_1 {a_1}^x + \cdots + \mu_n {a_n}^x - 1}{x}$.)

$^{(*)}$ Αποδείξτε ότι

$$(\mu_1 {a_1}^x + \cdots + \mu_n {a_n}^x)^{\frac{1}{x}} \leq {a_1}^{\mu_1} \cdots {a_n}^{\mu_n} \leq (\mu_1 {a_1}^{x'} + \cdots + \mu_n {a_n}^{x'})^{\frac{1}{x'}}$$

για κάθε x, x' με $x < 0 < x'$. Κατόπιν παρατηρήστε ότι η ανισότητα του Cauchy της προηγούμενης άσκησης είναι ειδική περίπτωση αυτής της τελευταίας ανισότητας.

6.10 Δεύτερη παράγωγος και εφαρμογές.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο *διάστημα* το οποίο περιέχει τον ξ και ότι η παράγωγος $y = f'(x)$, η οποία ορίζεται στο διάστημα αυτό, έχει με τη σειρά της παράγωγο στον ξ, δηλαδή υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$. Τότε το όριο αυτό ονομάζεται **δεύτερη παράγωγος της** $y = f(x)$ **στον** ξ και το συμβολίζουμε

$$\boxed{f''(\xi) \text{ ή } D^2 f(\xi) \text{ ή } \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=\xi} \text{ ή } \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - \xi}.}$$

Πρέπει να τονισθεί ότι για να ορισθεί η δεύτερη παράγωγος σε κάποιον ξ πρέπει η πρώτη παράγωγος να υπάρχει και να μην έχει τιμές $\pm\infty$ σε διάστημα το οποίο περιέχει τον ξ. Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα $[\xi, b)$ ή σε διάστημα $(a, \xi]$, τότε, φυσικά, ορίζεται η αντίστοιχη *πλευρική* δεύτερη παράγωγος στον ξ.

Ομοίως, ορίζεται η τρίτη παράγωγος ως η πρώτη παράγωγος της δεύτερης παραγώγου και, επαγωγικά, μπορούμε να ορίσουμε την n-οστή παράγωγο ως την πρώτη παράγωγο της $(n-1)$-οστής παραγώγου. Η πρώτη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(1)}$ και η δεύτερη παράγωγος συμβολίζεται και $f^{(2)}$. Για την τρίτη παράγωγο χρησιμοποιούμε και τα δυο σύμβολα f''' και $f^{(3)}$ αλλά για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους το σύμβολο με τους τόνους είναι άβολο, οπότε για την n-οστή παράγωγο χρησιμοποιούμε τα σύμβολα

$$f^{(n)}(\xi) \quad \text{ή} \quad D^n f(\xi) \quad \text{ή} \quad \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=\xi} \quad \text{ή} \quad \left.\frac{d^n y}{dx^n}\right|_{x=\xi}.$$

Τονίζουμε ότι, βάσει του ορισμού, η n-οστή παράγωγος της $y = f(x)$ στον ξ είναι το όριο

$$f^{(n)}(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\xi)}{x - \xi}$$

αρκεί η $(n-1)$-οστή παράγωγος να ορίζεται και να μην έχει τιμές $\pm\infty$ σε *διάστημα* το οποίο περιέχει τον ξ.

Τέλος, ας αναφέρουμε ότι καμιά φορά συμβολίζεται $y = f^{(0)}(x)$ η ίδια η συνάρτηση $y = f(x)$.

Παραδείγματα: (1) Αν ο n είναι φυσικός, οι παράγωγοι της $y = x^n$ είναι $\frac{d\,x^n}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^2\,x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{d^3\,x^n}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}, \dots, \frac{d^{n-1}\,x^n}{dx^{n-1}} = n(n-1)\cdots 2x$ και $\frac{d^n\,x^n}{dx^n} = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$. Επειδή η n-οστή παράγωγος είναι σταθερή, κάθε παράγωγος μεγαλύτερης τάξης είναι ίση με 0, δηλαδή $\frac{d^m\,x^n}{dx^m} = 0$ για κάθε $m > n$.

(2) Αν ο a δεν είναι φυσικός ή 0, οι παράγωγοι της $y = x^a$ είναι $\frac{d\,x^a}{dx} = ax^{a-1}$, $\frac{d^2\,x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$, $\frac{d^3\,x^a}{dx^3} = a(a-1)(a-2)x^{a-3}$ και, γενικά, για κάθε m είναι $\frac{d^m\,x^a}{dx^m} = a(a-1)\cdots(a-m+1)x^{a-m}$. Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής της δύναμης του x δεν είναι ίσος με 0 και, επομένως, καμιά παράγωγος δεν είναι ίση με 0.

(3) Αν $a > 0$, $a \neq 1$, οι παράγωγοι της $y = a^x$ είναι $\frac{d\,a^x}{dx} = a^x \log a$, $\frac{d^2\,a^x}{dx^2} = a^x(\log a)^2$ και, γενικά, $\frac{d^m\,a^x}{dx^m} = a^x(\log a)^m$ για κάθε m.

Ειδικά για την $y = e^x$ είναι $\frac{d^m\,e^x}{dx^m} = e^x$ για κάθε m.

(4) Οι παράγωγοι της $y = \sin x$ είναι $\frac{d\,\sin x}{dx} = \cos x$, $\frac{d^2\,\sin x}{dx^2} = -\sin x$, $\frac{d^3\,\sin x}{dx^3} = -\cos x$, $\frac{d^4\,\sin x}{dx^4} = \sin x$. Από το σημείο αυτό οι διαδοχικές παράγωγοι επαναλαμβάνουν τον «κύκλο»: $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$. Μπορούμε να γράψουμε $\frac{d^{2k}\,\sin x}{dx^{2k}} = (-1)^k \sin x$ και $\frac{d^{2k-1}\,\sin x}{dx^{2k-1}} = (-1)^{k-1}\cos x$ για κάθε φυσικό k.

Ομοίως, οι παράγωγοι της $y = \cos x$ είναι $\frac{d\,\cos x}{dx} = -\sin x$, $\frac{d^2\,\cos x}{dx^2} = -\cos x$, $\frac{d^3\,\cos x}{dx^3} = \sin x$, $\frac{d^4\,\cos x}{dx^4} = \cos x$. Από το σημείο αυτό οι διαδοχικές παράγωγοι επαναλαμβάνουν τον «κύκλο»: $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$. Μπορούμε να γράψουμε $\frac{d^{2k}\,\cos x}{dx^{2k}} = (-1)^k \cos x$ και $\frac{d^{2k-1}\,\cos x}{dx^{2k-1}} = (-1)^k \sin x$ για κάθε φυσικό k.

Θα δούμε τώρα μερικές εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου στη μελέτη μιας συνάρτησης.

Α. Τοπικά ακρότατα.

Η πρώτη εφαρμογή είναι ένα απλό κριτήριο για να αποφασίζουμε αν ένας αριθμός είναι σημείο τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης.

Πρόταση 6.10 ***Κριτήριο δεύτερης παραγώγου.*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο στο διάστημα (a, b), ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στον ξ.*
(1) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y = f(x)$.
(2) Αν $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) < 0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

Απόδειξη: (1) Έστω $f'(\xi) = 0$ και $f''(\xi) > 0$. Επειδή $f''(\xi) = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi}$, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$ ώστε να είναι $\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-\xi} > 0$ για κάθε x στην ένωση

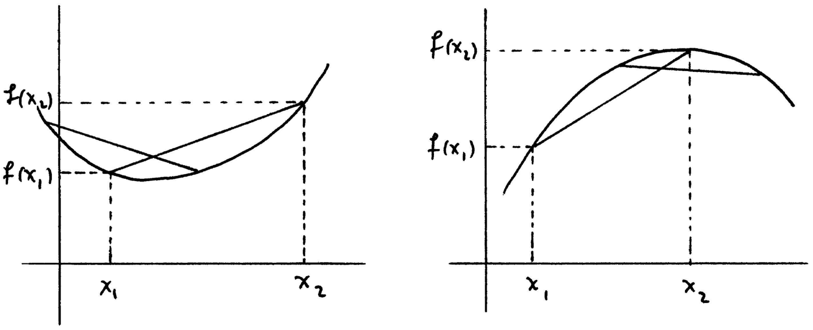
αυτή. Επομένως, $f'(x) > f'(\xi) = 0$ για κάθε x στο διάστημα (ξ, b) και $f'(x) < f'(\xi) = 0$ για κάθε x στο διάστημα (a, ξ). Επειδή η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[\xi, b)$ και στο $(a, \xi]$, συνεπάγεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, \xi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\xi, b)$ και, επομένως, ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης.
(2) Ομοίως.

Παραδείγματα: (1) Για την $y = x^2$ είναι $\frac{d\,x^2}{dx} = 2x$ και $\frac{d^2\,x^2}{dx^2} = \frac{d(2x)}{dx} = 2$, οπότε $\frac{d\,x^2}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ και $\frac{d^2\,x^2}{dx^2}\Big|_{x=0} = 2 > 0$. Άρα ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης.

(2) Δεν ισχύει το αντίστροφο του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου. Η $y = x^4$ έχει $\frac{d\,x^4}{dx} = 4x^3$ και $\frac{d^2\,x^4}{dx^2} = \frac{d(4x^3)}{dx} = 12x^2$, οπότε $\frac{d\,x^4}{dx}\Big|_{x=0} = 0$ και $\frac{d^2\,x^4}{dx^2}\Big|_{x=0} = 0$. Όμως, ο 0 είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της συνάρτησης.

Β. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **κυρτή στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Ομοίως, η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **κοίλη στο διάστημα** I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ το μέρος του γραφήματος το οποίο αντιστοιχεί στο διάστημα $[x_1, x_2]$ δεν έχει κανένα σημείο του κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.



Σχήμα 6.10: Κυρτή συνάρτηση και κοίλη συνάρτηση.

Θα διατυπώσουμε τώρα με μαθηματική ορολογία τις έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας. Η εξίσωση της ευθείας l η οποία διέρχεται από τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ είναι η

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε x του διαστήματος $[x_1, x_2]$, τότε το να μην είναι το αντίστοιχο σημείο $(x, f(x))$ του γραφήματος της $y = f(x)$ πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ ισοδυναμεί με το ότι το σημείο $(x, f(x))$ δεν είναι πάνω από το αντίστοιχο σημείο (x, y) της ευθείας l, δηλαδή ότι

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι *η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ και για κάθε x στο $[x_1, x_2]$ ισχύει η παραπάνω ανισότητα.*

Βάσει του ίδιου συλλογισμού, μπορούμε να πούμε ότι *η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ και για κάθε x στο $[x_1, x_2]$ ισχύει η ανισότητα:*

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1).$$

Υπάρχει ένας ακόμη τρόπος να διατυπώσουμε τις ανισότητες που χαρακτηρίζουν τις κυρτές και τις κοίλες συναρτήσεις. Παρατηρούμε εύκολα ότι για κάθε t στο $[0, 1]$ ο αριθμός $x = (1 - t)x_1 + tx_2$ είναι ανάμεσα στους x_1 και x_2. Αντιστρόφως, για κάθε x ανάμεσα στους x_1 και x_2 υπάρχει μοναδικός t στο διάστημα $[0, 1]$ ώστε να ισχύει $x = (1 - t)x_1 + tx_2$. Πράγματι, λύνοντας ως προς t, βρίσκουμε $t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, ο οποίος ανήκει στο $[0, 1]$. Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε την ανισότητα που ορίζει την έννοια της κυρτότητας στη μορφή $f\big((1 - t)x_1 + tx_2\big) \leq \big(f(x_2) - f(x_1)\big)t + f(x_1) = (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$ και να ξαναδιατυπώσουμε τον ορισμό της κυρτότητας ως εξής. *Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I αν για κάθε x_1 και x_2 στο I με $x_1 < x_2$ ισχύει*

$$f\big((1 - t)x_1 + tx_2\big) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Ο ορισμός της κοίλης συνάρτησης είναι όμοιος: περιέχει την ανισότητα

$$f\big((1 - t)x_1 + tx_2\big) \geq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$$

αντί της $f\big((1-t)x_1+tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$. Παρατηρήστε ότι, αν $x_1 = x_2$, οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν, έτσι κι αλλιώς, ως ισότητες.

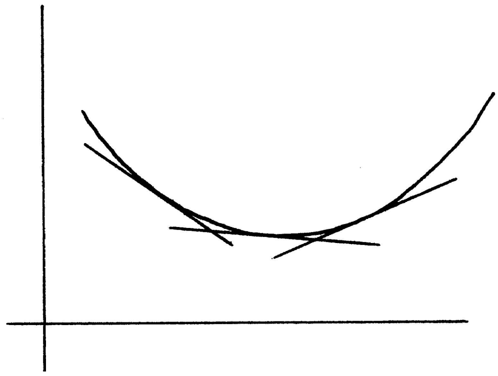
Παραδείγματα: (1) Κάθε γραμμική συνάρτηση $y = \mu x+\nu$ είναι κυρτή και κοίλη στο $(-\infty, +\infty)$. Πράγματι: $\mu((1-t)x_1+tx_2)+\nu = (1-t)(\mu x_1+\nu)+t(\mu x_2+\nu)$.

(2) Η συνάρτηση $y = x^2$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$, υπολογίζουμε: $((1 - t)x_1 + tx_2)^2 = (1 - t)^2x_1^2 + 2t(1 - t)x_1x_2 + t^2x_2^2 \leq (1 - t)^2x_1^2 + t(1 - t)(x_1^2 + x_2^2) + t^2x_2^2 = (1 - t)x_1^2 + tx_2^2$.

(3) Η συνάρτηση $y = |x|$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Διότι: $|(1 - t)x_1 + tx_2| \leq |(1 - t)x_1| + |tx_2| = (1 - t)|x_1| + t|x_2|$.

Στη συνέχεια θα δούμε δυο βασικά κριτήρια με τα οποία μπορούμε να αποφασίσουμε αν μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα.

Πρόταση 6.11 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι αύξουσα.
(2) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν η παράγωγος είναι φθίνουσα.



Σχήμα 6.11: Αύξουσες κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών: κυρτή συνάρτηση.

Απόδειξη: (1) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I. Παίρνουμε δυο οποιαδήποτε εσωτερικά σημεία x_1 και x_2 του I με $x_1 < x_2$ για να αποδείξουμε ότι $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Για κάθε x ανάμεσα στους x_1 και x_2 είναι $f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) + f(x_1)$. Αυτή η ανισότητα γράφεται και $\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε, παίρνοντας το όριο της αριστερής πλευράς καθώς $x \to x_1+$, βρίσκουμε ότι $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Ομοίως, η ίδια ανισότητα γράφεται και $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}$, οπότε, παίρνοντας το όριο της δεξιάς πλευράς καθώς $x \to x_2-$, βρίσκουμε ότι $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'(x_2)$. Συνδυάζοντας τις δυο τελευταίες ανισότητες, καταλήγουμε στην $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η παράγωγος συνάρτηση είναι αύξουσα. Θεωρούμε δυο οποιαδήποτε σημεία x_1 και x_2 του I (πιθανόν και άκρα) με $x_1 < x_2$ και σχηματίζουμε την $y = h(x) = f(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1) - f(x_1)$ στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Αυτή είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του (x_1, x_2) με τύπο $h'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Από τον τύπο αυτόν είναι φανερό ότι η παράγωγος $y = h'(x)$ είναι αύξουσα στο (x_1, x_2). Επίσης, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού γνωρίζουμε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο (x_1, x_2) ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ή, ισοδύναμα, $h'(\xi) = 0$. Συνεπάγεται ότι $h'(x) \leq 0$ για κάθε x στο (x_1, ξ) και $0 \leq h'(x)$ για κάθε x στο (ξ, x_2) και, επομένως, η $y = h(x)$ είναι φθίνουσα στο $[x_1, \xi]$ και αύξουσα στο $[\xi, x_2]$. Παρατηρούμε τώρα ότι $h(x_1) = h(x_2) = 0$ και συμπεραίνουμε ότι $h(x) \leq 0$ για κάθε x στο $[x_1, x_2]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι $f(x) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$ για κάθε x ανάμεσα στους x_1 και x_2 και, επομένως, η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I.
(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Παράδειγμα: Η $y = \begin{cases} 2x^2, & \text{αν } x \leq 0, \\ x^2, & \text{αν } 0 \leq x, \end{cases}$ έχει $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 4x, & \text{αν } x \leq 0, \\ 2x, & \text{αν } 0 \leq x. \end{cases}$ Η παράγωγος είναι αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και, επομένως, η συνάρτηση είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Παρατηρήστε, εν όψει της Πρότασης 6.12, ότι η συνάρτηση δεν έχει δεύτερη παράγωγο στον 0.

Η Πρόταση 6.11 δίνει ένα δεύτερο γεωμετρικό περιεχόμενο στις έννοιες της κυρτότητας και της κοιλότητας. Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει παράγωγο σε κάποιο διάστημα και ας συμβολίσουμε l_x την εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο $(x, f(x))$. Η κλίση της l_x είναι ίση με $f'(x)$. Η Πρόταση 6.11 λέει ότι η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα αν, καθώς ο x αυξάνεται, *η μεταβλητή εφαπτόμενη ευθεία l_x περιστρέφεται με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.* Ομοίως, η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο διάστημα αν, καθώς ο x αυξάνεται, η εφαπτόμενη ευθεία l_x περιστρέφεται με φορά ίδια με τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Βάσει της γνωστής μας σχέσης ανάμεσα στη μονοτονία μιας συνάρτησης και στο πρόσημο της παραγώγου της, έχουμε την εξής παραλλαγή του προηγούμενου αποτελέσματος.

Πρόταση 6.12 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έχει δεύτερη παράγωγο σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.*
(1) Η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \geq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.
(2) Η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I αν και μόνο αν ισχύει $f''(x) \leq 0$ για κάθε x εσωτερικό του I.

Παραδείγματα: (1) Για την $y = x(x-1)(x-2)$ έχουμε ότι $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 2$ και $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$. Στο διάστημα $(-\infty, 1)$ ισχύει $\frac{d^2y}{dx^2} \leq 0$ και, επομένως, η συνάρτηση είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$. Στο διάστημα $(1, +\infty)$ ισχύει $\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0$, οπότε η συνάρτηση είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$.

(2) Αν ο n είναι άρτιος φυσικός, η $y = x^n$ είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Αν ο n είναι περιττός φυσικός, η $y = x^n$ είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Πράγματι, αν ο n είναι άρτιος φυσικός, τότε $\frac{d^2\, x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ για κάθε x ενώ, αν ο n είναι περιττός φυσικός, τότε $\frac{d^2\, x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και $\frac{d^2\, x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} \leq 0$ για κάθε $x < 0$.

(3) Η $y = x^a$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $a \leq 0$ ή $a \geq 1$, και κοίλη στο $(0, +\infty)$, αν $0 \leq a \leq 1$. Διότι το πρόσημο της $\frac{d^2\, x^a}{dx^2} = a(a-1)x^{a-2}$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του γινομένου $a(a-1)$.

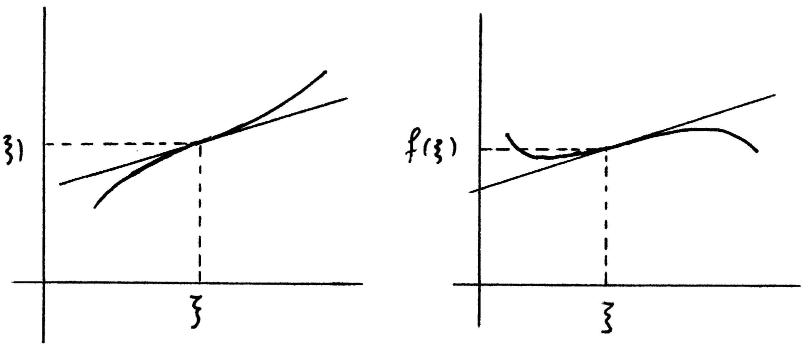
(4) Η $y = a^x$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$ για κάθε $a > 0$ διότι $\frac{d^2\, a^x}{dx^2} = a^x (\log a)^2 \geq 0$ για κάθε x.

(5) Η $y = \log_a x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$, αν $a > 1$, και κυρτή στο $(0, +\infty)$, αν $0 < a < 1$. Διότι το πρόσημο της $\frac{d^2\, \log_a x}{dx^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{1}{\log a}$ είναι το ίδιο με το πρόσημο του $-\frac{1}{\log a}$.

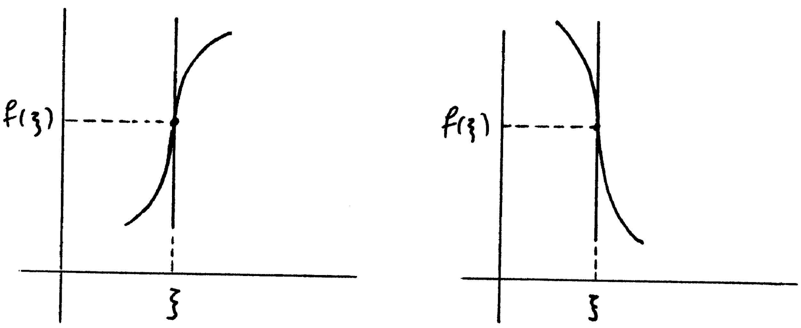
Γ. Σημεία καμπής.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ότι ο ξ ανήκει στο (a, b). Δηλαδή η $y = f(x)$ είναι ορισμένη και στις δυο μεριές του ξ. Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ, οπότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημά της στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ με εξίσωση $y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$, και αν ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα $(c,\xi]$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα $[\xi,d)$ ή, αντιθέτως, αν ισχύει $f(x) \leq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα $(c,\xi]$ και $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα $[\xi,d)$, τότε ο ξ χαρακτηρίζεται **σημείο καμπής** της $y=f(x)$. Επίσης, και στην περίπτωση που υπάρχει η παράγωγος $f'(\xi)$ και είναι ίση με $+\infty$ ή $-\infty$ λέμε ότι ο ξ είναι **σημείο καμπής** της $y=f(x)$.

Το ότι ο ξ είναι σημείο καμπής της $y=f(x)$ σημαίνει ότι *το μέρος του γραφήματος που είναι κοντά στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ και δεξιά του και το μέρος του γραφήματος που είναι κοντά στο $(\xi,f(\xi))$ και αριστερά του είναι το ένα στο ένα και το άλλο στο άλλο από τα δυο ημιεπίπεδα που ορίζει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα στο σημείο $(\xi,f(\xi))$.*



Σχήμα 6.12: Σημείο καμπής: $f'(\xi)$ αριθμός.



Σχήμα 6.13: Σημείο καμπής: $f'(\xi)=+\infty$ ή $-\infty$.

Η Πρόταση 6.13 δίνει ένα κριτήριο για να αποφασίζουμε αν ο ξ είναι σημείο καμπής της $y=f(x)$ στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στον ξ, δηλαδή αν ο $f'(\xi)$ είναι αριθμός.

Πρόταση 6.13 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b), ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα $(c, \xi]$ και κοίλη σε κάποιο $[\xi, d)$ ή, αντιθέτως, αν είναι κοίλη σε κάποιο $(c, \xi]$ και κυρτή σε κάποιο $[\xi, d)$, τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο $(c, \xi]$ και κοίλη στο $[\xi, d)$. Έχουμε δει στην απόδειξη της Πρότασης 6.11 ότι, επειδή η συνάρτηση είναι κυρτή στο $(c, \xi]$, συνεπάγεται $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε x στο $(c, \xi]$ και ότι, επειδή η συνάρτηση είναι κοίλη στο $[\xi, d)$, συνεπάγεται $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq f'(\xi)$ για κάθε x στο $[\xi, d)$. Άρα είναι $f(x) \geq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε x στο $(c, \xi]$ και $f(x) \leq f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$ για κάθε x στο $[\xi, d)$.

Μπορούμε, τώρα, να εφαρμόσουμε διάφορα κριτήρια για το πότε μια συνάρτηση είναι κυρτή ή κοίλη σε διαστήματα για να διακρίνουμε αν κάποιος αριθμός είναι σημείο καμπής μιας συνάρτησης. Για παράδειγμα:

Πρόταση 6.14 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b), ο ξ ανήκει στο (a, b) και η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ. Αν είναι $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (c, ξ) και $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο (ξ, d) ή, αντιθέτως, αν είναι $f''(x) \leq 0$ για κάθε x σε κάποιο (c, ξ) και $f''(x) \geq 0$ για κάθε x σε κάποιο (ξ, d), τότε ο ξ είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.*

Παράδειγμα: Η $y = x^3$ έχει παράγωγο $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ και δεύτερη παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$. Επειδή είναι $\frac{d^2y}{dx^2} \leq 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $\frac{d^2y}{dx^2} \geq 0$ στο $(0, +\infty)$, ο 0 είναι σημείο καμπής της συνάρτησης.

Δ. Ευθείες στήριξης.

Μια ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από κάτω** του γραφήματος της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος κάτω από την l. Αυτό σημαίνει ότι, αν η εξίσωση της l είναι $y = \mu x + \nu$, τότε πρέπει να ισχύει $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ και $f(x) \geq \mu x + \nu$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$.

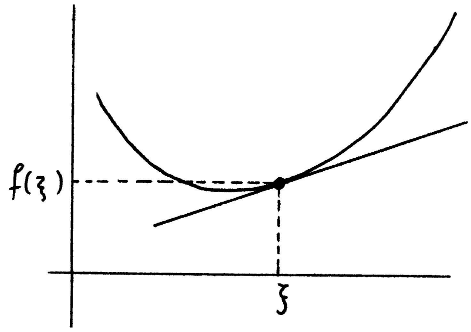
Ομοίως, η ευθεία l χαρακτηρίζεται **ευθεία στήριξης από πάνω** του γραφήματος της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν η l διέρχεται από το σημείο αυτό και δεν υπάρχει κανένα σημείο του γραφήματος πάνω από την l. Δηλαδή, αν η εξίσωση της l είναι $y = \mu x + \nu$, τότε πρέπει να ισχύει $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ και $f(x) \leq \mu x + \nu$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$.

Βάσει της ισότητας $f(\xi) = \mu\xi + \nu$ η εξίσωση της ευθείας στήριξης l γράφεται $y = \mu x + f(\xi) - \mu\xi$ ή, ισοδύναμα, $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι *μια ευθεία l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ αν έχει εξίσωση $y = \mu(x - \xi) + f(\xi)$ και ισχύει*

$$f(x) \geq \mu(x - \xi) + f(\xi)$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της $y = f(x)$. Υπάρχει, φυσικά, παρόμοια διατύπωση του ορισμού της ευθείας στήριξης από πάνω: γράφουμε

$$f(x) \leq \mu(x - \xi) + f(\xi)$$



Σχήμα 6.14: Ευθεία στήριξης από κάτω.

αντί $f(x) \geq \mu(x-\xi)+f(\xi)$. Επομένως, το να βρούμε αν υπάρχει και ποια είναι η ευθεία στήριξης είναι το ίδιο με το να προσδιορίσουμε τον συντελεστή μ.

Παραδείγματα: (1) Μια ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y=|x|$ στο σημείο της $(0,0)$ πρέπει να έχει εξίσωση $y=\mu x$. Το να είναι αυτή ευθεία στήριξης από κάτω ισοδυναμεί με το να ισχύει $|x| \geq \mu x$ για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$. Για $x=1$ παίρνουμε $\mu \leq 1$ ενώ για $x=-1$ παίρνουμε $-1 \leq \mu$ και, επομένως, αναγκαία συνθήκη είναι η $-1 \leq \mu \leq 1$. Αντιστρόφως, αν $-1 \leq \mu \leq 1$, τότε ισχύει $\mu x \leq |\mu x| = |\mu||x| \leq |x|$ για κάθε x. Άρα οι ευθείες στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y=|x|$ στο σημείο $(0,0)$ είναι οι ευθείες $y=\mu x$ $(-1 \leq \mu \leq 1)$.

(2) Μια ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y=(x^2-1)^2$ στο σημείο $(0,1)$ πρέπει να έχει εξίσωση $y=\mu x+1$. Το να είναι αυτή ευθεία στήριξης από κάτω ισοδυναμεί με το να ισχύει $(x^2-1)^2 \geq \mu x+1$ για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$. Όμως, για $x=1$ παίρνουμε $0 \geq \mu+1$ και για $x=-1$ παίρνουμε $0 \geq -\mu+1$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα δεν υπάρχει καμιά ευθεία στήριξης.

Η Πρόταση 6.15 είναι χρήσιμη όταν θέλουμε να βρούμε ευθείες στήριξης του γραφήματος μιας συνάρτησης.

Πρόταση 6.15 *Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I, ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, η $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και l είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y=f(x)$ στο σημείο $(\xi,f(\xi))$. Αν υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω ή από πάνω του γραφήματος της $y=f(x)$ στο σημείο $(\xi,f(\xi))$, τότε αυτή είναι οπωσδήποτε η l.*

Απόδειξη: Έστω ότι η εξίσωση της ευθείας στήριξης από κάτω είναι η $y=\mu(x-\xi)+f(\xi)$, δηλαδή ισχύει $f(x) \geq \mu(x-\xi)+f(\xi)$ για κάθε x στο I. Θα προσδιορίσουμε τον αριθμό μ.

Για κάθε $x>\xi$ στο I είναι $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq \mu$ και, παίρνοντας όριο καθώς $x \to \xi+$, βρίσκουμε ότι $f'(\xi) \geq \mu$. Κατόπιν, για κάθε $x<\xi$ στο I είναι $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq \mu$ και, παίρνοντας όριο καθώς $x \to \xi-$, βρίσκουμε ότι $f'(\xi) \leq \mu$. Άρα είναι $\mu=f'(\xi)$, οπότε η ευθεία στήριξης έχει εξίσωση $y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$ και ταυτίζεται με την l.

Η απόδειξη είναι παρόμοια και στην περίπτωση ευθείας στήριξης από πάνω.

Παραδείγματα: (1) Θα δούμε αν η τετραγωνική παραβολή $y = x^2$ έχει ευθεία στήριξής της από κάτω στο σημείο της $(3, 9)$. Αν υπάρχει τέτοια ευθεία στήριξης, αυτή πρέπει να είναι η εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη στο ίδιο σημείο, δηλαδή η $y = 6(x-3)+9$. Οπότε πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει $x^2 \geq 6(x-3)+9$ για κάθε x. Αυτό ισοδυναμεί με $(x-3)^2 \geq 0$ για κάθε x και αυτό, πράγματι, είναι σωστό.

(2) Ομοίως, θα δούμε αν η κυβική παραβολή $y = x^3$ έχει ευθεία στήριξής της από κάτω στο σημείο της $(3, 27)$. Παίρνουμε πάλι την εφαπτόμενη ευθεία στην καμπύλη στο ίδιο σημείο, δηλαδή την $y = 27(x-3)+27$ και πρέπει να ελέγξουμε αν ισχύει $x^3 \geq 27(x-3)+27$ για κάθε x. Αυτό ισοδυναμεί με $x^3 - 27x + 54 \geq 0$ για κάθε x και αυτό δεν είναι σωστό. Μια αιτιολόγηση είναι ότι $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 27x + 54) = -\infty$. Μια δεύτερη αιτιολόγηση είναι με αντιπαράδειγμα: $(-10)^3 - 27(-10) + 54 = -676 < 0$. Άρα η $y = x^3$ δεν έχει ευθεία στήριξής της από κάτω στο σημείο της $(3, 27)$ και με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι δεν έχει ούτε ευθεία στήριξής της από πάνω στο ίδιο σημείο.

Πρόταση 6.16 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I, ο ξ είναι εσωτερικό σημείο του I, η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και l είναι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.*
(1) Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I, τότε η l είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.
(2) Αν η $y = f(x)$ είναι κοίλη στο I, τότε η l είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος στο σημείο $(\xi, f(\xi))$.

Απόδειξη: (1) Η εξίσωση της l είναι η $y = f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$. Για κάθε x στο I με $x > \xi$ έχουμε ήδη αποδείξει ότι ισχύει $f'(\xi) \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και, επομένως, $f(x) - f(\xi) \geq f'(\xi)(x-\xi)$, οπότε $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$. Ομοίως, για κάθε x στο I με $x < \xi$ έχουμε αποδείξει ότι ισχύει $f'(\xi) \geq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ και, επομένως, $f(x) - f(\xi) \geq f'(\xi)(x-\xi)$, οπότε $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ισχύει $f(x) \geq f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi)$ για κάθε x στο I και, επομένως, η l είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος. Το ότι η l είναι η μοναδική ευθεία στήριξης από κάτω είναι ακριβώς το περιεχόμενο της Πρότασης 6.15.
(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του (1).

Παράδειγμα: Η $y = e^x$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$. Επομένως, το γράφημά της $y = e^x$ έχει ευθεία στήριξής του από κάτω στο σημείο $(0, e^0) = (0, 1)$ την εφαπτόμενή του ευθεία στο ίδιο σημείο, δηλαδή την ευθεία $y = x + 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι είναι $e^x \geq x + 1$ για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$.

Ε. Ανισότητες.

Θα δούμε τώρα κάποιες εφαρμογές της δεύτερης παραγώγου σε αποδείξεις ανισοτήτων. Οι εφαρμογές αυτές είναι, ουσιαστικά, απλές εφαρμογές της έννοιας της κυρτότητας (ή κοιλότητας) σε αποδείξεις ανισοτήτων.

Παραδείγματα: (1) Ισχύει $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ για κάθε x_1, x_2.
Αυτό είναι απλή εφαρμογή της κυρτότητας της $y = e^x$. Πράγματι, επειδή η $y = e^x$ είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$, είναι $e^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)e^{x_1} + te^{x_2}$ για κάθε

x_1 και x_2, $x_1 \neq x_2$, και κάθε t στο $[0,1]$. Αν θέσουμε $t = \frac{1}{2}$, τότε η τελευταία ανισότητα συνεπάγεται αυτήν που θέλουμε να αποδείξουμε στην περίπτωση $x_1 \neq x_2$. Αλλά και στην περίπτωση $x_1 = x_2$ η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει, προφανώς, ως ισότητα.

(2) Είναι $(x_1 + x_2) \log \frac{x_1+x_2}{2} \leq x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2$ για κάθε $x_1, x_2 > 0$.

Πράγματι, η $y = x \log x$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, διότι είναι $\frac{d^2 (x \log x)}{dx^2} = \frac{1}{x} \geq 0$ για κάθε x στο $(0, +\infty)$. Εφαρμόζοντας, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, τη βασική ανισότητα της κυρτότητας με $t = \frac{1}{2}$, βλέπουμε ότι ισχύει $\frac{x_1+x_2}{2} \log \frac{x_1+x_2}{2} \leq \frac{x_1 \log x_1 + x_2 \log x_2}{2}$ για κάθε x_1, x_2 στο $(0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$. Αυτή είναι η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε στην περίπτωση $x_1 \neq x_2$, ενώ στην περίπτωση $x_1 = x_2$ η ανισότητα ισχύει, προφανώς, ως ισότητα.

(3) Θα αποδείξουμε ότι $x^{\frac{3}{4}} \leq \frac{3}{4}(x-1) + 1$ για κάθε $x \geq 0$.

Η ανισότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί και με στοιχειώδη τρόπο – πώς; Εδώ θα την αποδείξουμε χρησιμοποιώντας το ότι η $y = x^{\frac{3}{4}}$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$. Αυτό συνεπάγεται ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της $y = x^{\frac{3}{4}}$ στο σημείο $(1,1)$ είναι ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος και αυτό «μεταφράζεται» στην ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

Ασκήσεις.

A. Παράγωγοι ανώτερης τάξης.

1. Αποδείξτε ότι η $y = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 0, \\ -x^2, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$, δυο φορές παραγωγίσιμη στην $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αλλά ότι δεν έχει δεύτερη παράγωγο στον 0.

   Γενικά, για οποιονδήποτε φυσικό k θεωρήστε την $y = \begin{cases} x^k, & \text{αν } x \geq 0, \\ -x^k, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ και υπολογίστε (αν υπάρχει) την $\frac{d^n y}{dx^n}$ για κάθε φυσικό n.

2. Έστω ότι η $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(a, \xi]$ και η $y = h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\xi, b)$. Αν $g(\xi) = h(\xi)$, $g'_-(\xi) = h'_+(\xi)$ και $g''_-(\xi) = h''_+(\xi)$, αποδείξτε ότι η $y = f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{αν } a < x \leq \xi, \\ h(x), & \text{αν } \xi \leq x < b, \end{cases}$ έχει δεύτερη παράγωγο στον ξ και $f''(\xi) = g''_-(\xi) = h''_+(\xi)$.

3. Αν η $y = p(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 1$, αποδείξτε ότι η $y = p'(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n - 1$. Αποδείξτε και το αντίστροφο. (Προσέξτε: το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό!)

   Έστω ακέραιος $N \geq 0$. Αποδείξτε ότι είναι $f^{(N+1)}(x) = 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα (όχι μονοσύνολο) I αν και μόνο αν η $y = f(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\leq N$.

4. $^{(*)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στο διάστημα (a, b) και $f(x)f''(x) \geq 0$ για κάθε x στο (a, b). Αν στο (a, b) περιέχονται δυο λύσεις

της εξίσωσης $f(x)f'(x) = 0$, αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι σταθερή ανάμεσα στις δυο αυτές λύσεις.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε την $\big(f(x)f'(x)\big)'$.)

5. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$.

   Αποδείξτε ότι είναι

   $$p^{(n)}(0) = n!a_n, \qquad a_n = \frac{p^{(n)}(0)}{n!}$$

   για κάθε $n = 0, 1, \ldots, N$.

   Επίσης, αποδείξτε ότι είναι $p^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \geq N + 1$.

   Έστω αριθμοί $y_0, y_1, \ldots, y_N$. Βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x)$ βαθμού $\leq N$ ώστε να είναι $p^{(n)}(0) = y_n$ για κάθε $n = 0, 1, \ldots, N$. Πόσες τέτοιες πολυωνυμικές συναρτήσεις υπάρχουν;

6. Έστω πολυώνυμο $p(x)$ και φυσικός $k \geq 2$.

   Αποδείξτε ότι, αν το $p(x)$ διαιρείται από το $(x - \xi)^k$, τότε η παράγωγος, δηλαδή το πολυώνυμο $p'(x)$, διαιρείται από το $(x - \xi)^{k-1}$.

   Αντιστρόφως, αποδείξτε ότι, αν το $p'(x)$ διαιρείται από το $(x - \xi)^{k-1}$ και είναι $p(\xi) = 0$, τότε το $p(x)$ διαιρείται από το $(x - \xi)^k$.

   (Υπόδειξη: Γράψτε $p(x) = q(x)(x - \xi)^k + r(x)$ με πολυώνυμα $q(x), r(x)$, όπου το $r(x)$ είναι είτε το μηδενικό πολυώνυμο είτε έχει βαθμό μικρότερο από k.)

7. Θεωρούμε την $y = (x^2 - 1)^n$. Αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό n η εξίσωση $\frac{d^ny}{dx^n} = 0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις και ότι όλες περιέχονται στο διάστημα $(-1, 1)$.

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το πρώτο μέρος της προηγούμενης άσκησης.)

8. Αποδείξτε τον **τύπο του Leibniz**:

   $$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

   (Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη του δυωνυμικού τύπου του Newton.)

9. Θεωρήστε την $y = f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ στο $(0, +\infty)$.

   Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι για κάθε φυσικό n ισχύει $f^{(n)}(x) = x^{-2n}p_n(x)e^{-\frac{1}{x}}$ για κάθε x στο $(0, +\infty)$, όπου $p_n(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού $n - 1$. Για παράδειγμα: $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = 1 - 2x$, $p_3(x) = 1 - 6x + 6x^2$ κλπ.

   Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = x^2{p_n}'(x) + (1 - 2nx)p_n(x)$ στο $(0, +\infty)$.

   (Υπόδειξη: Παραγωγίστε την $f^{(n)}(x) = x^{-2n}p_n(x)e^{-\frac{1}{x}}$.)

Αποδείξτε ότι $p_{n+2}(x) = (1 - 2(n+1)x)p_{n+1}(x) - n(n+1)x^2 p_n(x)$ στο $(0,+\infty)$.

(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $x^2 f'(x) = f(x)$ στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίστε n φορές με τον τύπο του Leibniz της προηγούμενης άσκησης.)

Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο $p_n(x)$ είναι ο $(-1)^{n-1}n!$.

Αποδείξτε ότι $x^2 {p_n}''(x) - (2nx - 2x - 1){p_n}'(x) + n(n-1)p_n(x) = 0$ στο $(0,+\infty)$.

10. Θεωρήστε την $y = f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ στο $(-\infty,+\infty)$.

    Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι για κάθε φυσικό n ισχύει $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$, όπου $p_n(x)$ είναι κάποιο πολυώνυμο βαθμού n. Για παράδειγμα: $p_1(x) = x$, $p_2(x) = 1 + x^2$, $p_3(x) = 3x + x^3$ κλπ.

    Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = {p_n}'(x) + xp_n(x)$ στο $(-\infty,+\infty)$.

    Αποδείξτε ότι $p_{n+1}(x) = xp_n(x) + np_{n-1}(x)$ στο $(-\infty,+\infty)$.

    (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $f'(x) = xf(x)$ στο $(-\infty,+\infty)$ και παραγωγίστε n φορές με τον τύπο του Leibniz της προπροηγούμενης άσκησης.)

    Αποδείξτε ότι ο συντελεστής του x^n στο $p_n(x)$ είναι ο 1.

    Αποδείξτε ότι ${p_n}''(x) + x{p_n}'(x) - np_n(x) = 0$ στο $(-\infty,+\infty)$.

11. Έστω τρία σημεία (x,y), (x',y') και (x'',y'') του xy-επιπέδου που δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αποδείξτε ότι η ακτίνα R του κύκλου που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία είναι ίση με

$$\frac{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}\sqrt{(x''-x)^2 + (y''-y)^2}\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2}}{2\big|(x'-x)(y''-y) - (x''-x)(y'-y)\big|}.$$

    Έστω $x = x(t)$ και $y = y(t)$ $(a < t < b)$ οι παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης στο xy-επίπεδο. Για κάθε t στο διάστημα (a,b) έστω πολύ μικρό $h > 0$ και τα σημεία $(x(t),y(t))$, $(x(t+h),y(t+h))$ και $(x(t-h),y(t-h))$ της καμπύλης. Αν συμβολίσουμε $R_{t,h}$ την ακτίνα του κύκλου που διέρχεται από τα τρία αυτά σημεία και R_t το όριο $\lim_{h\to 0+} R_{t,h}$, τότε ο R_t ονομάζεται **ακτίνα καμπυλότητας** της καμπύλης στο σημείο $(x(t),y(t))$.

    Αποδείξτε ότι

$$R_t = \frac{\big((x'(t))^2 + (y'(t))^2\big)^{\frac{3}{2}}}{\big|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)\big|}.$$

    Βρείτε σε κάθε σημείο του την ακτίνα καμπυλότητας του κύκλου με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = x_0 + r_0 \cos t$ και $y = y(t) = y_0 + r_0 \sin t$. Τι παρατηρείτε; Ποιοι κύκλοι έχουν μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας;

    Βρείτε σε κάθε σημείο της την ακτίνα καμπυλότητας της έλλειψης με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = x_0 + \kappa_0 \cos t$ και $y = y(t) = y_0 + \mu_0 \sin t$. Σε ποια σημεία είναι η ακτίνα καμπυλότητας μέγιστη; ελάχιστη;

Αποδείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας του γραφήματος της $y = f(x)$ στο σημείο $(x, f(x))$, όπου x είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος στο οποίο είναι ορισμένη η συνάρτηση, είναι ίση με $\frac{(1+(f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$.

Βρείτε σε κάθε σημείο της την ακτίνα καμπυλότητας της παραβολής $y = x^2$ καθώς και της υπερβολής $y = \frac{1}{x}$.

Ποια είναι η ακτίνα καμπυλότητας μιας ευθείας σε οποιοδήποτε σημείο της; Μπορούν να θεωρηθούν οι ευθείες ως «μεγάλοι κύκλοι»;

Β. Τοπικά ακρότατα.

1. Εφαρμόστε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου για να βρείτε τα σημεία τοπικού ακροτάτου των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = x^3 - 4x^2 + x + 3, \qquad y = xe^x\,, \qquad y = x\log x.$$

Γ. Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις.

1. Βρείτε τα διαστήματα στα οποία οι παρακάτω συναρτήσεις είναι κυρτές ή κοίλες.

$$y = x^3 - 3x^2 + 6x, \quad y = x^2(x-1)^2\,, \quad y = \frac{x}{x+1}\,, \quad y = \frac{1}{\log x}\,, \quad y = \sin x.$$

2. Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν η $y = -f(x)$ είναι κοίλη στο ίδιο διάστημα.

   Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι κυρτή και κοίλη σε κάποιο διάστημα αν και μόνο αν είναι πολυωνυμική βαθμού ≤ 1 ή μηδενική.

3. (*) Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα I και x_1, x_0, x_2 σημεία στο I με $x_1 < x_0 < x_2$. Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται *πάνω* στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$, αποδείξτε με γεωμετρικό και με μαθηματικό τρόπο, ότι για κάθε x με $x_1 < x < x_2$ το σημείο $(x, f(x))$ βρίσκεται *πάνω* στο ίδιο ευθύγραμμο τμήμα ή, με άλλα λόγια, ότι το μέρος του γραφήματος που αντιστοιχεί στο $[x_1, x_2]$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.

   (Υπόδειξη: Έστω $x_1 < x < x_0$. Συνδυάστε μια ισότητα σχετική με την τριάδα x_1, x_0, x_2 , και δυο ανισότητες σχετικές με τις τριάδες x_1, x, x_0 και x, x_0, x_2 .)

4. (*) Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή και άνω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$, αποδείξτε με γεωμετρικό και με μαθηματικό τρόπο ότι είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$.

   (Υπόδειξη: Έστω $f(x) \leq u$ για κάθε x. Θεωρήστε οποιουσδήποτε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Αν $x > x_2$ συνδυάστε μια ανισότητα σχετική με την τριάδα x_1, x_2, x με την $f(x) \leq u$, πάρτε όριο καθώς $x \to +\infty$ και αποδείξτε ότι $f(x_2) \leq f(x_1)$. Παρομοίως, εργαστείτε με $x < x_1$ και αποδείξτε ότι $f(x_2) \geq f(x_1)$.)

5. $^{(*)}$ Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα I, αποδείξτε με γεωμετρικό και με μαθηματικό τρόπο ότι είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του I.

   (Υπόδειξη: Έστω ξ εσωτερικό του I. Θεωρήστε x_1, x_2 στο I με $x_1 < \xi < x_2$. Για $\xi < x < x_2$, γράψτε δυο ανισότητες σχετικές με τις τριάδες x_1, ξ, x και ξ, x, x_2 και με την ιδιότητα παρεμβολής βρείτε το $\lim_{x\to\xi+} f(x)$.)

Δ. Σημεία καμπής.

1. Βρείτε τα σημεία καμπής των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = x^3-3x^2+6x, \quad y = x^2(x-1)^2\,, \quad y = \frac{x}{x+1}\,, \quad y = \frac{1}{\log x}\,, \quad y = \sin x.$$

2. Αποδείξτε ότι ο 0 είναι σημείο καμπής της $y = \begin{cases} x^2\big(\frac{|x|}{x} + \sin\frac{1}{x}\big), & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

   Μπορεί να εφαρμοστεί η Πρόταση 6.13 ή η Πρόταση 6.14;

3. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b) και έστω ότι ο ξ ανήκει στο (a, b). Αν είναι είτε $f'(x) \geq f'(\xi)$ για κάθε x στο (a, b) είτε $f'(x) \leq f'(\xi)$ για κάθε x στο (a, b), αποδείξτε ότι ο ξ είναι σημείο καμπής της $y = f(x)$.

Ε. Ευθείες στήριξης.

1. Βρείτε όλες τις ευθείες στήριξης – είτε από πάνω είτε από κάτω – των γραφημάτων των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y = x,\ y = |x|,\ y = x^2\,,\ y = x^3\,,\ y = e^{-2x}\,,\ y = \frac{1}{x^2+1}\,,\ y = x\log x.$$

2. $^{(*)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα I.

   (1) Αν για κάθε x εσωτερικό του I υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y = f(x)$ στο σημείο $(x, f(x))$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι κυρτή στο I.

   (Υπόδειξη: Πάρτε x_1, x, x_2 στο I με $x_1 < x < x_2$ και συνδυάστε τις $f(x_1) \geq \mu(x_1 - x) + f(x)$ και $f(x_2) \geq \mu(x_2 - x) + f(x)$.)

   (2) Το αντίστροφο του (1). Αν η $y = f(x)$ είναι κυρτή στο I, αποδείξτε ότι για κάθε x εσωτερικό του I υπάρχει ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y = f(x)$ στο σημείο $(x, f(x))$.

   (Υπόδειξη: Πάρτε x_0 εσωτερικό του I. Παρατηρήστε ότι η $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x στο σύνολο $I \setminus \{x_0\}$. Να συμπεράνετε ότι υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to x_0\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ότι είναι αριθμοί και ότι ικανοποιούν την $\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Πάρτε οποιονδήποτε μ ανάμεσα στα δυο αυτά όρια και αποδείξτε ότι η ευθεία $y = \mu(x - x_0) + f(x_0)$ είναι ευθεία στήριξης από κάτω του γραφήματος της $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.)

ΣΤ. Ανισότητες.

1. Έστω $a \geq 1$ ή $a \leq 0$. Αποδείξτε ότι
$$\big((1-t)x_1+tx_2\big)^a \leq (1-t){x_1}^a+t{x_2}^a \qquad (x_1,x_2>0, 0\leq t\leq 1),$$
$$x^a \geq a\xi^{a-1}(x-\xi)+\xi^a \qquad (x,\xi>0).$$
Αποδείξτε ότι οι ανισότητες αυτές αντιστρέφονται αν $0\leq a\leq 1$.

2. Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι
$$a^{(1-t)x_1+tx_2} \leq (1-t)a^{x_1}+ta^{x_2} \qquad (0\leq t\leq 1),$$
$$a^x \geq a^\xi \log a\,(x-\xi)+a^\xi\,.$$

3. Αποδείξτε ότι
$$\log\big((1-t)x_1+tx_2\big) \geq (1-t)\log x_1+t\log x_2 \qquad (x_1,x_2>0, 0\leq t\leq 1),$$
$$\log x \leq \frac{1}{\xi}(x-\xi)+\log\xi \qquad (x,\xi>0).$$

4. (*) Αποδείξτε την ανισότητα του Young στην άσκηση Β17 της ενότητας 6.9, δηλαδή την $a^{1-t}b^t \leq (1-t)a+tb$ $(a,b>0, 0<t<1)$ με δυο τρόπους: χρησιμοποιώντας (i) το ότι η $y=\log x$ είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ και (ii) το ότι η x^t είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ όταν $0<t<1$.

   (Υπόδειξη: (i) Η $a^{1-t}b^t \leq (1-t)a+tb$ είναι ισοδύναμη με την $(1-t)\log a+t\log b \leq \log\big((1-t)a+tb\big)$. (ii) Χρησιμοποιήστε την ευθεία στήριξης από πάνω του γραφήματος της $y=x^t$ στο σημείο $(1,1)$ και κατόπιν πάρτε $x=\frac{b}{a}$.)

5. (*) Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα I. Έστω $x_1,\dots,x_n$ στο I και αριθμοί $\mu_1,\dots,\mu_n>0$ με $\mu_1+\cdots+\mu_n=1$. Αποδείξτε ότι
$$f\big(\mu_1x_1+\cdots+\mu_nx_n\big) \leq \mu_1f(x_1)+\cdots+\mu_nf(x_n).$$
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την αρχή της επαγωγής ως προς τον n. Για το επαγωγικό βήμα απο τον n στον $n+1$ πάρτε $t=\mu_{n+1}$, ${x_1}'=\frac{\mu_1}{1-\mu_{n+1}}x_1+\cdots+\frac{\mu_n}{1-\mu_{n+1}}x_n$ και ${x_2}'=x_{n+1}$.)

   Αποδείξτε την ανισότητα του Hölder στην άσκηση Β17 της ενότητας 6.9 χρησιμοποιώντας το ότι η $y=x^t$ είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$ όταν $0<t<1$.

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε $x_1=\frac{b_1}{a_1}$, $\dots$, $x_n=\frac{b_n}{a_n}$ και $\mu_1=\frac{a_1}{A}$, $\dots$, $\mu_n=\frac{a_n}{A}$, όπου $A=a_1+\cdots+a_n$.)

   Αποδείξτε την ανισότητα ${a_1}^{\mu_1}\cdots{a_n}^{\mu_n} \leq (\mu_1{a_1}^x+\cdots+\mu_n{a_n}^x)^{\frac{1}{x}}$ στην άσκηση Β17 της ενότητας 6.9 (και πάλι) χρησιμοποιώντας το ότι η $y=-\log x$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε $x_1={a_1}^x$, $\dots$, $x_n={a_n}^x$.)

6.11 Υπολογισμός απροσδιόριστων μορφών.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε εφαρμογές των παραγώγων στον υπολογισμό απροσδιόριστων μορφών $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Οι εφαρμογές αυτές εκφράζονται μέσω των δυο Κανόνων του l' Hopitâl.

Α. Όρια συναρτήσεων.

Ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl που θα μελετήσουμε αμέσως τώρα αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Πρόταση 6.17 ***Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl.*** *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (ξ, b) και ότι είναι $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο (ξ, b). Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν (με τις προφανείς προσαρμογές) και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη: Οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ δε θεωρούνται κατ' αρχάς ορισμένες στο σημείο ξ, αλλά τώρα τις ορίζουμε και στον ξ θέτοντας $f(\xi) = 0$ και $g(\xi) = 0$. Λόγω της υπόθεσης $\lim_{x\to\xi+} f(x) = \lim_{x\to\xi+} g(x) = 0$, οι δυο συναρτήσεις είναι τώρα συνεχείς στο διάστημα $[\xi, b)$.

Έστω $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε x στο διάστημα (ξ, b) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Από το Θεώρημα 6.4 συνεπάγεται ότι για κάθε x στο (ξ, b) υπάρχει κάποιος ζ στο (ξ, x) ώστε να είναι $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$. Τώρα, για κάθε x στο διάστημα (ξ, b) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$ συνεπάγεται ότι και ο αντίστοιχος ζ είναι στο (ξ, b) και ικανοποιεί την $\xi < \zeta < \xi + \delta$, οπότε ισχύει $\left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \epsilon$ και, επομένως, είναι $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι είναι $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε x στο διάστημα (ξ, b) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις: $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$. Επίσης, η απόδειξη είναι παρόμοια και στις περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$.

Τώρα ανάγουμε την περίπτωση $x \to +\infty$ στην περίπτωση $x \to 0+$.

Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο $(a, +\infty)$ με $a > 0$, ότι είναι $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο $(a, +\infty)$ και ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ υπάρχει και θα αποδείξουμε ότι και το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = \frac{1}{x}$, ορίζουμε τις συναρτήσεις $F(t) = f(\frac{1}{t}) = f(x)$ και $G(t) = g(\frac{1}{t}) = g(x)$ στο διάστημα $(0, \frac{1}{a})$ και παρατηρούμε ότι είναι $G(t) = g(x) \neq 0$ και $G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t}) = -x^2 g'(x) \neq 0$ για κάθε t στο $(0, \frac{1}{a})$. Επίσης, είναι $\lim_{t\to0+} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 f'(x)}{-x^2 g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ και, επομένως, το όριο $\lim_{t\to0+} \frac{F'(t)}{G'(t)}$ υπάρχει. Συνεπάγεται ότι και το όριο $\lim_{t\to0+} \frac{F(t)}{G(t)}$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το προηγούμενο. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+} \frac{F(t)}{G(t)}$, συνεπάγεται ότι και το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ υπάρχει και είναι το ίδιο με το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Με τον ίδιο τρόπο η περίπτωση $x \to -\infty$ ανάγεται στην περίπτωση $x \to 0-$.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$. Στο $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύει $\sin x \neq 0$ και $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \neq 0$. Επίσης, είναι $\lim_{x\to 0}(e^x-1) = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$. Τώρα υπολογίζουμε το όριο του λόγου των παραγώγων: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. Επομένως, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x} = 1$.

Ο Δεύτερος Κανόνας του l' Hopitâl που ακολουθεί αναφέρεται στην απροσδιόριστη μορφή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ή, καλύτερα, σε μια γενίκευσή της.

Πρόταση 6.18 ***Δεύτερος Κανόνας του l' Hopitâl.*** *Έστω ότι οι $y = f(x)$, $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα (ξ, b) και ότι είναι $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο (ξ, b). Υποθέτουμε, επίσης, ότι $\lim_{x\to\xi+} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και τα δυο αυτά όρια έχουν την ίδια τιμή. Δηλαδή*

$$\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Όλα τα προηγούμενα ισχύουν (με τις προφανείς προσαρμογές) και για κάθε άλλη περίπτωση ορίου: $x \to \xi-$, $x \to \xi$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Απόδειξη: Έστω ότι είναι $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \eta$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \eta\right| < \frac{\epsilon}{6}$ για κάθε x στο διάστημα (ξ, b) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta'$. Επιλέγουμε τώρα κάποιον x_0 στο (ξ, b) με $\xi < x_0 < \xi + \delta'$. Κατόπιν, επειδή είναι $\lim_{x\to\xi+} |g(x)| = +\infty$, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $|g(x)| > \max\left\{|g(x_0)|, \frac{3}{\epsilon}|f(x_0)|, \frac{3|\eta|}{\epsilon}|g(x_0)|\right\}$ για κάθε x στο (ξ, b) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta''$. Τώρα ορίζουμε $\delta = \min\{x_0 - \xi, \delta''\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε x στο (ξ, b) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$ ικανοποιεί και τις ανισότητες $\xi < x < x_0 < \xi + \delta'$ και $\xi < x < \xi + \delta''$. Από το Θεώρημα 6.4 συνεπάγεται ότι για κάθε τέτοιον x υπάρχει κάποιος ζ στο (x, x_0) ώστε να είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}$. Άρα και ο ζ ανήκει στο (ξ, b) και ικανοποιεί την $\xi < \zeta < \xi + \delta'$, οπότε είναι $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} - \eta\right| = \left|\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)} - \eta\right| < \frac{\epsilon}{6}$. Συνεπάγεται ότι $|f(x) - f(x_0) - \eta(g(x) - g(x_0))| < \frac{\epsilon}{6}|g(x) - g(x_0)|$, οπότε $|f(x) - \eta g(x)| < \frac{\epsilon}{6}(|g(x)| + |g(x_0)|) + |f(x_0)| + |\eta||g(x_0)|$ και, επομένως, $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \frac{\epsilon}{6}\Big(1 + \frac{|g(x_0)|}{|g(x)|}\Big) + \frac{|f(x_0)|}{|g(x)|} + |\eta|\frac{|g(x_0)|}{|g(x)|} < \frac{\epsilon}{6}(1+1) + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \eta\right| < \epsilon$ για κάθε x στο (ξ, b) που ικανοποιεί την $\xi < x < \xi + \delta$. Άρα είναι $\lim_{x\to\xi+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta$.

Οι περιπτώσεις $\lim_{x\to\xi+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ καθώς και οι περιπτώσεις $x \to \xi-$ και $x \to \xi$ αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο. Οι περιπτώσεις $x \to \pm\infty$ ανάγονται στις $x \to 0\pm$ όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.17.

Στις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl δεν αναφέρεται αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to\xi+} f(x)$ ούτε το ποια ακριβώς είναι η τιμή του (αν αυτό υπάρχει). Επομένως, οι απροσδιόριστες μορφές $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ είναι ειδικές περιπτώσεις του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl, όπως τον έχουμε διατυπώσει.

Παραδείγματα: (1) Θα αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0\quad(b>0,a>1).}$$

Θεωρούμε πρώτα την ειδική περίπτωση με $b=1$, δηλαδή το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$ με $a>1$. Τώρα είναι $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, οπότε το όριο που πρέπει να αποδείξουμε είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Στο $(-\infty,+\infty)$ είναι $a^x\neq 0$ και $\frac{d\,a^x}{dx}=a^x\log a\neq 0$. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{1}{a^x\log a}$ και έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x\log a}=0$. Από τον Δεύτερο Κανόνα συνεπάγεται ότι είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{a^x}=0$.

Τώρα η γενική περίπτωση ανάγεται στην ειδική. Επειδή $a^{\frac{1}{b}}>1$, έχουμε: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{x}{(a^{\frac{1}{b}})^x}\big)^b=\big(\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(a^{\frac{1}{b}})^x}\big)^b=0^b=0$.

(2) Θα αποδείξουμε το

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^b}{x^a}=0\quad(b>0,a>0).}$$

Πρώτα θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$ με $a>0$. Είναι $\lim_{x\to+\infty}\log x=+\infty$ και $\lim_{x\to+\infty}x^a=+\infty$, οπότε προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Στο $(0,+\infty)$ είναι $x^a\neq 0$ και $\frac{d\,x^a}{dx}=ax^{a-1}\neq 0$. Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}}=\frac{1}{ax^a}$ και έχουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{ax^a}=0$. Από τον Δεύτερο Κανόνα συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^a}=0$.

Για τη γενική περίπτωση: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^b}{x^a}=\lim_{x\to+\infty}\big(\frac{\log x}{x^{\frac{a}{b}}}\big)^b=0^b=0$ διότι είναι $\frac{a}{b}>0$.

(3) Το $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}$ αποτελεί περίπτωση απροσδιόριστης μορφής $\frac{+\infty}{+\infty}$. Πράγματι, είναι $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$. Επίσης, από την ανισότητα $x-\cos x\geq x-1$ συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty}(x-\cos x)=+\infty$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το αρχικό όριο υπολογίζεται πολύ εύκολα: από την ανισότητα $\big|\frac{\cos x}{x}\big|\leq\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$ και, επομένως, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\cos x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\big(1-\frac{\cos x}{x}\big)=1-0=1$.

Όμως ο Δεύτερος Κανόνας δε βοηθά! Ο λόγος των παραγώγων είναι $\frac{1+\sin x}{1}=1+\sin x$ και δεν υπάρχει το όριό του διότι, όπως ήδη γνωρίζουμε, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\sin x$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει, επίσης, ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του Κανόνα του l' Hopitâl. Πράγματι, στο παράδειγμα αυτό υπάρχει το όριο του λόγου των συναρτήσεων αλλά δεν υπάρχει το όριο του λόγου των παραγώγων τους.

Υπάρχουν, όμως, και άλλες απροσδιόριστες μορφές πέραν των $\frac{0}{0}$ και $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Σε κάθε περίπτωση μετασχηματίζουμε την απροσδιόριστη μορφή που αντιμετωπίζουμε σε μια από τις βασικές αυτές απροσδιόριστες μορφές και κατόπιν εφαρμόζουμε τον κατάλληλο Κανόνα του l' Hopitâl. Θα περιγράψουμε, τελείως σχηματικά, πώς περίπου χειριζόμαστε τις διάφορες περιπτώσεις.

(1) Έστω $\lim f(x)=0$ και $\lim g(x)=\pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το

$\lim f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $0(\pm\infty)$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να μετατρέψουμε σε $\lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, δηλαδή σε απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
(2) Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = -\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim(f(x) + g(x))$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty) + (-\infty)$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim \big(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{f(x)}\big) f(x)g(x)$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $0(-\infty)$. Έτσι αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.
(3) Έστω $\lim f(x) = 0$, όπου η $y = f(x)$ έχει θετικό πρόσημο, και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου 0^0. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $0(-\infty)$.
(4) Έστω $\lim f(x) = +\infty$ και $\lim g(x) = 0$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty)^0$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $0(+\infty)$.
(5) Τέλος, έστω $\lim f(x) = 1$ και $\lim g(x) = \pm\infty$ και ότι έχουμε να υπολογίσουμε το $\lim f(x)^{g(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $1^{\pm\infty}$. Τότε μετατρέπουμε σε $\lim e^{g(x)\log f(x)}$, δηλαδή απροσδιόριστη μορφή τύπου $(\pm\infty)0$.

Παραδείγματα: (1) Θα υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0+} x\log x$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $0(-\infty)$. Γράφουμε $x\log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$, οπότε $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του Δεύτερου Κανόνα: $\frac{1}{x} \neq 0$ και $\frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ για κάθε x στο $(0, +\infty)$. Τώρα, για τον λόγο των παραγώγων ισχύει $\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0+} x = 0$. Άρα $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$.

(2) Το $\lim_{x\to 0+} x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου 0^0. Γράφουμε $x^x = e^{x\log x}$ και, βάσει του προηγούμενου ορίου, $\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\log x} = e^0 = 1$ διότι η $y = e^x$ είναι συνεχής στον 0.

(3) Το $\lim_{x\to 0+} \big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\big)$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty) - (+\infty)$. Γράφουμε $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x\sin x}$ και έχουμε $\lim_{x\to 0+}(x - \sin x) = 0$ και $\lim_{x\to 0+} x\sin x = 0$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του Πρώτου Κανόνα: είναι $x\sin x \neq 0$ και $\frac{d(x\sin x)}{dx} = \sin x + x\cos x \neq 0$ για κάθε x στο $(0, \frac{\pi}{2})$ (διότι είναι $\sin x > 0$, $x > 0$ και $\cos x > 0$ στο διάστημα αυτό). Επομένως, πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}$ και καταλήγουμε πάλι σε απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$ διότι $\lim_{x\to 0+}(1 - \cos x) = 0$ και $\lim_{x\to 0+}(\sin x + x\cos x) = 0$. Σκοπεύοντας να εφαρμόσουμε (δεύτερη φορά) τον Πρώτο Κανόνα, βλέπουμε ότι είναι $\sin x + x\cos x \neq 0$ για κάθε x στο $(0, \frac{\pi}{2})$ και $\frac{d}{dx}(\sin x + x\cos x) = 2\cos x - x\sin x \neq 0$ για κάθε x στο $(0, \frac{\pi}{4})$. Για τον λόγο των παραγώγων ισχύει $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$. Άρα $\lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = 0$ και, επομένως, $\lim_{x\to 0+} \big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\big) = 0$.

(4) Το όριο $\lim_{x\to+\infty} \big(1 + \frac{x}{1+x^2}\big)^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $1^{+\infty}$. Κάνουμε τη μετατροπή $\big(1 + \frac{x}{1+x^2}\big)^x = e^{x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)}$, οπότε αναγόμαστε στο όριο $\lim_{x\to+\infty} x\log\big(1 + \frac{x}{1+x^2}\big)$, το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου $(+\infty)0$.

Γράφουμε, λοιπόν, $x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)=\frac{\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{x}}$ και έχουμε απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{0}{0}$. Ελέγχουμε τις υποθέσεις του Πρώτου Κανόνα: $\frac{1}{x}\neq 0$ και $\frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}=-\frac{1}{x^2}\neq 0$ για κάθε x στο $(0,+\infty)$. Υπολογίζουμε $\frac{d\,\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)}{dx}=\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{1+\frac{x}{1+x^2}}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)(1+x+x^2)}$ και μετά από πράξεις έχουμε για τον λόγο των παραγώγων ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)(1+x+x^2)}=1$. Άρα $\lim_{x\to+\infty}x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)=1$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\log\left(1+\frac{x}{1+x^2}\right)}=e^1=e$ διότι η $y=e^x$ είναι συνεχής στον 1.

Β. Όρια ακολουθιών.

Πριν αφήσουμε αυτή την ενότητα θα ήταν χρήσιμο να αναφερθεί η εφαρμογή των Κανόνων του l' Hopitâl στον υπολογισμό ορίων ακολουθιών.

Πρώτη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $b_n\neq 0$ για κάθε n και ας υποθέσουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ και $\lim_{n\to+\infty}b_n=0$. Στόχος είναι ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον Πρώτο Κανόνα του l' Hopitâl, πρέπει να βρούμε δυο συναρτήσεις $y=f(x)$ και $y=g(x)$, ορισμένες στο διάστημα $[1,+\infty)$, με την ιδιότητα:

$$f(n)=a_n \quad \text{και} \quad g(n)=b_n \qquad (n \text{ φυσικός}).$$

Φυσικά, οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1,+\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$ για κάθε x στο $[1,+\infty)$ και, τέλος, πρέπει να ισχύει $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$. Αν, λοιπόν, υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί αυτές τις συναρτήσεις και αν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο. Τώρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.19 στη συνάρτηση $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ και στην ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n=n$, συμπεραίνουμε ότι και το όριο $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ υπάρχει και έχει την ίδια τιμή με τα προηγούμενα δυο όρια.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})$.

Επειδή $\lim_{n\to+\infty}\arctan\frac{1}{n}=0$ και $\lim_{n\to+\infty}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})=+\infty$, το όριο που θέλουμε να υπολογίσουμε εμπίπτει στην κατηγορία των απροσδιόριστων μορφών $0\cdot(+\infty)$.

Γράφουμε $\arctan\frac{1}{n}\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})=\arctan\frac{1}{n}\cot\frac{1}{n}=\frac{\arctan\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}$ για να μεταθέσουμε το όριο στην κατηγορία $\frac{0}{0}$. Εισάγουμε τις συναρτήσεις $y=f(x)=\arctan\frac{1}{x}$ και $y=g(x)=\tan\frac{1}{x}$ στο διάστημα $(\frac{2}{\pi},+\infty)$. Οι συναρτήσεις αυτές έχουν όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες, οπότε υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\cos\frac{1}{x})^2}{1+x^2}=1$. Θεωρώντας την ακολουθία (n) με όριο $+\infty$, βρίσκουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{n}}{\tan\frac{1}{n}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\tan\frac{1}{x}}=1$.

Δεύτερη εφαρμογή. Έστω ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $b_n \neq 0$ για κάθε n και έστω ότι $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ ή $-\infty$. Στόχος, όπως και πριν, είναι ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$, αν αυτό υπάρχει.

Για να εφαρμόσουμε τον Δεύτερο Κανόνα του l' Hopitâl, πρέπει να βρούμε συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$, ορισμένες στο διάστημα $[1, +\infty)$, με την ιδιότητα:

$$f(n) = a_n \quad \text{και} \quad g(n) = b_n \qquad (n \text{ φυσικός}).$$

Οι συναρτήσεις αυτές πρέπει να είναι παραγωγίσιμες στο $[1, +\infty)$, πρέπει να ισχύει $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε x στο $[1, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Αν, τώρα, υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε συμπεραίνουμε ότι υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και έχει την ίδια τιμή με το προηγούμενο, οπότε υπάρχει και το όριο $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ και έχει την ίδια τιμή με τα προηγούμενα δυο όρια.

Παραδείγματα: (1) Δυο σημαντικά όρια ακολουθιών είναι τα

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \quad (b > 0, a > 1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\log n)^b}{n^a} = 0 \quad (b > 0, a > 0).}$$

Για να αποδείξουμε το πρώτο όριο εισάγουμε τις συναρτήσεις $y = x^b$ και $y = a^x$, οι οποίες ικανοποιούν τις απαραίτητες συνθήκες και αναγόμαστε στον υπολογισμό του ορίου $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x}$. Το όριο αυτό έχει ήδη υπολογιστεί με τον Δεύτερο Κανόνα του l' Hopitâl, οπότε παίρνουμε το αποτέλεσμα $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.19 με την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το δεύτερο όριο.

(2) Θα αποδείξουμε το εξής κλασσικό όριο ακολουθίας.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.}$$

Γράφουμε $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log n}{n}}$ για να μετατρέψουμε την απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$ σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και εφαρμόζουμε μια ειδική περίπτωση του προηγούμενου ορίου· την $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$. Καταλήγουμε στο $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\log n}{n}} = e^0 = 1$.

Ασκήσεις.

Α. Όρια συναρτήσεων.

1. Χρησιμοποιώντας όρια που μάθαμε σ' αυτήν την ενότητα, υπολογίστε τα παρακάτω.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^{13}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{x}}{(\log x)^5}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} - (\log x)^4}{x^{100} - e^{\frac{x}{4}}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^{10}\right), \quad \lim_{x\to 0+} \left(\frac{1}{x^5} - \frac{2}{x^2} + (\log x)^7\right).$$

2. Χρησιμοποιώντας τους Κανόνες του l' Hopitâl, υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2-x}}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^{2x}-1}\,,\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\arctan x}\,,\ \lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1}\,,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{b^x-1}\ \ (a,b>0,b\neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(\sin x)-(\sin x)^2}{x^6}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\log x)}{\log x}\,,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\big(\log(\log x)\big)}{\log(\log x)}\,,$$

$$\lim_{x\to 0+}\sin x\log x,\quad \lim_{x\to 1+}\log x\log(x-1),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\log x}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\Big),\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\log(1+x)}-\frac{1}{x}\Big),\ \lim_{x\to 0}\Big(\cot x-\frac{1}{x}\Big),$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)}\,,\quad \lim_{x\to 0+}x^{x^x-1}\,,\quad \lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}\,.$$

3. Μπορείτε να υπολογίσετε το $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cosh x}{e^x}$ με διαδοχικές εφαρμογές του Δεύτερου Κανόνα του l' Hopitâl ?

   Μήπως το όριο αυτό υπολογίζεται πολύ εύκολα, χωρίς αναφορά στους Κανόνες του l' Hopitâl ?

4. Βρείτε αριθμούς a, b ώστε να είναι $\lim_{x\to 0}\big(\frac{1-\cos x}{x^4}+ax^{-2}+b\big)=0$.

5. Αποδείξτε ότι η $y=\begin{cases}\frac{1}{\log|x|}\,, & \text{αν } x\neq 0,\\ 0, & \text{αν } x=0,\end{cases}$ είναι συνεχής αλλά όχι Hölder-συνεχής στον 0 (δείτε την άσκηση 7 της ενότητας 5.1).

   (Υπόδειξη: Με άτοπο.)

6. Να σχεδιαστούν τα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων, βρίσκοντας τα διαστήματα στα οποία είναι μονότονες, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτές ή κοίλες, τα σημεία (τοπικού) μεγίστου και (τοπικού) ελαχίστου, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες).

$$y=xe^{-x}\,,\quad y=xe^{-x^2}\,,\quad y=x\log x,\quad y=\frac{\log x}{x}\,,\quad y=x^{\frac{1}{x}}\,,\quad y=x^x\,.$$

7. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια. Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μια γνωστή παράγωγος, οπότε δε χρειάζεται ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x}{x^2}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2}{x^3}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{1}{1!}x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3}{x^4}\,.$$

Προσπαθήστε να γενικεύσετε αυτά τα όρια.

8. Για ποιον λόγο *δε* μπορεί να εφαρμοστεί ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για να **αποδειχθεί** το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;

9. Υπολογίστε διαδοχικά τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x}{x^3}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2}{x^4}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{1!}x+\frac{1}{3!}x^3}{x^5}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{4!}x^4}{x^6}\,.$$

Προσπαθήστε να γενικεύσετε αυτά τα όρια.

10. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια. Παρατηρήστε ότι το πρώτο όριο είναι εξ ορισμού μια γνωστή παράγωγος, οπότε δε χρειάζεται ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl για την απόδειξή του.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{x^2}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}\,,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3}{x^4}\,.$$

Προσπαθήστε να γενικεύσετε αυτά τα όρια.

11. Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και $a<\xi<b$. Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)-f(\xi)-\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1-\cdots-\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}}{(x-\xi)^n}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Προσοχή: πόσες φορές εφαρμόσατε τον Πρώτο Κανόνα του l' Hopitâl?

Παρατηρήστε ότι οι ασκήσεις 7, 9 και 10 είναι ειδικές περιπτώσεις.

12. $^{(*)}$ **Γενίκευση του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου.** Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι $2m-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b), ότι $a<\xi<b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi)=\ldots=f^{(2m-1)}(\xi)=0$, αποδείξτε ότι:

(i) αν $f^{(2m)}(\xi)>0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της $y=f(x)$.

(ii) αν $f^{(2m)}(\xi)<0$, τότε ο ξ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της $y=f(x)$.

(Υπόδειξη: Δείτε την προηγούμενη άσκηση.)

13. $^{(*)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a, b), ότι $a < \xi < b$ και ότι υπάρχει η $f^{(2m+1)}(\xi)$. Αν $f^{(1)}(\xi) = \ldots = f^{(2m)}(\xi) = 0$ και $f^{(2m+1)}(\xi) \neq 0$, αποδείξτε ότι ο ξ δεν είναι ούτε σημείο τοπικού ελαχίστου ούτε σημείο τοπικού μεγίστου της $y = f(x)$.

    (Υπόδειξη: Δείτε τις προηγούμενες δυο ασκήσεις.)

14. $^{(*)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και $a < \xi < b$.

    Αν υπάρχει η $f'(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h} = f'(\xi)$. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο Πρώτος Κανόνας του l' Hopitâl;

    (Υπόδειξη: Γράψτε $\frac{f(\xi+h)-f(\xi-h)}{2h} = \frac{1}{2}\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} + \frac{1}{2}\frac{f(\xi-h)-f(\xi)}{-h}$.)

    Αν υπάρχει η $f''(\xi)$, αποδείξτε ότι $\lim_{h\to 0+} \frac{f(\xi+h)-2f(\xi)+f(\xi-h)}{h^2} = f''(\xi)$.

    (Υπόδειξη: Η ύπαρξη της $f''(\xi)$ προϋποθέτει ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα (c, d) με $c < \xi < d$. Χρησιμοποιήστε τον Πρώτο Κανόνα του l' Hopitâl.)

15. Έστω $y = f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \eta$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \eta$.

16. Λύστε την άσκηση 18 της ενότητας 6.8 με τον Πρώτο Κανόνα του l' Hopitâl.

17. $^{(*)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ότι το όριο $\eta = \lim_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))$ είναι αριθμός. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \eta$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

    (Υπόδειξη: Γράψτε $f(x) = \frac{f(x)e^x}{e^x}$.)

18. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} x^{-m}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ για κάθε φυσικό m.

    $^{(*)}$ Θεωρήστε την $y = h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\,, & \text{αν } x > 0, \\ 0\,, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η $y = h(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και, ειδικώτερα, ότι είναι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε φυσικό n.

    (Υπόδειξη: Με την αρχή της επαγωγής αποδείξτε ότι για κάθε n η $y = h(x)$ είναι n φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και, ειδικώτερα, ότι $h^{(n)}(0) = 0$. Θα βοηθήσει το πρώτο μέρος της άσκησης Α9 της ενότητας 6.10.)

19. $^{(*)}$ Θεωρήστε την $y = f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{1-x^2}}\,, & \text{αν } -1 < x < 1, \\ 0\,, & \text{αν } |x| \geq 1. \end{cases}$ Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$.

    (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και τον κανόνα της αλυσίδας.)

20. $^{(*)}$ Αποδείξτε ότι η $y = e^x$ δεν είναι αλγεβρική συνάρτηση στο $(-\infty, +\infty)$.

    (Υπόδειξη: Έστω $p_n(x)e^{nx} + \cdots + p_1(x)e^x + p_0(x) = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$, όπου τα $p_n(x), \ldots, p_1(x), p_0(x)$ είναι πολυώνυμα. Διαιρέστε με το $p_n(x)e^{nx}$ και βρείτε το όριο όταν $x \to +\infty$.)

B. Όρια ακολουθιών.

1. Χρησιμοποιώντας γνωστά όρια ακολουθιών βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών.

$$\Big(\frac{(\log n)^{13}}{n^2}\Big),\quad \Big(\frac{\sqrt{n}}{(\log n)^{95}}\Big),\quad (ne^{-n}),\quad (n^3e^{-n}),\quad \Big(\frac{e^{\frac{n}{5}}}{n^{100}}\Big).$$

2. Χρησιμοποιώντας το όριο $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$ αποδείξτε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}=1,\quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^3+3n^2+n+2}=1.$$

(Υπόδειξη: Για το πρώτο όριο παρατηρήστε ότι $1\leq\sqrt[n]{n+1}\leq\sqrt[n]{2n}=\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$ και για το δεύτερο όριο γράψτε $\sqrt[n]{n^2}=\big(\sqrt[n]{n}\big)^2$.)

3. Βρείτε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών.

$$\Big(\frac{\log(\log n)}{\log n}\Big),\qquad \Big(\frac{\log(\log(\log n))}{\log(\log n)}\Big),\qquad \Big(n-\cot\frac{1}{n}\Big).$$

6.12 Τάξη μεγέθους, ασυμπτωτική ισότητα.

A. Τάξη μεγέθους.

Έστω συναρτήσεις $y=f(x)$ και $y=g(x)$ με $f(x),g(x)\neq 0$ κοντά στον ξ, δηλαδή για κάθε x σε κάποια ένωση $(a,\xi)\cup(\xi,b)$. Αν $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|=0$, τότε λέμε ότι η $y=f(x)$ έχει **μικρότερη τάξη μεγέθους** από την $y=g(x)$ κοντά στον ξ καθώς και ότι η $y=g(x)$ έχει **μεγαλύτερη τάξη μεγέθους** από την $y=f(x)$ κοντά στον ξ. Παρατηρήστε ότι, λόγω της υπόθεσης για μη μηδενισμό των συναρτήσεων, η ισότητα $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|=0$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to\xi}\big|\frac{g(x)}{f(x)}\big|=+\infty$. Τέλος, αν υπάρχουν δυο *θετικοί αριθμοί* l και u ώστε να είναι $0<l\leq\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|\leq u<+\infty$ κοντά στον ξ, τότε λέμε ότι η $y=f(x)$ έχει **ίδια τάξη μεγέθους** με την $y=g(x)$ κοντά στον ξ.

Αν υπάρχει το $\rho=\lim_{x\to\xi}\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|$ και είναι *θετικός αριθμός*, τότε μπορούμε να επιλέξουμε *θετικό* αριθμό $l<\rho$ (για παράδειγμα, τον $l=\frac{\rho}{2}$) και αριθμό $u>\rho$ (για παράδειγμα, τον $u=2\rho$), οπότε, σύμφωνα με την Πρόταση 4.16, ισχύει $l<\big|\frac{f(x)}{g(x)}\big|<u$ κοντά στον ξ και, επομένως, η $y=f(x)$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y=g(x)$ κοντά στον ξ.

Όσα είπαμε στις προηγούμενες παραγράφους μπορούν, φυσικά, να διατυπωθούν και στις περιπτώσεις: $x\to\xi+$, $x\to\xi-$, $x\to+\infty$ και $x\to-\infty$.

Παραδείγματα: (1) Η $y=x^b$ $(b>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y=a^x$ $(a>1)$ κοντά στο $+\infty$, διότι, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{a^x}=0$.

(2) Η $y=(\log x)^c$ $(c>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y=x^b$ $(b>0)$ κοντά στο $+\infty$, διότι είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^c}{x^b}=0$.

(3) Δυο πολυωνυμικές συναρτήσεις $y=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$ και $y=b_0+b_1x+\cdots+b_Nx^N$ (με $a_N,b_N\neq 0$) έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$, αφού το $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N}{b_0+b_1x+\cdots+b_Nx^N}\right|=\left|\frac{a_N}{b_N}\right|$ είναι θετικός αριθμός.

Όμως, αν η πολυωνυμική συνάρτηση $y=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$ (με $a_N\neq 0$) έχει βαθμό μικρότερο από τον βαθμό της πολυωνυμικής συνάρτησης $y=b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M$ (με $b_M\neq 0$), δηλαδή αν $N<M$, τότε η πρώτη συνάρτηση έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από τη δεύτερη κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N}{b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M}=0$.

(4) Η $y=a^{-\frac{1}{x}}$ $(a>1)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y=x^b$ $(b>0)$ κοντά στον 0 από τα δεξιά του, διότι είναι $\lim_{x\to 0+}\frac{a^{-\frac{1}{x}}}{x^b}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^b}{a^t}=0$.

(5) Η $y=1-\cos x$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y=x^2$ κοντά στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ είναι θετικός αριθμός.

(6) Η $y=\sin x$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y=x$ κοντά στον 0, διότι το $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ είναι θετικός αριθμός.

(7) Η $y=\left(\log\frac{1}{x}\right)^c$ $(c>0)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y=\frac{1}{x^b}$ $(b>0)$ κοντά στον 0 από τα δεξιά του, διότι $\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\log\frac{1}{x}\right)^c}{\frac{1}{x^b}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\log t)^c}{t^b}=0$.

(8) Το όριο $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2+\sin x)$ δεν υπάρχει. Όμως, οι $y=2x+x\sin x$ και $y=x$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Πράγματι, επειδή $\frac{2x+x\sin x}{x}=2+\sin x$ συνεπάγεται $1\leq\frac{2x+x\sin x}{x}\leq 3$ για κάθε x στο $(0,+\infty)$.

Θα περιγράψουμε, τώρα, ειδικά για την περίπτωση $x\to+\infty$ μερικούς ευρέως χρησιμοποιούμενους όρους: την *πολυωνυμική*, την *εκθετική* και τη *λογαριθμική τάξη μεγέθους*.

Είδαμε στο παράδειγμα (3) ότι, αν ο N είναι φυσικός, όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού N έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$. Αυτό το κωδικοποιούμε λέγοντας ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $y=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$ (με $a_N\neq 0$) έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους** ή, ειδικώτερα, **πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού** N κοντά στο $+\infty$. Σύμφωνα, και πάλι, με το παράδειγμα (3), μπορούμε να «ιεραρχήσουμε» τις πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ *ανάλογα με τον βαθμό τους*: μεγαλύτερος βαθμός αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τάξη μεγέθους. Φυσικά, από τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού N η πιο απλή είναι η $y=x^N$. Πρέπει, τώρα, να πούμε ότι ο όρος «πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού N» χαρακτηρίζει όχι μόνο τις πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού N αλλά και *κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με την* $y=x^N$ κοντά στο $+\infty$.

Παράδειγμα: Κάθε ρητή συνάρτηση $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n,b_m\neq 0)$, όπου $n>m$, έχει πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού $N=n-m$ κοντά στο $+\infty$. Διότι

$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}}{x^{n-m}}\right| = \left|\frac{a_n}{b_m}\right| > 0.$

Πολλές φορές ο όρος «πολυωνυμική τάξη μεγέθους» χρησιμοποιείται για τις συναρτήσεις $y = x^b$ $(b > 0)$ ακόμη και όταν ο εκθέτης b είναι οποιοσδήποτε *θετικός αριθμός*, όχι κατ' ανάγκη φυσικός. Αυτό, βεβαίως, ισχύει και για κάθε συνάρτηση η οποία έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $y = x^b$ $(b > 0)$ κοντά στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **πολυωνυμική τάξη μεγέθους βαθμού** b κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με την $y = x^b$ $(b > 0)$ κοντά στο $+\infty$. Είναι φανερό ότι οι πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους «ιεραρχούνται» ανάλογα με τον βαθμό τους, αφού είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{b_1}}{x^{b_2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{b_2-b_1}} = 0$ αν $0 < b_1 < b_2$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι κάθε συνάρτηση με πολυωνυμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Πράγματι, αν η $y = f(x)$ έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια $y = x^b$ $(b > 0)$, τότε υπάρχουν αριθμοί $u, l > 0$ ώστε να είναι $l \leq \left|\frac{f(x)}{x^b}\right| \leq u$ και, επομένως, $|f(x)| \geq lx^b$ κοντά στο $+\infty$. Επειδή $\lim_{x\to+\infty}(lx^b) = +\infty$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = +\infty$.

Κατόπιν, αν $a > 1$, λέμε ότι η $y = a^x$ έχει **εκθετική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$. Το ίδιο λέμε και για οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $y = a^x$ $(a > 1)$ κοντά στο $+\infty$. Οι εκθετικές τάξεις μεγέθους «ιεραρχούνται» ανάλογα με τη βάση a. Πράγματι, είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{{a_1}^x}{{a_2}^x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x = 0$ αν $1 < a_1 < a_2$.

Τέλος, αν $c > 0$, λέμε ότι η $y = (\log x)^c$ έχει **λογαριθμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$. Το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση η οποία έχει την ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $y = (\log x)^c$ $(c > 0)$ κοντά στο $+\infty$. Οι λογαριθμικές τάξεις μεγέθους «ιεραρχούνται» ανάλογα με τον εκθέτη c, αφού είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^{c_1}}{(\log x)^{c_2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\log x)^{c_2-c_1}} = 0$ αν $0 < c_1 < c_2$.

Όπως και με τις συναρτήσεις πολυωνυμικής τάξης μεγέθους, παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση με εκθετική ή λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει σε απόλυτη τιμή όριο $+\infty$ στο $+\infty$. Η απόδειξη είναι παρόμοια.

Στα παραδείγματα (1) και (2) είδαμε ότι

Κοντά στο $+\infty$ κάθε λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους και κάθε πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε εκθετική τάξη μεγέθους.

B. Ασυμπτωτική ισότητα. Μικρό όμικρον και μεγάλο όμικρον.

Έστω δυο συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε x σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$. Αν είναι $\lim_{x\to\xi}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big) \quad \text{κοντά στον } \xi$$

και διαβάζουμε «*η* $y = f(x)$ *είναι* ***μικρό όμικρον*** *της* $y = g(x)$» κοντά στον ξ. Αν η $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι φραγμένη κοντά στον ξ, δηλαδή αν υπάρχει κάποιος αριθμός

u ώστε να ισχύει $|f(x)| \leq u|g(x)|$ κοντά στον ξ, τότε γράφουμε

$$f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big) \quad \text{κοντά στον } \xi$$

και διαβάζουμε «*η* $y = f(x)$ *είναι* ***μεγάλο όμικρον*** *της* $y = g(x)$» κοντά στον ξ. Αυτά διατυπώνονται με ανάλογο τρόπο και στις περιπτώσεις: $x \to \xi+$, $x \to \xi-$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Παραδείγματα: (1) Αν η $y = f(x)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από την $y = g(x)$ κοντά στο όριο του x, τότε είναι $f(x) = \mathrm{o}\big(g(x)\big)$ κοντά στο όριο του x.

Το αντίστροφο ισχύει, φυσικά, αν, επιπλέον, είναι $f(x) \neq 0$ κοντά στο όριο του x.

Για παράδειγμα, είναι $(\log x)^c = \mathrm{o}\big(x^b\big)$ και $x^b = \mathrm{o}\big(a^x\big)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $a > 1$, $b > 0$ και $c > 0$. Επίσης, είναι $x^{b_1} = \mathrm{o}\big(x^{b_2}\big)$ κοντά στο $+\infty$ αλλά και $x^{b_2} = \mathrm{o}\big(x^{b_1}\big)$ κοντά στον 0 αν $0 < b_1 < b_2$.

(2) Αν η $y = f(x)$ έχει μικρότερη τάξη μεγέθους από ή την ίδια τάξη μεγέθους με την $y = g(x)$ κοντά στο όριο του x, τότε είναι $f(x) = \mathrm{O}\big(g(x)\big)$ κοντά στο όριο του x.

Για παράδειγμα, είναι $\sin x = \mathrm{O}(x)$ και $1 - \cos x = \mathrm{O}(x^2)$ κοντά στον 0.

Έστω δυο συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = g(x)$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε x σε κάποια ένωση $(a, \xi) \cup (\xi, b)$. Αν είναι $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, τότε γράφουμε

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{κοντά στον } \xi$$

και λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι **ασυμπτωτικά ίση** με την $y = g(x)$ κοντά στον ξ. Η ορολογία είναι ανάλογη και στις περιπτώσεις: $x \to \xi+$, $x \to \xi-$, $x \to +\infty$ και $x \to -\infty$.

Παρατηρήστε ότι από τη σχέση $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ συνεπάγεται ότι είναι $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ κοντά στον ξ και, επομένως, ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στον ξ. Δηλαδή, αν είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στον ξ, τότε είναι $f(x), g(x) \neq 0$ κοντά στον ξ.

Παραδείγματα: (1) Είναι $\sin x \sim x$ και $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ κοντά στον 0.

(2) Είναι $e^x - 1 \sim x$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{d\,e^x}{dx}\big|_{x=0} = 1$.

(3) Είναι $\log(1 + x) \sim x$ κοντά στον 0, διότι $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{d\,\log x}{dx}\big|_{x=1} = 1$.

(4) Είναι $\tan x \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$ κοντά στον $\frac{\pi}{2}$, διότι $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}} = \lim_{t\to 0} t \cot t = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} \cos t = 1$.

Δείτε την εξής χρήσιμη παρατήρηση.

`Η σχέση` $f(x) - g(x) = \mathrm{o}\big(cg(x)\big)$`, όπου` c `είναι οποιοσδήποτε αριθμός` $\neq 0$`, είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ισότητα` $f(x) \sim g(x)$.

Πράγματι, η πρώτη σχέση είναι ισοδύναμη με την $\lim \frac{f(x)-g(x)}{cg(x)} = 0$, αυτή με την

$\lim \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$, αυτή με την $\lim \big(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\big) = 0$, αυτή με την $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ κι αυτή με την $f(x) \sim g(x)$.

Παραδείγματα: Συνδυάζοντας την παρατήρηση που μόλις κάναμε με τα αμέσως προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω σχέσεις.

(1) $\sin x - x = \mathrm{o}(x)$ και $\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \mathrm{o}(x^2)$ κοντά στον 0.

(2) $e^x - 1 - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στον 0.

(3) $\log(1+x) - x = \mathrm{o}(x)$ κοντά στον 0.

(4) $\tan x - \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x} = \mathrm{o}\big(\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}\big)$ κοντά στον $\frac{\pi}{2}$.

Αν όλες οι συναρτήσεις $y = g_1(x), \dots, y = g_n(x)$ είναι μικρό όμικρον της ίδιας $y = g(x)$ κοντά στο όριο του x, τότε και το άθροισμά τους $y = g_1(x) + \cdots + g_n(x)$ είναι μικρό όμικρον της $y = g(x)$ κοντά στο όριο του x. Αυτό είναι σχεδόν προφανές: από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $\lim \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)} = \lim \frac{g_1(x)}{g(x)} + \cdots + \frac{g_n(x)}{g(x)} = 0 + \cdots + 0 = 0$.

Αν σε κάποιο άθροισμα συναρτήσεων $y = f(x) = g(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x)$ είναι όλες οι $y = g_1(x), \dots, y = g_n(x)$ μικρό όμικρον της $y = g(x)$ κοντά στο όριο του x, τότε η $y = g(x)$ χαρακτηρίζεται **κύριος όρος** του αθροίσματος κοντά στο όριο του x και είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο όριο του x. Πράγματι, είναι $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \big(1 + \frac{g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{g(x)}\big) = 1$.

Το να μπορούμε να διακρίνουμε τον κύριο όρο σε κάποιο άθροισμα συναρτήσεων είναι κάτι *χρήσιμο*. Για παράδειγμα, αν στο άθροισμα $y = f(x) = g(x) + g_1(x) + \cdots + g_n(x)$ ο κύριος όρος $y = g(x)$ έχει κάποιο όριο όταν ο x τείνει στο όριό του, τότε και το άθροισμα $y = f(x)$ έχει *το ίδιο όριο*. Διότι, όπως μόλις είδαμε, είναι $f(x) \sim g(x)$ κοντά στο όριο του x και, επομένως, $\lim f(x) = \lim \big(\frac{f(x)}{g(x)}\, g(x)\big) = 1 \cdot \lim g(x)$. Ένα ακόμη παράδειγμα: αν στα αθροίσματα $y = g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)$ και $y = h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)$ οι $y = g(x)$ και $y = h(x)$ είναι οι κύριοι όροι, αντιστοίχως, κοντά στο όριο του x, τότε είναι $\frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)} \sim \frac{g(x)}{h(x)}$ κοντά στο όριο του x και, επομένως, αν η $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ έχει κάποιο όριο όταν ο x τείνει στο όριό του, τότε και η $\frac{g(x)+g_1(x)+\cdots+g_n(x)}{h(x)+h_1(x)+\cdots+h_m(x)}$ έχει το ίδιο όριο.

Παραδείγματα: (1) Βάσει των προηγουμένων μπορούμε να δούμε με «νέο μάτι» τα όρια πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων. Επειδή είναι $x^n = \mathrm{o}(x^N)$ κοντά στο $+\infty$ για κάθε $n < N$, συνεπάγεται ότι στο πολυώνυμο $a_0 + a_1x + \cdots + a_Nx^N$ $(a_N \neq 0)$ ο όρος a_Nx^N είναι κύριος όρος κοντά στο $+\infty$, οπότε είναι $a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N \sim a_Nx^N$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}(a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N) = \lim_{x\to+\infty} a_Nx^N$.

Με τον ίδιο τρόπο, είναι $\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N}{b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M} \sim \frac{a_Nx^N}{b_Mx^M}$ κοντά στο $+\infty$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N}{b_0+b_1x+\cdots+b_Mx^M} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_Nx^N}{b_Mx^M}$.

(2) Και στα δυο αθροίσματα $xe^{2x} - x^2 + 3e^x - x^2e^{\frac{x}{2}}$ και $2e^{2x} + \log x - x^2e^x$ ο πρώτος

τους όρος είναι ο κύριος όρος κοντά στο $+\infty$. Άρα $\frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} \sim \frac{xe^{2x}}{2e^{2x}} = \frac{x}{2}$ κοντά στο $+\infty$, οπότε $\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{2x}-x^2+3e^x-x^2e^{\frac{x}{2}}}{2e^{2x}+\log x-x^2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$.

Ασκήσεις.

A. Τάξη μεγέθους.

1. Έστω $a > 1$. Ιεραρχήστε κατά τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ τις $y = a^x$, $y = a^{a^x}$ και $y = a^{a^{a^x}}$.

   Γενικεύστε.

2. Ιεραρχήστε κατά τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ τις $y = \log x$, $y = \log(\log x)$ και $y = \log\big(\log(\log x)\big)$.

   Γενικεύστε.

3. Αποδείξτε ότι οι $y = x$, $y = \log(e^x + x\log x)$ και $y = e^{(1+\frac{1}{x})\log x}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$.

   Αποδείξτε ότι οι $y = \log\frac{1}{x}$ και $y = \frac{x^2+x\log\frac{1}{x}}{\sin x+x^2}$ έχουν ίδια τάξη μεγέθους κοντά στον 0.

4. Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ των παρακάτω συναρτήσεων σε πολυωνυμικές, εκθετικές και λογαριθμικές και ιεραρχήστε τις.

$$y = \frac{x^3e^x - x^5e^{\frac{x}{2}}}{xe^x + \sin x}, \quad y = e^{\frac{x}{5}} + x^3e^{\frac{x}{6}} - x, \quad y = e^{3\log(2+\log x)}.$$

5. Λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους** κοντά στο ∞ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $y = \frac{1}{x^b}$ $(b > 0)$. Ομοίως, λέμε ότι μια συνάρτηση έχει **αντίστροφη εκθετική** ή **αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους** κοντά στο $+\infty$ αν έχει ίδια τάξη μεγέθους με κάποια από τις $y = \frac{1}{a^x}$ $(a > 0)$ ή τις $y = \frac{1}{(\log x)^c}$ $(c > 0)$, αντιστοίχως, κοντά στο $+\infty$.

   Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση με αντίστροφη πολυωνυμική ή αντίστροφη εκθετική ή αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$ έχει όριο 0 στο $+\infty$.

   Αποδείξτε ότι κοντά στο $+\infty$ κάθε αντίστροφη εκθετική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους και ότι κάθε αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους είναι μικρότερη από κάθε αντίστροφη λογαριθμική τάξη μεγέθους.

   Ιεραρχήστε τις αντίστροφες πολυωνυμικές τάξεις μεγέθους μεταξύ τους και κάντε το ίδιο για τις αντίστροφες εκθετικές και τις αντίστροφες λογαριθμικές τάξεις μεγέθους.

   Αποδείξτε ότι κάθε ρητή συνάρτηση $y = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$ $(a_n, b_m \neq 0)$, όπου $n < m$, έχει αντίστροφη πολυωνυμική τάξη μεγέθους κοντά στο $+\infty$.

Κατατάξτε τις τάξεις μεγέθους κοντά στο $+\infty$ των παρακάτω συναρτήσεων σε αντίστροφες πολυωνυμικές, αντίστροφες εκθετικές και αντίστροφες λογαριθμικές και ιεραρχήστε τις.

$$y = e^{-x} + 2e^{-x^2}, \quad y = \frac{1}{\log(x + \log x)}, \quad y = \log\Big(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}\Big).$$

B. Ασυμπτωτική ισότητα. Μικρό όμικρον και μεγάλο όμικρον.

1. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στον 0.

$$\frac{1}{1-x} - 1 = \mathrm{o}(1), \quad \frac{1}{1-x} - (1+x) = \mathrm{o}(x), \quad \frac{1}{1-x} - (1+x+x^2) = \mathrm{o}(x^2).$$

Γενικεύστε.

2. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στον 0.

$$e^x - 1 = \mathrm{o}(1), \quad e^x - \Big(1 + \frac{x}{1!}\Big) = \mathrm{o}(x), \quad e^x - \Big(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}\Big) = \mathrm{o}(x^2).$$

Γενικεύστε.

3. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στον 0.

$$\sin x - \Big(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!}\Big) = \mathrm{o}(x^3), \qquad \cos x - \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\Big) = \mathrm{o}(x^4),$$

$$\sin x - \Big(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\Big) = \mathrm{o}(x^5), \qquad \cos x - \Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\Big) = \mathrm{o}(x^6).$$

Γενικεύστε.

4. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στον 0.

$$\log(1+x) - x = \mathrm{o}(x), \qquad \log(1+x) - \Big(x - \frac{x^2}{2}\Big) = \mathrm{o}(x^2),$$

$$\log(1+x) - \Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big) = \mathrm{o}(x^3).$$

Γενικεύστε.

5. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις και γράψτε τις αντίστοιχες ασυμπτωτικές ισότητες κοντά στον 0.

$$\arctan x - x = \mathrm{o}(x) \qquad \arctan x - \Big(x - \frac{x^3}{3}\Big) = \mathrm{o}(x^3),$$

$$\arctan x - \Big(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\Big) = \mathrm{o}(x^5).$$

Γενικεύστε.

6. Έστω ότι είναι $f(x)-(a+bx+cx^2+dx^3)=\mathrm{o}(x^3)$ κοντά στον 0. Αποδείξτε διαδοχικά ότι είναι $f(x)-(a+bx+cx^2)=\mathrm{o}(x^2)$, $f(x)-(a+bx)=\mathrm{o}(x)$ και $f(x)-a=\mathrm{o}(1)$ κοντά στον 0.

   Υπολογίστε διαδοχικά αριθμούς a,b,c,d ώστε να ισχύει
$$\frac{x}{e^x-1}-(a+bx+cx^2+dx^3)=\mathrm{o}(x^3)$$
   κοντά στον 0.

7. Διατυπώστε την άσκηση Α.11 της προηγούμενης ενότητας ως εξής.

   Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (a,b) και $a<\xi<b$. Αν υπάρχει η $f^{(n)}(\xi)$ και είναι αριθμός, τότε είναι
$$f(x)-\Big(f(\xi)+\frac{f^{(1)}(\xi)}{1!}(x-\xi)^1+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\Big)=\mathrm{o}\left((x-\xi)^n\right)$$
   κοντά στον ξ.

   Παρατηρήστε ότι τα αποτελέσματα των ασκήσεων 1, 2, 3, 4 και 5 είναι ειδικές περιπτώσεις του αποτελέσματος αυτής της άσκησης.

8. Ποιοι είναι οι κύριοι όροι των παρακάτω αθροισμάτων κοντά στο $+\infty$;
$$e^{2x}\log x-x^5e^x\,,\quad x\log x-\frac{x^2}{\log x}+x\sqrt{x}\log(\log x),\quad x^2\log x-x^2+3x\sin x.$$

9. Ποιοι είναι οι κύριοι όροι των παρακάτω αθροισμάτων κοντά στον 0;
$$\frac{2}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{x}}\,,\quad 1+2x-x\sqrt{x}\,,\quad \frac{1}{(\sin x)^2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\,.$$

10. Αν η $y=f(x)$ είναι μικρό όμικρον της $y=g(x)$, αποδείξτε ότι η $y=f(x)$ είναι μεγάλο όμικρον της $y=g(x)$. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά:
$$\mathrm{o}\big(g(x)\big)=\mathrm{O}\big(g(x)\big).$$
    Προσέξτε: *δεν* ισχύει $\mathrm{O}\big(g(x)\big)=\mathrm{o}\big(g(x)\big)$.

    Είδαμε ότι, αν οι $y=f_1(x)$ και $y=f_2(x)$ είναι μικρό όμικρον της $y=g(x)$, τότε η $y=f_1(x)+f_2(x)$ είναι μικρό όμικρον της $y=g(x)$. Αυτό το γράφουμε συνοπτικά:
$$\mathrm{o}\big(g(x)\big)+\mathrm{o}\big(g(x)\big)=\mathrm{o}\big(g(x)\big).$$
    Αποδείξτε και τα ανάλογα:
$$\mathrm{O}\big(g(x)\big)+\mathrm{O}\big(g(x)\big)=\mathrm{O}\big(g(x)\big),$$
$$\mathrm{o}\big(g_1(x)\big)\mathrm{O}\big(g_2(x)\big)=\mathrm{o}\big(g_1(x)g_2(x)\big),\ \ \mathrm{O}\big(g_1(x)\big)\mathrm{O}\big(g_2(x)\big)=\mathrm{O}\big(g_1(x)g_2(x)\big).$$

Κεφάλαιο 7

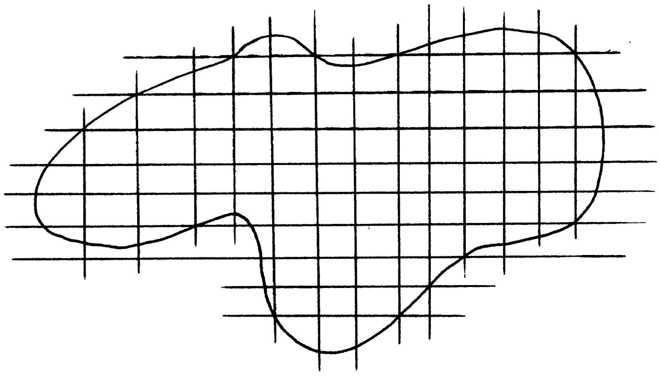
Ολοκληρώματα Riemann.

Εμβαδά επίπεδων καμπυλόγραμμων επιφανειών. Διαμερίσεις, ενδιάμεσα σημεία, αθροίσματα Riemann. Ολοκλήρωμα Riemann: ορισμός του ως όριο αθροισμάτων Riemann, παραδείγματα. Ολοκληρώματα Riemann και αλγεβρικές πράξεις. Ολοκληρώματα Riemann και γειτονικά διαστήματα. Ολοκληρώματα Riemann κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων. Ολοκληρώματα Riemann και ανισότητες. Η μέση τιμή συνάρτησης, το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Εφαρμογές ολοκληρωμάτων Riemann στη Φυσική και στη Γεωμετρία: μάζα ανομοιογενούς ευθύγραμμης ράβδου, εμβαδά επίπεδων σχημάτων με τις μεθόδους των παράλληλων διατομών, των ακτινικών διατομών και των κυκλικών διατομών, όγκοι στερεών σωμάτων με τη μέθοδο των παράλληλων διατομών, όγκοι ορθών κυλινδρικών σωμάτων, σωμάτων παραγομένων με περιστροφή και σωμάτων ανάμεσα σε δυο επιφάνειες, μήκη καμπυλών στο επίπεδο και στον χώρο, έργο μεταβλητής δύναμης.

7.1 Εμβαδό.

Είναι από την αρχαιότητα γνωστό το πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού οποιασδήποτε επιφάνειας. Οι πιο απλές επιφάνειες από αυτή την άποψη είναι οι επίπεδες επιφάνειες και οι πιο απλές από όλες είναι οι τριγωνικές και οι παραλληλόγραμμες επιφάνειες για τα εμβαδά των οποίων υπάρχουν οι γνωστοί στοιχειώδεις τύποι υπολογισμού. Το ίδιο απλές είναι και οι επιφάνειες που έχουν πολυγωνικό σχήμα. Τις επιφάνειες αυτές μπορούμε με κατάλληλες ευθείες να τις χωρίσουμε σε τριγωνικές ή παραλληλόγραμμες επιφάνειες, οπότε ο προσδιορισμός των εμβαδών τους ανάγεται στην άθροιση των εμβαδών των επιμέρους τριγωνικών ή παραλληλόγραμμων σχημάτων και, επομένως, είναι «εννοιολογικά απλός».

Το ουσιαστικό πρόβλημα είναι *ο προσδιορισμός του εμβαδού μιας επίπεδης επιφάνειας της οποίας το σύνορο είναι καμπυλόγραμμο.* Τέτοια παραδείγματα είναι πολλά: κυκλικοί δίσκοι, κυκλικοί τομείς, κυκλικοί δακτύλιοι, ελλειπτικοί δίσκοι, παραβολικά ή υπερβολικά χωρία κλπ. Η μοναδική μέθοδος για τον υπολογισμό εμβαδών τέτοιων καμπυλόγραμμων σχημάτων είναι η προσέγγισή τους από κατάλ-



Σχήμα 7.1: Χωρισμός μιας επιφάνειας σε στοιχειώδεις επιφάνειες.

ληλα πολυγωνικά σχήματα. Θα περιγράψουμε μια από τις παραλλαγές αυτής της μεθόδου.

Με τη βοήθεια κατάλληλων οριζόντιων και κατακόρυφων ευθειών χωρίζουμε την επιφάνεια, το εμβαδό της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε, σε μικρότερες «στοιχειώδεις επιφάνειες» το σύνορο καθεμιάς από τις οποίες αποτελείται από τέσσερις πλευρές: ένα οριζόντιο ή κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα, δυο άλλα ευθ. τμήματα κάθετα προς το προηγούμενο στα άκρα του καθώς και μια καμπυλόγραμμη πλευρά. Αρκεί, λοιπόν, να περιγράψουμε μια διαδικασία υπολογισμού του εμβαδού οποιασδήποτε τέτοιας «στοιχειώδους επιφάνειας» και, ειδικώτερα, αρκεί να ασχοληθούμε με την περίπτωση που η καμπυλόγραμμη πλευρά είναι η *πάνω* πλευρά της «στοιχειώδους επιφάνειας». Κάθε άλλη «στοιχειώδης επιφάνεια» προκύπτει από μια τέτοια είτε με στροφή κατά ορθή γωνία είτε με ανάκλαση ως προς την πλευρά που είναι απέναντι στην καμπυλόγραμμη πλευρά. Τέλος, επιλέγοντας κατάλληλο σύστημα αξόνων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κάτω βάση της «στοιχειώδους επιφάνειας» είναι κάποιο διάστημα $[a, b]$ πάνω στον x-άξονα, ότι η άλλη πλευρά είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ για $a \leq x \leq b$ και ότι οι δυο άλλες πλευρές είναι το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(b, 0)$ και $(b, f(b))$. Φυσικά, ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Θα ασχοληθούμε στο εξής με την περιγραφή της μεθόδου υπολογισμού του εμβαδού μιας τέτοιας «στοιχειώδους επιφάνειας», όπου θεωρούμε δοσμένο το διάστημα $[a, b]$ και τη συνάρτηση $y = f(x)$. Για να απλουστεύσουμε τα επιχειρήματά μας θα θεωρήσουμε ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Ας ονομάσουμε την επιφάνεια αυτή A και το εμβαδό της E.

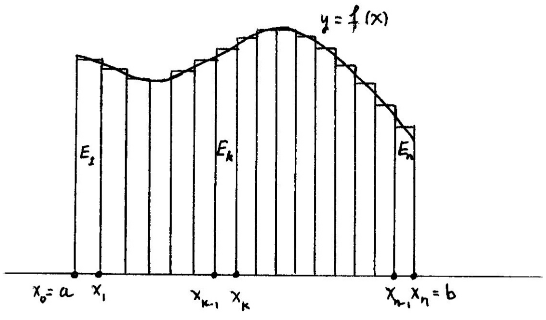
Η μέθοδος. Χωρίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε *αρκετά μικρά* διαδοχικά υποδιαστήματα με τη βοήθεια μιας επιλογής διαδοχικών σημείων $x_0 = a$, x_1, $\dots$, x_{n-1}, $x_n = b$. Πάντοτε ξεκινάμε από το αριστερό άκρο a και καταλήγουμε στο δεξιό άκρο b. Τα διαδοχικά υποδιαστήματα είναι, επομένως, τα $[x_0, x_1] = [a, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\dots$, $[x_{k-1}, x_k]$, $\dots$, $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ και $[x_{n-1}, x_n] = [x_{n-1}, b]$. Όταν λέμε ότι τα υποδιαστήματα αυτά είναι αρκετά μικρά εννοούμε, φυσικά, ότι το μεγαλύτερο από τα μήκη τους είναι αρκετά μικρό· μικρότερο, για παράδειγμα, από μια κατάλληλα μικρή θετική ποσότητα δ. Είναι φανερό ότι το άθροισμα των μηκών όλων των υποδιαστημάτων, δηλαδή το μήκος $b-a$ του διαστήματος $[a,b]$, θα είναι μικρότερο από την ποσότητα δ πολλαπλασιασμένη με το πλήθος τους n. Δηλαδή $b-a<n\delta$, οπότε $n>\frac{b-a}{\delta}$ και, επομένως, όσο μικρότερος είναι ο αριθμός δ τόσο μεγαλύτερο είναι το απαιτούμενο πλήθος n των υποδιαστημάτων. Τα σημεία $x_0=a$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $x_n=b$ ονομάζονται **διαιρετικά σημεία** και το σύνολό τους $\Delta=\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ ονομάζεται **διαμέριση** του διαστήματος $[a,b]$. Το πρώτο διάστημα είναι το $[x_0,x_1]$, το n-οστό είναι το $[x_{n-1},x_n]$ και, γενικά, το k-οστό $(1\le k\le n)$ είναι το $[x_{k-1},x_k]$. Φυσικά, αν $n=1$, τότε το μοναδικό υποδιάστημα είναι το $[x_0,x_1]=[a,b]$. Γενικά, υπάρχουν άπειρες διαμερίσεις του διαστήματος $[a,b]$. Διότι κατ΄ αρχάς υπάρχουν άπειρες επιλογές του πλήθους n των υποδιαστημάτων που ορίζονται από τη διαμέριση και, κατόπιν, για κάθε $n\ge 2$ υπάρχουν άπειρες επιλογές διαιρετικών σημείων $x_1,\ldots,x_{n-1}$ (οπωσδήποτε, με τον περιορισμό $a<x_1<\ldots<x_{n-1}<b$).

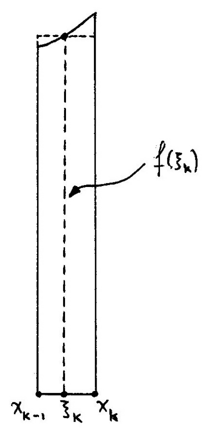
Παράδειγμα: Μια πολύ απλή επιλογή διαμέρισης είναι εκείνη που χωρίζει το $[a,b]$ σε υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Αυτό σημαίνει ότι $x_0=a, x_1=a+\frac{b-a}{n}$, $x_2=a+2\frac{b-a}{n}, \ldots, x_k=a+k\frac{b-a}{n}, \ldots, x_{n-1}=a+(n-1)\frac{b-a}{n}$ και $x_n=a+n\frac{b-a}{n}=b$.

Ονομάζουμε **πλάτος** μιας διαμέρισης Δ το μεγαλύτερο από τα μήκη των υποδιαστημάτων που ορίζονται από αυτήν, δηλαδή

$$\text{πλάτος}(\Delta)=\max\left\{x_k-x_{k-1}\,:\,1\le k\le n\right\}.$$

Όπως έχουμε πει, ο μόνος περιορισμός στην επιλογή της διαμέρισης Δ είναι ότι το πλάτος της πρέπει να είναι αρκετά μικρό.





Σχήμα 7.2: Χωρισμός σε κατακόρυφες λεπτές στοιχειώδεις επιφάνειες.

Αφού επιλέξουμε οποιαδήποτε διαμέριση Δ του $[a,b]$, παρατηρούμε ότι το εμβαδό της αρχικής «στοιχειώδους επιφάνειας» είναι το άθροισμα των εμβαδών των n διαδοχικών «στοιχειωδών επιφανειών», από τις οποίες η k-οστή έχει ως κάτω βάση το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, ως άνω βάση το γράφημα της $y = f(x)$ για $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ και ως πλαϊνές πλευρές το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_{k-1}, 0)$ και $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ και το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_k, 0)$ και $(x_k, f(x_k))$. Ας ονομάσουμε την επιφάνεια αυτή A_k και το εμβαδό της E_k. Είναι, λοιπόν,

$$E = E_1 + \cdots + E_n \,.$$

Το πρόβλημα υπολογισμού των εμβαδών των επιφανειών $A_1, \ldots, A_n$ παραμένει, διότι όλες είναι, εν γένει, καμπυλόγραμμες. Όμως, υπάρχει η εξής διαφορά: αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό και, καθώς ο x διατρέχει ένα οποιοδήποτε από αυτά τα υποδιαστήματα, το αντίστοιχο ύψος $f(x)$ δεν είναι μεν σταθερό αλλά, όμως, οι διακυμάνσεις του από σημείο σε σημείο είναι αμελητέες ή, με άλλα λόγια, είναι *περίπου σταθερό. Αυτό οφείλεται στο ότι υποθέσαμε ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο* $[a,b]$. Μάλιστα, όσο πιο μικρό είναι το πλάτος της Δ τόσο πιο μικρές είναι οι διακυμάνσεις ύψους σε κάθε υποδιάστημα. Άρα, αν πάρουμε οποιοδήποτε **ενδιάμεσο σημείο** ξ_k στο $[x_{k-1}, x_k]$, τότε οι τιμές του $f(x)$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι *περίπου ίσες* με τον $f(\xi_k)$, οπότε η επιφάνεια A_k είναι *περίπου ίδια* με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\widetilde{A_k}$ που έχει κάτω πλευρά το διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος ίσο με $f(\xi_k)$. Επομένως, και το εμβαδό E_k της A_k είναι *περίπου ίσο* με το εμβαδό $\widetilde{E_k} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $\widetilde{A_k}$ ή, συμβολικά,

$$E_k \approx \widetilde{E_k} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι, αν υπολογίσουμε το $\widetilde{E_k}$ αντί του E_k , τότε το σφάλμα που κάνουμε, δηλαδή η $\big|E_k - \widetilde{E_k}\big|$, είναι αμελητέο. Και όσο πιο μικρό είναι το πλάτος της Δ τόσο πιο μικρό είναι το κάθε σφάλμα $\big|E_k - \widetilde{E_k}\big|$. Υπολογίζουμε, λοιπόν, για κάθε $k = 1, \ldots, n$ το αντίστοιχο $\widetilde{E_k}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα $\widetilde{E} = \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n}$, το οποίο δεν είναι τίποτε άλλο από το εμβαδό της ένωσης $\widetilde{A}$ των ορθογώνιων παραλληλογράμμων $\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_n}$. Επειδή κάθε E_k είναι περίπου ίσο με το αντίστοιχο $\widetilde{E_k}$, συμπεραίνουμε ότι και το $E = E_1 + \cdots + E_n$ είναι περίπου ίσο με το $\widetilde{E} = \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ ή, συμβολικά,

$$E \approx \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Πράγματι, το συνολικό σφάλμα που κάνουμε εκτιμάται ως εξής:

$$\begin{aligned} \big|E - \widetilde{E}\big| &= \Big|(E_1 + \cdots + E_n) - \big(\widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n}\big)\Big| \\ &\leq \big|E_1 - \widetilde{E_1}\big| + \cdots + \big|E_n - \widetilde{E_n}\big|. \end{aligned}$$

Δηλαδή, το συνολικό σφάλμα δεν υπερβαίνει το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων και, επειδή όλα αυτά είναι αμελητέα, το συνολικό σφάλμα είναι αμελητέο.

Μάλιστα, όσο πιο μικρό είναι το πλάτος της διαμέρισης Δ τόσο πιο μικρό είναι το συνολικό σφάλμα $|E-\widetilde{E}|$.

Επομένως, μπορούμε να προσεγγίσουμε το άγνωστο E με το γνωστό $\widetilde{E}$. Αυτό θεωρείται γνωστό, διότι το υπολογίζουμε παίρνοντας οποιοδήποτε σημείο ξ_k στο αντίστοιχο $[x_{k-1}, x_k]$, υπολογίζοντας την αντίστοιχη τιμή $f(\xi_k)$, πολλαπλασιάζοντάς την με το μήκος $(x_k - x_{k-1})$ και προσθέτοντας όλα αυτά τα γινόμενα για $k = 1, \dots, n$. Συμβολίζουμε Ξ το σύνολο $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ όλων των ενδιάμεσων σημείων που επιλέξαμε, ένα σε κάθε υποδιάστημα. Παρατηρούμε ότι για κάθε διαμέριση Δ υπάρχουν άπειρες επιλογές Ξ, συνόλων ενδιάμεσων σημείων. Το $f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$ θα το συμβολίζουμε

$$\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}).$$

Παράδειγμα: Δυο πολύ απλές επιλογές ενδιάμεσων σημείων είναι εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το αριστερό άκρο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = x_{k-1}$, και εκείνη όπου κάθε ενδιάμεσο σημείο είναι το δεξιό άκρο του αντίστοιχου υποδιαστήματος, δηλαδή $\xi_k = x_k$.

Συνοψίζουμε: *επιλέγουμε διαμέριση* $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ *του* $[a,b]$ *με αρκετά μικρό πλάτος και σύνολο* $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ *ενδιάμεσων σημείων και υπολογίζουμε το* $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$. *Τότε η* $|E-\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)|$ *είναι όσο θέλουμε μικρή*. Συμβολικά:

$$E \approx \Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1}).$$

Με άλλα λόγια, *το άθροισμα* $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)$ *θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το εμβαδό* E *αν το πλάτος της* Δ *γίνει αρκετά μικρό* ή, ισοδύναμα, *το σφάλμα* $|E-\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)|$ *θα γίνει μικρότερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό αν το πλάτος της* Δ *γίνει μικρότερο από κάποιον κατάλληλο θετικό αριθμό.*

Το σκοτεινό σημείο της μεθόδου. Θα επιστρέψουμε και θα επιμείνουμε λίγο σε κάποιο σημείο της μεθόδου που αναπτύξαμε. Είναι το σημείο όπου από το ότι καθένα από τα σφάλματα $\left|E_k - \widetilde{E_k}\right|$ είναι αμελητέο συμπεράναμε ότι το συνολικό σφάλμα $\left|E_1 - \widetilde{E_1}\right| + \cdots + \left|E_n - \widetilde{E_n}\right|$ είναι, επίσης, αμελητέο. Μπορεί κάποιος να προβάλει την εξής λογικότατη ένσταση. Για να είναι κάθε σφάλμα $\left|E_k - \widetilde{E_k}\right|$ αμελητέο πρέπει κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ να είναι αρκετά μικρό και, όπως είδαμε στην αρχή της περιγραφής της μεθόδου, αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος n των υποδιαστημάτων πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο *άθροισμα μικρών αλλά πολλών* επιμέρους σφαλμάτων και δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι το άθροισμα αυτό θα είναι μικρό: αν κάθε επιμέρους σφάλμα είναι ίσο με 10^{-5} αλλά το n είναι ίσο με 10^{13}, τότε το συνολικό σφάλμα είναι ίσο με $10^{13}\cdot 10^{-5} = 10^8$. Η απάντηση στην ένσταση αυτή θα δοθεί μετά από προσεκτική μελέτη των λεπτομερειών.

Μια συνάρτηση $y=f(x)$ χαρακτηρίζεται **ομοιόμορφα συνεχής** στο σύνολο A αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x')-f(x'')| < \epsilon$ για κάθε x', x'' στο A που ικανοποιούν την $|x'-x''| < \delta$. Δε θα μελετήσουμε εδώ την έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας· θα αναφέρουμε μόνο ότι, αν η $y=f(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο σύνολο A, τότε είναι συνεχής στο A. Το αντίστροφο, εν γένει, δεν ισχύει. Δηλαδή, υπάρχει παράδειγμα συνάρτησης $y=f(x)$ και συνόλου A ώστε η $y=f(x)$ να είναι συνεχής στο A αλλά να μην είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Αν, όμως, το σύνολο A είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε ισχύει το αντίστροφο. Αυτό είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 7.1, το οποίο δε θα αποδείξουμε στις σημειώσεις αυτές.

Θεώρημα 7.1 *Αν η* $y=f(x)$ *είναι συνεχής στο διάστημα* $[a,b]$, *τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* $[a,b]$.

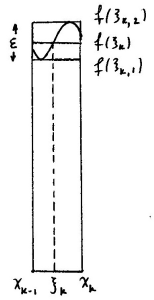
Ας θεωρήσουμε τώρα οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, βάσει του Θεωρήματος 7.1 υπάρχει κατάλληλος $\delta > 0$ ώστε για κάθε x', x'' του $[a, b]$ που ικανοποιούν την $|x' - x''| < \delta$ να ισχύει $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$. Τώρα επιλέγουμε τη διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ ώστε το πλάτος της να είναι $< \delta$ ή, ισοδύναμα, ώστε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ να έχει μήκος $< \delta$. *Αυτός είναι ο μοναδικός περιορισμός για την επιλογή της διαμέρισης.* Τέλος, επιλέγουμε οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, όπως ακριβώς περιγράψαμε στη μέθοδο.

Ο πρώτος στόχος είναι να εκτιμήσουμε το κάθε επιμέρους σφάλμα $\left|E_k - \widetilde{E_k}\right|$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής, υπάρχουν $\xi_{k,1}, \xi_{k,2}$ στο $[x_{k-1}, x_k]$ ώστε να ισχύει $f(\xi_{k,1}) \leq f(x) \leq f(\xi_{k,2})$ για κάθε x στο $[x_{k-1}, x_k]$. Αν θεωρήσουμε το ορθ. παραλληλόγραμμο $\widetilde{A_{k,1}}$ με κάτω βάση το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_{k,1})$ και το ορθ. παραλληλόγραμμο $\widetilde{A_{k,2}}$ με κάτω βάση το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_{k,2})$, τότε είναι φανερό ότι η επιφάνεια A_k περιέχει το $\widetilde{A_{k,1}}$ και περιέχεται στο $\widetilde{A_{k,2}}$. Αν συμβολίσουμε $\widetilde{E_{k,1}} = f(\xi_{k,1})(x_k - x_{k-1})$ και $\widetilde{E_{k,2}} = f(\xi_{k,2})(x_k - x_{k-1})$ τα αντίστοιχα εμβαδά τους, τότε είναι

$$\widetilde{E_{k,1}} \leq E_k \leq \widetilde{E_{k,2}}\,.$$

Το ορθ. παραλληλόγραμμο $\widetilde{A_k}$ έχει βάση το $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_k)$, οπότε και το $\widetilde{A_k}$ περιέχει το $\widetilde{A_{k,1}}$ και περιέχεται στο $\widetilde{A_{k,2}}$. Επομένως,

$$\widetilde{E_{k,1}} \leq \widetilde{E_k} \leq \widetilde{E_{k,2}}\,.$$



Σχήμα 7.3: Το «μέσα», το «έξω» και το «ενδιάμεσο» ορθ. παραλληλόγραμμο.

Οι $\xi_{k,1}, \xi_{k,2}$ ανήκουν στο $[x_{k-1}, x_k]$, οπότε είναι $|\xi_{k,1} - \xi_{k,2}| \leq x_k - x_{k-1} < \delta$. Βάσει του κριτηρίου επιλογής του δ, συνεπάγεται $f(\xi_{k,2}) - f(\xi_{k,1}) < \epsilon$. Άρα

$$\begin{aligned}\left|E_k - \widetilde{E_k}\right| &\leq \widetilde{E_{k,2}} - \widetilde{E_{k,1}} \;=\; f(\xi_{k,2})(x_k - x_{k-1}) - f(\xi_{k,1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= (f(\xi_{k,2}) - f(\xi_{k,1}))(x_k - x_{k-1}) \;<\; (x_k - x_{k-1})\epsilon.\end{aligned}$$

Αυτή ακριβώς η ανισότητα μας λέει ότι τα εμβαδά E_k και $\widetilde{E_k}$ είναι περίπου ίσα: το σφάλμα $\left|E_k - \widetilde{E_k}\right|$ είναι μικρότερο από $(x_k - x_{k-1})\epsilon$.

Ο δεύτερος στόχος είναι να εκτιμήσουμε το συνολικό σφάλμα $\left|E_1 - \widetilde{E_1}\right| + \cdots + \left|E_n - \widetilde{E_n}\right|$ και, φυσικά, το σφάλμα $\left|E - \widetilde{E}\right|$. Πράγματι:

$$\begin{aligned}\left|E - \widetilde{E}\right| &\leq \left|E_1 - \widetilde{E_1}\right| + \cdots + \left|E_n - \widetilde{E_n}\right| < (x_1 - x_0)\epsilon + \cdots + (x_n - x_{n-1})\epsilon \\ &= (x_1 - x_0 + \cdots + x_n - x_{n-1})\epsilon = (b - a)\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα το σφάλμα $\left|E - \widetilde{E}\right|$ είναι μικρότερο από $(b-a)\epsilon$. Και, επειδή επιλέγουμε από την αρχή το ϵ όσο θέλουμε μικρό, συμπεραίνουμε ότι το $\left|E - \widetilde{E}\right|$ μπορεί να γίνει όσο θέλουμε μικρό. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι, βέβαια, να γίνει το πλάτος της Δ αρκετά μικρό· δηλαδή μικρότερο από τον δ που αντιστοιχεί στον ϵ.

Παραδείγματα: (1) Η μεθοδος που αναλύσαμε έχει αξία όταν εφαρμόζεται σε καμπυλόγραμμες επιφάνειες. Ας δούμε, όμως, τι θα δώσει στην απλή περίπτωση μιας επιφάνειας A με σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου.

Θεωρούμε τη σταθερή συνάρτηση $y = f(x) = c \geq 0$ στο διάστημα $[a, b]$. Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ και οποιοδήποτε σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= (x_1 - x_0)c + \cdots + (x_n - x_{n-1})c \\ &= (b-a)c.\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε, τώρα, ότι το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το εμβαδό E αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό και, επειδή το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ έχει τη σταθερή τιμή $(b-a)c$ ανεξάρτητη της διαμέρισης, συμπεραίνουμε ότι

$$E = (b-a)c,$$

κάτι που, φυσικά, είναι ήδη γνωστό.

(2) Πάλι θα δούμε ένα απλό παράδειγμα επιφάνειας όπου δε χρειάζεται η μέθοδός μας. Θεωρούμε την επιφάνεια A σχήματος τραπεζίου που ορίζεται από το διάστημα $[a, b]$ με $0 \leq a < b$ και από τη συνάρτηση $y = f(x) = x$.

Για ευκολία στους υπολογισμούς, θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta = \{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + k\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n} = b\}$, όπου όλα τα υποδιαστήματα έχουν το ίδιο μήκος $\frac{b-a}{n}$. Άρα το πλάτος της Δ είναι ακριβώς $\frac{b-a}{n}$. Επίσης, για ευκολία, επιλέγουμε το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + k\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, a + n\frac{b-a}{n} = b\}$, δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Τότε το αντίστοιχο άθροισμα $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) &= \Big(a + \frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n} + \Big(a + 2\frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \Big(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n} + \Big(a + n\frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n} \\ &= \Big(na + \big(1 + 2 + \cdots + (n-1) + n\big)\frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n} \\ &= \Big(na + \frac{n(n+1)}{2}\frac{b-a}{n}\Big)\frac{b-a}{n} \\ &= a(b-a) + \frac{n+1}{2n}(b-a)^2.\end{aligned}$$

(Προσέξτε: χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.) Επομένως, αν το πλάτος της Δ, δηλαδή ο $\frac{b-a}{n}$, γίνει αρκετά μικρό ή, ισοδύναμα, αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, τότε το $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)=a(b-a)+\frac{n+1}{2n}(b-a)^2$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το E. Αυτό σημαίνει ότι

$$E=\lim_{n\to+\infty}\Big(a(b-a)+\frac{n+1}{2n}(b-a)^2\Big)=a(b-a)+\frac{1}{2}(b-a)^2=\frac{b^2-a^2}{2}\,.$$

(3) Τώρα θα δούμε το πρώτο παράδειγμα επιφάνειας όπου πράγματι χρειάζεται η μέθοδος που αναπτύξαμε. Θεωρούμε την επιφάνεια A που ορίζεται από το διάστημα $[a,b]$ και την $y=f(x)=x^2$ και, επομένως, η πάνω πλευρά της είναι τμήμα τετραγωνικής παραβολής.

Και πάλι για ευκολία παίρνουμε $\Delta=\{a,a+\frac{b-a}{n},a+2\frac{b-a}{n},\dots,a+k\frac{b-a}{n},\dots,a+(n-1)\frac{b-a}{n},a+n\frac{b-a}{n}=b\}$, όπου όλα τα υποδιαστήματα έχουν το ίδιο μήκος $\frac{b-a}{n}$ και, επομένως, το πλάτος της διαμέρισης αυτής είναι $\frac{b-a}{n}$. Πάλι επιλέγουμε το $\Xi=\{a+\frac{b-a}{n},a+2\frac{b-a}{n},\dots,a+k\frac{b-a}{n},\dots,a+(n-1)\frac{b-a}{n},a+n\frac{b-a}{n}=b\}$, δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Τότε το άθροισμα $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)&=\Big(a+\frac{b-a}{n}\Big)^2\frac{b-a}{n}+\Big(a+2\frac{b-a}{n}\Big)^2\frac{b-a}{n}+\cdots\\&\qquad\cdots+\Big(a+(n-1)\frac{b-a}{n}\Big)^2\frac{b-a}{n}+\Big(a+n\frac{b-a}{n}\Big)^2\frac{b-a}{n}\\&=\Big(na^2+2a\big(1+2+\cdots+(n-1)+n\big)\frac{b-a}{n}\\&\qquad+\big(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\big)\frac{(b-a)^2}{n^2}\Big)\frac{b-a}{n}\\&=a^2(b-a)+\frac{n+1}{n}a(b-a)^2+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}(b-a)^3\,.\end{aligned}$$

(Προσέξτε: χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.) Άρα, αν το πλάτος της Δ, δηλαδή ο $\frac{b-a}{n}$, γίνει αρκετά μικρό ή, ισοδύναμα, αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, τότε το $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi)=a^2(b-a)+\frac{n+1}{n}a(b-a)^2+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}(b-a)^3$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το E. Επομένως,

$$\begin{aligned}E&=\lim_{n\to+\infty}\Big(a^2(b-a)+\frac{n+1}{n}a(b-a)^2+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}(b-a)^3\Big)\\&=a^2(b-a)+a(b-a)^2+\frac{1}{3}(b-a)^3=\frac{b^3-a^3}{3}\,.\end{aligned}$$

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόστε τη μέθοδο που μελετήσαμε για να υπολογίσετε το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από την $y=x^3$ στο διάστημα $[a,b]$ με $a\geq 0$. Θα χρειαστείτε τον τύπο $1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

7.2 Το ολοκλήρωμα Riemann.

Με τον παρακάτω ορισμό, ουσιαστικά, γενικεύουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε για τον υπολογισμό εμβαδών. Θα δούμε στην ενότητα 7.4 ότι η γενίκευση αυτή εφαρμόζεται σε πολλές άλλες γεωμετρικές αλλά και φυσικές καταστάσεις.

Θεωρούμε συνάρτηση $y = f(x)$ ορισμένη και *φραγμένη* στο διάστημα $[a, b]$. *Δεν υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής ούτε ότι όλες οι τιμές της είναι* ≥ 0. Παίρνουμε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ ονομάζεται **άθροισμα Riemann** της $y = f(x)$ ως προς το $[a, b]$, τη διαμέριση Δ και το σύνολο Ξ ενδιάμεσων σημείων. Υποθέτουμε ότι *υπάρχει ένας αριθμός I ώστε το $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά τον I ή, με άλλα λόγια, η $|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - I|$ θα γίνει όσο θέλουμε μικρή αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό.* Τότε λέμε ότι η $y = f(x)$ είναι **Riemann ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$, ονομάζουμε τον αριθμό I **ολοκλήρωμα Riemann** της $y = f(x)$ στο $[a, b]$ και τον συμβολίζουμε

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Με άλλα λόγια: *η $y = f(x)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)\, dx$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιος $\delta > 0$ ώστε να είναι*

$$\left|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \epsilon$$

για κάθε διαμέριση Δ του $[a, b]$ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε αντίστοιχο σύνολο Ξ ενδιάμεσων σημείων.

Από τώρα και στο εξής, χάριν συντομίας, αντί να λέμε «ολοκλήρωμα Riemann» ή «Riemann ολοκληρώσιμη» θα λέμε απλώς «ολοκλήρωμα» ή «ολοκληρώσιμη», αντιστοίχως.

Η τιμή του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης δεν εξαρτάται από το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για την ανεξάρτητη μεταβλητή. Δηλαδή τα σύμβολα

$$\int_a^b f(x)\, dx, \quad \int_a^b f(y)\, dy, \quad \int_a^b f(t)\, dt, \quad \int_a^b f(u)\, du$$

δηλώνουν όλα τον ίδιο αριθμό, το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$.

Το ολοκλήρωμα είναι το όριο του αθροίσματος Riemann όταν το πλάτος της διαμέρισης τείνει στον 0. Γράφουμε

$$\boxed{\text{Συμβολικά :} \qquad \lim_{\text{πλάτος}(\Delta) \to 0} \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = \int_a^b f(x)\, dx}$$

αν και ο συμβολισμός αυτός είναι ασαφής από μαθηματική σκοπιά. Ο συμβολισμός αυτός σχετίζεται και με τον εξής μνημονικό κανόνα. Το άθροισμα Riemann $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ είναι, σε «λιτή γραφή», άθροισμα της μορφής $\Sigma f(x)\Delta x$, δηλαδή άθροισμα (Σ) γινομένων της μορφής: τιμή της συνάρτησης σε κάποιο σημείο $(f(x))$ επί διαφορά κοντινών σημείων (Δx). Αν χρησιμοποιήσουμε το πρώτο γράμμα της λατινικής λέξης Sum (= άθροισμα), τότε γράφουμε $\mathrm{S}\ f(x)\Delta x$ για το άθροισμα Riemann και, παίρνοντας όριο, το Δx γίνεται dx (το απειροστό μέγεθος που συναντάμε και στις παραγώγους) και το S «μακραίνει» και γίνεται $\int$.

Σύμφωνα με τον ορισμό, για να **αποδείξουμε** ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ πρέπει να αποδείξουμε ότι, αν το πλάτος(Δ) γίνει αρκετά μικρό, τότε το άθροισμα $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ θα πλησιάζει όσο θέλουμε κοντά κάποιον συγκεκριμένο αριθμό I – ο οποίος είναι τότε το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$. *Προσοχή*: αυτό πρέπει να γίνει για *όλες* τις διαμερίσεις (με αρκετά μικρό πλάτος) και για *όλα* τα αντίστοιχα σύνολα ενδιάμεσων σημείων χωρίς να περιοριστούμε σε κάποιες συγκεκριμένες διαμερίσεις ή σε κάποια συγκεκριμένα σύνολα ενδιάμεσων σημείων τα οποία είναι, πιθανόν, βολικά για ευκολότερους υπολογισμούς των αντίστοιχων $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$. Ο ορισμός είναι σαφής· λέει: «για κάθε διαμέριση» και «για κάθε σύνολο ενδιάμεσων σημείων». Όμως, αν *ήδη γνωρίζουμε* ότι η $y = f(x)$ *είναι ολοκληρώσιμη* στο διάστημα $[a, b]$, τότε για να *υπολογίσουμε* το $\int_a^b f(x)\, dx$ αρκεί να περιοριστούμε σε κάποιες συγκεκριμένες διαμερίσεις και σε κάποια συγκεκριμένα σύνολα ενδιάμεσων σημείων με τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε ευκολότερα τα αντίστοιχα $\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi)$ και να φροντίσουμε μόνο ώστε τα πλάτη των διαμερίσεων που θα επιλέξουμε να είναι αρκετά μικρά.

Το αποτέλεσμα που θα διατυπώσουμε τώρα είναι σημαντικό διότι εξασφαλίζει μια ολόκληρη κατηγορία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Το μόνο που απομένει γι αυτές είναι ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων τους με βάση την παρατήρηση στο τέλος της προηγούμενης παραγράφου.

Θεώρημα 7.2 *Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Ένα ακόμη αποτέλεσμα στην ίδια κατεύθυνση είναι το εξής.

Θεώρημα 7.3 *Αν η $y = f(x)$ είναι μονότονη στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Τα Θεωρήματα 7.2 και 7.3 δε θα αποδειχτούν σ′ αυτές τις σημειώσεις.

Παραδείγματα: (1) Έστω $y = f(x)$ συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ με την ιδιότητα $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Στην προηγούμενη ενότητα αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού E της επιφάνειας A που περικλείεται ανάμεσα στο $[a, b]$, στο γράφημα της $y = f(x)$, στο ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και στο ευθ. τμήμα με άκρα $(b, 0)$ και $(b, f(b))$. Η απάντηση που δόθηκε στην προηγούμενη ενότητα παίρνει τώρα τη μορφή

$$\boxed{E = \int_a^b f(x)\, dx}$$

διότι, όπως είδαμε, το εμβαδό E είναι, ακριβώς, ο αριθμός τον οποίο προσεγγίζουν τα αθροίσματα $\Sigma(f;a,b;\Delta;\Xi) = f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$.

(2) Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε το εμβαδό των επιφανειών ανάμεσα στον x-άξονα και στα γραφήματα τριών συγκεκριμένων συναρτήσεων: της σταθερής $y=c\geq 0$ και της $y=x^2$ σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ καθώς και της $y=x$ σε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ με $0\leq a<b$. Με το συμβολισμό των ολοκληρωμάτων τα συμπεράσματα γράφονται:

$$\int_a^b 1\,dx = b-a, \qquad \int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}\,, \qquad \int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}\,.$$

Για τον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος δε χρειάστηκε να χρησιμοποιήσουμε ειδικές διαμερίσεις ή ειδικά σύνολα ενδιάμεσων σημείων διότι οι υπολογισμοί των αθροισμάτων Riemann ήταν εύκολοι. Για τον υπολογισμό των άλλων δυο ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήσαμε διαμερίσεις με ισαπέχοντα διαδοχικά διαιρετικά σημεία και με τα ίδια τα διαιρετικά σημεία ως ενδιάμεσα σημεία. Δηλαδή οι Δ και τα Ξ ήταν ειδικού τύπου. Αυτό είναι αρκετό διότι οι συναρτήσεις $y=x$ και $y=x^2$ είναι συνεχείς, οπότε η ολοκληρωσιμότητά τους είναι εξασφαλισμένη από το Θεώρημα 7.2.

Ο περιορισμός $0\leq a<b$ για το $\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}$ χρειάστηκε μόνο για να είναι $x\geq 0$ στο διάστημα $[a,b]$ κι αυτό χρειάζεται μόνο για να έχει νόημα εμβαδού το $\int_a^b x\,dx$. Οι υπολογισμοί, όμως, των αθροισμάτων Riemann μπορούν να μείνουν απαράλλακτοι για κάθε a,b με $a<b$.

(3) Αν και θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο έναν άλλο – πολύ πιο εύκολο αλλά και πολύ λιγότερο στοιχειώδη – τρόπο υπολογισμού του, θα υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ όταν $0<a<b$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του. Το Θεώρημα 7.2 εγγυάται ότι το ολοκλήρωμα αυτό υπάρχει, αφού η $y=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα θα θεωρήσουμε κατάλληλες διαμερίσεις του $[a,b]$ και σύνολα ενδιάμεσων σημείων ώστε τα πλάτη αυτών των διαμερίσεων να είναι αρκετά μικρά και, επομένως, τα αντίστοιχα αθροίσματα Riemann να πλησιάζουν όσο θέλουμε κοντά την τιμή του ολοκληρώματος.

Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση $\Delta=\{a,a\mu,a\mu^2,\dots,a\mu^{n-1},a\mu^n=b\}$, όπου ο αριθμός μ προσδιορίζεται από την ισότητα $a\mu^n=b$: $\mu=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}>1$. Προσέξτε: τα υποδιαστήματα που ορίζονται δεν έχουν ίδιο μήκος. Θεωρούμε, επίσης, το $\Xi=\{a\mu,a\mu^2,\dots,a\mu^{n-1},a\mu^n=b\}$, δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο ως ενδιάμεσο σημείο. Το μήκος του k-οστού υποδιαστήματος είναι $a\mu^k-a\mu^{k-1}=a\big(1-\frac{1}{\mu}\big)\mu^k$ και, επειδή είναι $\mu>1$, το μεγαλύτερο μήκος είναι το n-οστό. Δηλαδή: πλάτος$(\Delta)=a(1-\frac{1}{\mu})\mu^n=b\big(1-\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\big)$. Συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}$ πλάτος$(\Delta)=\lim_{n\to+\infty} b\big(1-\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\big)=b(1-1)=0$. Άρα, αν ο n γίνει αρκετά μεγάλος, τότε το πλάτος της Δ θα γίνει αρκετά μικρό, οπότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το ολοκλήρωμα.

Υπολογίζουμε, λοιπόν, το άθροισμα Riemann:

$$\begin{aligned}\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) &= \frac{1}{a\mu}(a\mu-a)+\frac{1}{a\mu^2}(a\mu^2-a\mu)+\cdots\\ &\quad\cdots+\frac{1}{a\mu^{n-1}}(a\mu^{n-1}-a\mu^{n-2})+\frac{1}{a\mu^n}(a\mu^n-a\mu^{n-1})\\ &= \Big(1-\frac{1}{\mu}\Big)+\Big(1-\frac{1}{\mu}\Big)+\cdots+\Big(1-\frac{1}{\mu}\Big)+\Big(1-\frac{1}{\mu}\Big)\\ &= n\Big(1-\frac{1}{\mu}\Big)=n\Big(1-\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\Big).\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx=\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\;\Big)=\log\frac{b}{a}\,.$$

Το όριο προκύπτει από την παράγωγο $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{d\,a^x}{dx}\big|_{x=0}=a^0\log a=\log a$. Από το όριο αυτό, μέσω της ακολουθίας με τύπο $x_n=\frac{1}{n}$, περνάμε στο $\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)=\log a$.

(4) Θα δούμε τώρα ένα πολύ απλό παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι ολοκληρώσιμη παρά το ότι δεν είναι συνεχής ούτε μονότονη. Θεωρούμε οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$, οποιονδήποτε c στο $[a,b]$, δηλαδή $a\le c\le b$, και την

$$y=f(x)=\begin{cases}1\,, & \text{αν } x=c,\\ 0\,, & \text{αν } a\le x\le b \text{ και } x\ne c.\end{cases}$$

Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta=\{x_0=a,x_1,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$. Τώρα διακρίνουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις. Η πρώτη είναι όταν κανένα από τα ενδιάμεσα σημεία δεν είναι ίσο με το c, οπότε $\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=0(x_1-x_0)+\cdots+0(x_n-x_{n-1})=0$. Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν ακριβώς ένα από τα ενδιάμεσα σημεία είναι ίσο με c, για παράδειγμα $\xi_k=c$ για ακριβώς ένα k, οπότε $\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=0(x_1-x_0)+\cdots+1(x_k-x_{k-1})+\cdots+0(x_n-x_{n-1})=x_k-x_{k-1}$. Η τρίτη περίπτωση είναι όταν ακριβώς δυο από τα ενδιάμεσα σημεία είναι ίσα με c, οπότε τα ενδιάμεσα αυτά σημεία είναι σε διαδοχικά υποδιαστήματα και ταυτίζονται με το κοινό τους άκρο, το κοινό διαιρετικό σημείο. Δηλαδή $\xi_k=\xi_{k+1}=x_k=c$ για κάποιο k, οπότε $\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)=f(\xi_1)(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})=0(x_1-x_0)+\cdots+f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+f(\xi_{k+1})(x_{k+1}-x_k)+\cdots+0(x_n-x_{n-1})=1(x_k-x_{k-1})+1(x_{k+1}-x_k)=x_{k+1}-x_{k-1}$. Δεν υπάρχει άλλη περίπτωση διότι ο c δε μπορεί να είναι ίσος με περισσότερα από δυο ενδιάμεσα σημεία. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$0\le\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)\le 2\,\text{πλάτος}\,(\Delta).$$

Άρα το $\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά τον 0 αν το πλάτος(Δ) γίνει αρκετά μικρό. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $\epsilon>0$ θεωρούμε τον $\delta=\frac{\epsilon}{2}>0$

και τότε για κάθε διαμέριση Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε επιλογή Ξ ενδιάμεσων σημείων συνεπάγεται $\big|\Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi)-0\big| = \Sigma(f;a,b;\Delta,\Xi) < 2\delta = \epsilon$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της συγκεκριμένης $y = f(x)$ και στο διάστημα $[a,b]$ του x-άξονα αποτελείται από δυο ευθύγραμμα τμήματα: το οριζόντιο με άκρα $(a,0)$ και $(b,0)$ και το κατακόρυφο ευθ. τμήμα με άκρα $(c,0)$ και $(c,1)$. Το πρώτο ευθ. τμήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με ύψος ίσο με 0 και το δεύτερο ευθ. τμήμα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος βάσης ίσο με 0. Άρα το συνολικό εμβαδό των δυο αυτών ευθ. τμημάτων είναι ίσο με 0 και αυτό, όπως είναι αναμενόμενο, συμφωνεί με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιήστε διαμέριση με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία – όπως και με τα $\int_a^b x\,dx$ και $\int_a^b x^2\,dx$ – για να αποδείξετε ότι

$$\int_a^b \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^b-\alpha^a}{\log\alpha}$$

   για κάθε a,b με $a<b$ και για κάθε $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$. Ειδικώτερα,

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

2. Χρησιμοποιήστε την ίδια διαμέριση με αυτή που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό του $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$ για να αποδείξετε ότι

$$\int_a^b x^\alpha\,dx = \frac{b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

   για κάθε a,b με $0<a<b$ και κάθε α.

3. Χρησιμοποιήστε διαμέριση με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία για να αποδείξετε ότι

$$\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b$$

   για κάθε a,b με $a<b$. Θα χρειαστείτε τους τύπους

$$\cos(p+q)+\cos(p+2q)+\cdots+\cos(p+nq) = \frac{\sin\frac{nq}{2}\cos(p+\frac{(n+1)q}{2})}{\sin\frac{q}{2}}\,,$$

$$\sin(p+q)+\sin(p+2q)+\cdots+\sin(p+nq) = \frac{\sin\frac{nq}{2}\sin(p+\frac{(n+1)q}{2})}{\sin\frac{q}{2}}\,.$$

   Αποδείξτε τους βάσει της άσκησης Α12 της ενότητας 1.4.

4. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω όρια ακολουθιών με τη μορφή ολοκληρώματος. Δε χρειάζεται να τα υπολογίσετε.

   (i) $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}+\frac{n}{n^2+n^2}\big)$.

   (ii) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2-0^2}+\sqrt{n^2-1^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}$.

   (iii) $\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\Big)$.

   (iv) $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{n+(n-1)}+\sqrt{n+n}}{n\sqrt{n}}$.

   (Υπόδειξη: Για το (i) παρατηρήστε ότι ο k-οστός όρος του αθροίσματος γράφεται $\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}=f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$ για κατάλληλη συνάρτηση $y=f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$, κατάλληλη διαμέριση $\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ του $[0,1]$ και κατάλληλο σύνολο $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Ομοίως για τα $(ii)-(iv)$.)

5. Υπολογίστε το όριο ακολουθίας $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}+\frac{1}{n+n}\big)$ αφού το γράψετε στη μορφή ολοκληρώματος στο διάστημα $[1,2]$.

   (Υπόδειξη: Δείτε την υπόδειξη της προηγούμενης άσκησης.)

6. (*) Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$ και $A=f(a)$, $B=f(b)$. Γνωρίζουμε ότι η $x=f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_A^B f^{-1}(y)\,dy=Bb-Aa.$$

   (Υπόδειξη: Θεωρήστε διαμέριση $\{x_0=a,x_1,\dots,x_{n-1},x_n=b\}$ του $[a,b]$ και την αντίστοιχη διαμέριση $\{y_0=A,y_1,\dots,y_{n-1},y_n=B\}$ του $[A,B]$ με $y_k=f(x_k)$ για κάθε k. Τί είναι το άθροισμα $y_1(x_1-x_0)+y_2(x_2-x_1)+\cdots+y_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+y_n(x_n-x_{n-1})$ για το πρώτο ολοκλήρωμα και τί είναι το άθροισμα $x_0(y_1-y_0)+x_1(y_2-y_1)+\cdots+x_{n-2}(y_{n-1}-y_{n-2})+x_{n-1}(y_n-y_{n-1})$ για το δεύτερο ολοκλήρωμα; Υπολογίστε το άθροισμα των δυο αθροισμάτων.)

   Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της ισότητας;

   (Υπόδειξη: Σχεδιάστε τα γραφήματα των $y=f(x)$ και $x=f^{-1}(y)$ στο *ίδιο* σχήμα.)

7.3 Ιδιότητες ολοκληρωμάτων Riemann.

A. Αλγεβρικές πράξεις με ολοκληρώματα.

Πρόταση 7.1 *Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και λ είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Τότε και η $y=\lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x)\big)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Sigma(\lambda f; a, b; \Delta; \Xi) &= \lambda f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + \lambda f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\
&= \lambda\Big(f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\Big) \\
&= \lambda\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi).
\end{aligned}$$

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε Ξ να είναι $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{|\lambda|+1}$. Συνεπάγεται ότι $\left|\Sigma(\lambda f; a, b; \Delta; \Xi) - \lambda\int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\lambda\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \lambda\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq |\lambda|\frac{\epsilon}{|\lambda|+1} < \epsilon$. Επομένως, η $y = \lambda f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \big(\lambda f(x)\big)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$.

Ας δούμε το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 7.1. Έστω $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$ και A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στο διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα. Αν είναι $\lambda \geq 0$ και B είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = \lambda f(x)$ και στο διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα, τότε η B έχει την ίδια βάση με την A – το διάστημα $[a, b]$ – ενώ τα ύψη της B – τα $\lambda f(x)$ – είναι ίσα με τα αντίστοιχα ύψη της A – τα $f(x)$ – πολλαπλασιασμένα όλα με τον ίδιο αριθμό λ. Η Πρόταση 7.1 λέει ότι *το εμβαδό της B είναι ίσο με το εμβαδό της A πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό λ.*

Ας δούμε ένα ακόμη συμπέρασμα για τη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα και σε εμβαδά. Έστω ότι είναι $f(x) \leq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$ και ας συμβολίσουμε A την επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στο διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα. Η A είναι, προφανώς, κάτω από τον x-άξονα. Αν συμβολίσουμε B την επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = -f(x)$ και στο διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα, τότε η B είναι συμμετρική της A ως προς τον x-άξονα. Επειδή είναι $-f(x) \geq 0$, γνωρίζουμε ότι το $\int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx$ είναι το εμβαδό της B, το οποίο, λόγω συμμετρίας, είναι ίσο με το εμβαδό της A. Η Πρόταση 7.1 μας λέει ότι το $-\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το $\int_a^b \big(-f(x)\big)\,dx$, δηλαδή ίσο με το εμβαδό της A. Επομένως, *το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το αντίθετο του εμβαδού της A.*

Πρόταση 7.2 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $y = f(x) + g(x)$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\boxed{\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Sigma(f + g; a, b; \Delta; \Xi) &= \big(f(\xi_1) + g(\xi_1)\big)(x_1 - x_0) + \cdots + \big(f(\xi_n) + g(\xi_n)\big)(x_n - x_{n-1}) \\
&= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\
&\quad + g(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + g(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\
&= \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) + \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi).
\end{aligned}$$

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta'$ και κάθε Ξ να είναι $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ και υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta''$ και κάθε Ξ να είναι $\left|\Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b g(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, οπότε για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε Ξ ισχύουν ΚΑΙ οι δυο προηγούμενες ανισότητες και, επομένως, η $\left|\Sigma(f+g; a, b; \Delta; \Xi) - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\right)\right| = \left|\left(\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) + \Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi)\right) - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx\right)\right| \leq \left|\Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b f(x)\, dx\right| + \left|\Sigma(g; a, b; \Delta; \Xi) - \int_a^b g(x)\, dx\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Επομένως, η $y = f(x) + g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.

Έστω $f(x), g(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στο διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα, B η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = g(x)$ και στο $[a, b]$ και C η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x) + g(x)$ και στο $[a, b]$, τότε τα ύψη της C – τα $f(x) + g(x)$ – είναι όλα ίσα με τα αθροίσματα των αντίστοιχων υψών της A – των $f(x)$ – και της B – των $g(x)$. Η Πρόταση 7.2 λέει ότι *το εμβαδό της C είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών της A και της B.*

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 7.1 και 7.2, βλέπουμε ότι, αν οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και οι λ και μ είναι δυο αριθμοί, τότε η $y = \lambda f(x) + \mu g(x)$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

Μπορούμε, μάλιστα, με την αρχή της επαγωγής να αποδείξουμε ότι, αν οι $y = f_1(x), \ldots, y = f_m(x)$ είναι όλες ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και οι $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ είναι αριθμοί, τότε και η $\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b \left(\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x)\right) dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \cdots + \lambda_m \int_a^b f_m(x)\, dx.$$

Παραδείγματα: (1) Είναι $\int_a^b (\lambda + \mu x + \nu x^2)\, dx = \lambda \int_a^b 1\, dx + \mu \int_a^b x\, dx + \nu \int_a^b x^2\, dx = \lambda(b-a) + \mu \frac{b^2-a^2}{2} + \nu \frac{b^3-a^3}{3} = \left(\lambda b + \mu \frac{b^2}{2} + \nu \frac{b^3}{3}\right) - \left(\lambda a + \mu \frac{a^2}{2} + \nu \frac{a^3}{3}\right)$. Λίγο αργότερα θα γενικεύσουμε αυτό το παράδειγμα.

(2) $\int_a^b (\rho \frac{1}{x} + \lambda + \mu x + \nu x^2)\, dx = \rho \int_a^b \frac{1}{x}\, dx + \int_a^b (\lambda + \mu x + \nu x^2)\, dx = \rho \log \frac{b}{a} + \lambda(b - a) + \mu \frac{b^2-a^2}{2} + \nu \frac{b^3-a^3}{3} = \left(\rho \log b + \lambda b + \mu \frac{b^2}{2} + \nu \frac{b^3}{3}\right) - \left(\rho \log a + \lambda a + \mu \frac{a^2}{2} + \nu \frac{a^3}{3}\right)$ αν $0 < a < b$.

(3) Έστω διάστημα $[a, b]$ και m σημεία $c_1, \ldots, c_m$ στο $[a, b]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε $y = f(x)$ η οποία έχει τιμή $f(x) = 0$ σε κάθε x στο $[a, b]$ εκτός από τα σημεία $c_1, \ldots, c_m$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής. Ονομάζουμε $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία $c_1, \ldots, c_m$, αντιστοίχως. Για κάθε c_k θεωρούμε την $y = f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = c_k, \\ 0, & \text{αν } a \leq x \leq b \text{ και } x \neq c_k. \end{cases}$ Είναι εύκολο να δούμε ότι τότε ισχύει

$f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$, οπότε, επειδή κάθε $y = f_k(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ με $\int_a^b f_k(x)\,dx = 0$, συνεπάγεται ότι και η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $\int_a^b f(x)\,dx = \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + \cdots + \lambda_m \int_a^b f_m(x)\,dx = \lambda_1 0 + \cdots + \lambda_m 0 = 0$.

Η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στο διάστημα $[a, b]$ του x-άξονα αποτελείται από ένα οριζόντιο και από m κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα. Το εμβαδό της επιφάνειας αυτής είναι 0 και συμφωνεί με την τιμή του ολοκληρώματος.

Δε θα αποδείξουμε τις επόμενες δυο προτάσεις.

Πρόταση 7.3 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε η $y = f(x)g(x)$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Πρέπει να τονίσουμε ότι, σε αντίθεση με την περίπτωση του αθροίσματος συναρτήσεων, *δεν* υπάρχει τύπος ο οποίος να συνδέει το ολοκλήρωμα του γινομένου συναρτήσεων με τα ολοκληρώματα των δυο συναρτήσεων ξεχωριστά. Για παράδειγμα, *δεν ισχύει* ότι $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$. Αυτός, αν ίσχυε, θα ήταν τύπος ανάλογος του τύπου που ισχύει για το άθροισμα συναρτήσεων.

Παράδειγμα: Για να δούμε ότι δεν ισχύει γενικά ο παραπάνω τύπος για το ολοκλήρωμα γινομένου συναρτήσεων θεωρούμε το παράδειγμα με $\int_a^b 1 \cdot 1\,dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$ και $\int_a^b 1\,dx \int_a^b 1\,dx = (b - a)(b - a) = (b - a)^2$. Η ισότητα $b - a = (b - a)^2$ δεν ισχύει γενικά!

Πρόταση 7.4 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν για κάποιον αριθμό $m > 0$ ισχύει $|f(x)| \geq m$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε η $y = \frac{1}{f(x)}$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Τονίζουμε ότι, όπως και με το γινόμενο συναρτήσεων, *δεν* υπάρχει γενικός τύπος που να συνδέει το ολοκλήρωμα του αντιστρόφου μιας συνάρτησης με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης. Για παράδειγμα, *δεν ισχύει* ότι $\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{1}{\int_a^b f(x)\,dx}$.

Παράδειγμα: Για να δούμε ότι δεν ισχύει, γενικά, ο παραπάνω τύπος θεωρούμε το παράδειγμα με $\int_a^b \frac{1}{1}\,dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$ και $\frac{1}{\int_a^b 1\,dx} = \frac{1}{b-a}$. Η ισότητα $b - a = \frac{1}{b-a}$ δεν ισχύει γενικά!

Β. Ισότητα ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 7.5 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ ταυτίζονται στο διάστημα $[a, b]$ εκτός σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του $[a, b]$. Αν μια από τις δυο συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε και η άλλη είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Ορίζουμε την $y = h(x) = g(x) - f(x)$, η οποία έχει τιμή $h(x) = 0$ σε κάθε x του $[a, b]$ εκτός σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του $[a, b]$, οπότε, σύμφωνα με προηγούμενο παράδειγμα, είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b h(x)\,dx = 0$. Επειδή είναι $g(x) = f(x) + h(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$, συνεπάγεται ότι και η $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Η Πρόταση 7.5 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής.

Αν μια συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα και δημιουργήσουμε μια νέα συνάρτηση αλλάζοντας τις τιμές της αρχικής σε πεπερασμένου πλήθους σημεία του διαστήματος, τότε η νέα συνάρτηση είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα και το ολοκλήρωμά της είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της αρχικής συνάρτησης.

Έστω $f(x), g(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στο $[a, b]$ και B η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = g(x)$ και στο $[a, b]$, τότε οι δυο επιφάνειες διαφέρουν κατά m κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα. Επειδή κάθε ευθ. τμήμα έχει εμβαδό 0, οι A και B έχουν το ίδιο εμβαδό. Αυτό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 7.5.

Γ. Υποδιαστήματα και γειτονικά διαστήματα.

Πρόταση 7.6 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$.*

Δε θα αποδείξουμε την Πρόταση 7.6.

Πρόταση 7.7 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, b]$ και $[b, c]$. Τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και*

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.}$$

Απόδειξη: Επειδή η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, b]$ και $[b, c]$, είναι και φραγμένη στα διαστήματα αυτά, οπότε υπάρχουν M' και M'' ώστε να είναι $|f(x)| \leq M'$ για κάθε x στο $[a, b]$ και $|f(x)| \leq M''$ για κάθε x στο $[b, c]$. Ορίζουμε $M = \max\{M', M''\}$ και συνεπάγεται ότι είναι $|f(x)| \leq M' \leq M$ για κάθε x στο $[a, b]$ και $|f(x)| \leq M'' \leq M$ για κάθε x στο $[b, c]$. Άρα είναι $|f(x)| \leq M$ για κάθε x στο $[a, c]$, οπότε η συνάρτηση είναι φραγμένη στο $[a, c]$.

Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = c\}$ του $[a, c]$ τέτοια ώστε ο b να είναι ένα από τα διαιρετικά της σημεία: έστω $b = x_k$ για κάποιον k με $1 \leq k \leq n-1$. Θεωρούμε και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Τώρα ορίζουμε τη διαμέριση $\Delta' = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k = b\}$ του $[a, b]$ και το αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi' = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$. Ορίζουμε και τη διαμέριση $\Delta'' = \{x_k = b, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}, x_n = c\}$ του $[b, c]$ και το αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi'' = \{\xi_{k+1}, \dots, \xi_n\}$. Τώρα είναι:

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, c; \Delta, \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &\quad + f(\xi_{k+1})(x_{k+1} - x_k) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \Sigma(f; a, b; \Delta', \Xi') + \Sigma(f; b, c; \Delta'', \Xi'').\end{aligned}$$

Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta', \Xi') - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}$ για κάθε Δ' με πλάτος$(\Delta') < \delta'$ και κάθε αντίστοιχο Ξ' και υπάρχει $\delta'' > 0$

ώστε να είναι $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta'',\Xi'')-\int_b^c f(x)\,dx\right|<\frac{\epsilon}{3}$ για κάθε Δ'' με πλάτος$(\Delta'')<\delta''$ και κάθε αντίστοιχο Ξ''. Ορίζουμε $\delta=\min\left\{\delta',\delta'',\frac{\epsilon}{6M+1}\right\}$ και έστω οποιαδήποτε διαμέριση Δ του $[a,c]$ με πλάτος$(\Delta)<\delta$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο Ξ. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Περίπτωση 1. Έστω ότι η Δ περιέχει τον b ως διαιρετικό σημείο. Τότε, σύμφωνα με τη δεύτερη παράγραφο, η Δ χωρίζεται σε διαμερίσεις Δ' του $[a,b]$ και Δ'' του $[b,c]$ και το Ξ σε Ξ' και Ξ''. Προφανώς, είναι πλάτος$(\Delta')\leq$ πλάτος$(\Delta)<\delta\leq\delta'$ και πλάτος$(\Delta'')\leq$ πλάτος$(\Delta)<\delta\leq\delta''$ και, επομένως, είναι $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta',\Xi')-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\frac{\epsilon}{3}$ και $\left|\Sigma(f;a,b;\Delta'',\Xi'')-\int_b^c f(x)\,dx\right|<\frac{\epsilon}{3}$. Επίσης, πάλι σύμφωνα με τη δεύτερη παράγραφο, είναι $\Sigma(f;a,c;\Delta,\Xi)=\Sigma(f;a,b;\Delta',\Xi')+\Sigma(f;b,c;\Delta'',\Xi'')$. Συνδυάζοντας όλα αυτά,

$$\begin{aligned}\left|\Sigma(f;a,c;\Delta,\Xi)-\Big(\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\Big)\right| &= \left|\Big(\Sigma(f;a,b;\Delta',\Xi')+\Sigma(f;b,c;\Delta'',\Xi'')\Big)\right.\\ &\qquad \left.-\Big(\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\Big)\right|\\ &\leq \left|\Sigma(f;a,b;\Delta',\Xi')-\int_a^b f(x)\,dx\right|\\ &\qquad +\left|\Sigma(f;b,c;\Delta'',\Xi'')-\int_b^c f(x)\,dx\right|\\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\frac{2\epsilon}{3}<\epsilon.\end{aligned}$$

Περίπτωση 2. Έστω ότι η Δ δεν περιέχει τον b ως διαιρετικό σημείο. Δηλαδή είναι $x_{k-1}<b<x_k$ για κάποιον k με $1\leq k\leq n$. Δημιουργούμε την $\Delta^*=\{x_0=a,\dots,x_{k-1},b,x_k,\dots,x_n=c\}$, επισυνάπτοντας τον b ως επιπλέον διαιρετικό σημείο στην Δ. Είναι φανερό ότι πλάτος$(\Delta^*)\leq$ πλάτος$(\Delta)<\delta$. Επίσης, δημιουργούμε το $\Xi^*=\{\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\eta,\zeta,\xi_{k+1},\dots,\xi_n\}$, παίρνοντας κάποιον η στο $[x_{k-1},b]$ και κάποιον ζ στο $[b,x_k]$ και αγνοώντας τον ξ_k στο $[x_{k-1},x_k]$. Τότε είναι

$$\begin{aligned}\left|\Sigma(f;a,c;\Delta,\Xi)-\Sigma(f;a,c;\Delta^*,\Xi^*)\right| &= \left|f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-f(\eta)(b-x_{k-1})-f(\zeta)(x_k-b)\right|\\ &= \left|f(\xi_k)(b-x_{k-1})+f(\xi_k)(x_k-b)\right.\\ &\qquad \left.-f(\eta)(b-x_{k-1})-f(\zeta)(x_k-b)\right|\\ &\leq \left|f(\xi_k)-f(\eta)\right|(b-x_{k-1})+\left|f(\xi_k)-f(\zeta)\right|(x_k-b)\\ &\leq 2M(b-x_{k-1})+2M(x_k-b)=2M(x_k-x_{k-1})\\ &< 2M\delta<\frac{\epsilon}{3}.\end{aligned}$$

Επειδή η Δ^* περιέχει τον b ως διαιρετικό σημείο, σύμφωνα με το αποτέλεσμα της περίπτωσης 1, συνεπάγεται ότι

$$\left|\Sigma(f;a,c;\Delta^*,\Xi^*)-\Big(\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\Big)\right|<\frac{2\epsilon}{3}.$$

Συνδυάζοντας με την ανισότητα $\left|\Sigma(f;a,c;\Delta,\Xi)-\Sigma(f;a,c;\Delta^*,\Xi^*)\right|<\frac{\epsilon}{3}$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\left|\Sigma(f;a,c;\Delta,\Xi)-\Big(\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\Big)\right| &\leq \left|\Sigma(f;a,c;\Delta,\Xi)-\Sigma(f;a,c;\Delta^*,\Xi^*)\right|\\ &\qquad +\left|\Sigma(f;a,c;\Delta^*,\Xi^*)-\Big(\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx\Big)\right|\\ &< \frac{\epsilon}{3}+\frac{2\epsilon}{3}=\epsilon.\end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $\left|\Sigma(f;a,c;\Delta,\Xi) - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx\right)\right| < \epsilon$.
Άρα η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

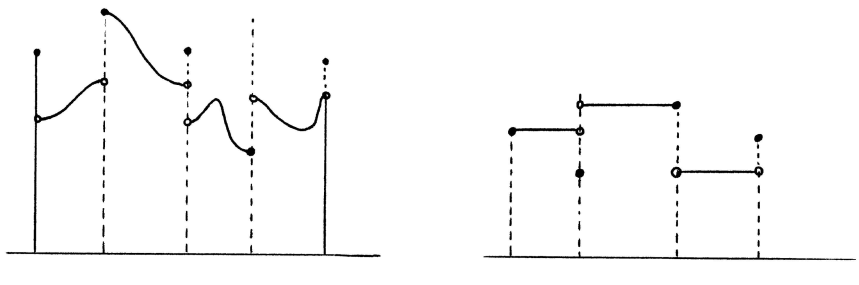
Έστω $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a,b]$. Αν A, B και C είναι οι επιφάνειες ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στα διαστήματα $[a,b]$, $[b,c]$ και $[a,c]$, αντιστοίχως, τότε η C είναι η ένωση των A και B ενώ η τομή των A και B είναι ένα κατακόρυφο ευθ. τμήμα. Επειδή το ευθ. τμήμα έχει εμβαδό 0, το εμβαδό της C είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των A και B. Αυτό ακριβώς είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της Πρότασης 7.7.

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 7.7 γενικεύεται για τρία διαδοχικά διαστήματα και με την αρχή της επαγωγής για οποιοδήποτε αριθμό διαδοχικών διαστημάτων. Δηλαδή, αν η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα $[a_1,a_2]$, $[a_2,a_3]$, $\ldots$, $[a_{m-1},a_m]$, τότε η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και στο $[a_1,a_m]$ και

$$\int_{a_1}^{a_m} f(x)\,dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} f(x)\,dx.$$

Ειδικώτερα, ας δούμε μια ακόμη σχέση ανάμεσα σε ολοκληρώματα και σε εμβαδά. Έστω ότι το διάστημα $[a,b]$ μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένα υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία η $y = f(x)$ είναι είτε μόνο ≥ 0 είτε μόνο ≤ 0. Καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα ορίζει την αντίστοιχη επιφάνεια ανάμεσα σ' αυτό και στο γράφημα της $y = f(x)$. Τότε *το* $\int_a^b f(x)\,dx$ *είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών που αντιστοιχούν σε υποδιαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι* ≥ 0 *πλην το άθροισμα των εμβαδών των επιφανειών που αντιστοιχούν σε υποδιαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι* ≤ 0.

Θα δούμε τώρα μια άμεση εφαρμογή της Πρότασης 7.7, αφού πρώτα ορίσουμε μια κατηγορία συναρτήσεων ευρύτερη της κατηγορίας των συνεχών συναρτήσεων.



Σχήμα 7.4: Συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής και κατά τμήματα σταθερή.

Η $y = f(x)$ χαρακτηρίζεται **κατά τμήματα συνεχής** στο διάστημα $[a,b]$ αν υπάρχουν διαδοχικά σημεία $t_0 = a, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = b$ ώστε η $y = f(x)$ να είναι συνεχής σε καθένα από τα ανοικτά διαστήματα (t_0,t_1), $\ldots$, (t_{m-1},t_m), να υπάρχουν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης σε καθένα από τα σημεία $t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m$

– το ένα πλευρικό όριο στα άκρα $t_0 = a$ και $t_m = b$ και τα δυο πλευρικά όρια σε κάθε άλλο t_k – και αυτά τα πλευρικά όρια να είναι όλα αριθμοί.

Πρόταση 7.8 *Αν η $y = f(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[a, b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[a, b]$, οπότε θα ικανοποιεί τις υποθέσεις του παραπάνω ορισμού. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[t_{k-1}, t_k]$. Αν ορίσουμε την $y = g(x)$ στο $[t_{k-1}, t_k]$, η οποία έχει τιμές $g(x) = f(x)$ για κάθε x στο ανοικτό (t_{k-1}, t_k), $g(t_{k-1}) = \lim_{x\to t_{k-1}+} f(x) = \lim_{x\to t_{k-1}+} g(x)$ και $g(t_k) = \lim_{x\to t_k-} f(x) = \lim_{x\to t_k-} g(x)$, τότε η $y = g(x)$ είναι συνεχής στο $[t_{k-1}, t_k]$ και διαφέρει από την $y = f(x)$ το πολύ σε δυο σημεία: τα άκρα t_{k-1} και t_k. Η $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_{k-1}, t_k]$, οπότε και η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[t_{k-1}, t_k]$.

Παράδειγμα: Έστω **κατά τμήματα σταθερή** $y = f(x)$ στο $[a, b]$. Δηλαδή, υπάρχουν διαδοχικά σημεία $t_0 = a, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = b$ ώστε η $y = f(x)$ να είναι σταθερή σε καθένα από τα ανοικτά υποδιαστήματα $(t_0, t_1), \ldots, (t_{m-1}, t_m)$. Έστω λ_k η σταθερή τιμή της $y = f(x)$ στο αντίστοιχο (t_{k-1}, t_k). Οι τιμές της $y = f(x)$ στα σημεία $t_0, \ldots, t_m$ δεν έχουν καμιά σημασία. Η $y = f(x)$ είναι, προφανώς, κατά τμήματα συνεχής στο $[a, b]$, οπότε είναι ολοκληρώσιμη και τώρα θα υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)\,dx$. Επειδή η $y = f(x)$ σε κάθε $[t_{k-1}, t_k]$ είναι σταθερή, $f(x) = \lambda_k$, εκτός σε δυο το πολύ σημεία, συνεπάγεται ότι $\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x)\,dx = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \lambda_k\,dx = \lambda_k(t_k - t_{k-1})$. Άρα $\int_a^b f(x)\,dx = \lambda_1(t_1 - t_0) + \cdots + \lambda_m(t_m - t_{m-1})$.

Δ. Σύγκριση ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 7.9 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ και ότι ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε είναι*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε αντίστοιχο σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Τότε

$$\begin{aligned}\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\\ &\leq g(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + g(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\\ &= \Sigma(g; a, b; \Delta, \Xi).\end{aligned}$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι είναι $\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx$. Θεωρούμε κάποιον ϵ με $0 < \epsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$. Τότε υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε να είναι $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta'$ και κάθε αντίστοιχο Ξ. Επίσης, υπάρχει $\delta'' > 0$ ώστε να είναι $\left|\Sigma(g; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta''$ και κάθε αντίστοιχο Ξ. Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, οπότε είναι $\left|\Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ και $\left|\Sigma(g; a, b; \Delta, \Xi) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$ για κάθε Δ με πλάτος$(\Delta) < \delta$ και κάθε αντίστοιχο Ξ. Τότε, όμως, είναι $\Sigma(g; a, b; \Delta, \Xi) < \int_a^b g(x)\,dx + \frac{\epsilon}{2} \leq \int_a^b f(x) - \frac{\epsilon}{2} < \Sigma(f; a, b; \Delta, \Xi)$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο.

Έστω $0 \le f(x) \le g(x)$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αν A και B είναι οι επιφάνειες ανάμεσα στο $[a, b]$ και στα γραφήματα των $y = f(x)$ και $y = g(x)$, αντιστοίχως, τότε η A είναι υποσύνολο της B. Η Πρόταση 7.9 λέει ότι *το εμβαδό της A δεν υπερβαίνει το εμβαδό της B*.

Πρόταση 7.10 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.*
(1) Αν ο u είναι οποιοδήποτε άνω φράγμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$, δηλαδή αν είναι $f(x) \le u$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)u$.
(2) Αν ο l είναι οποιοδήποτε κάτω φράγμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$, δηλαδή αν είναι $f(x) \ge l$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \ge (b-a)l$.

Θεωρούμε τις σταθερές συναρτήσεις $y = h(x) = l$ και $y = g(x) = u$ για κάθε x στο $[a, b]$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση 7.9, αφού $\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b l\,dx = (b-a)l$ και $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b u\,dx = (b-a)u$.

Παράδειγμα: Η $y = \frac{x}{x^2+2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, \sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{2}, 4]$, διότι η $\frac{dy}{dx} = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}$ είναι > 0 στο $(1, \sqrt{2})$ και < 0 στο $(\sqrt{2}, 4)$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η $\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2+2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Επομένως, $\int_1^4 \frac{x}{x^2+2}\,dx \le (4-1)\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Έστω $0 \le l \le f(x) \le u$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αν A είναι η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στο $[a, b]$ και B και C είναι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με βάση το $[a, b]$ και ύψη l και u, αντιστοίχως, τότε η A περιέχει το B και περιέχεται στο C. Η Πρόταση 7.10 λέει ότι *το εμβαδό της A δεν είναι μικρότερο από το εμβαδό του B ούτε μεγαλύτερο από το εμβαδό του C*.

Πρόταση 7.11 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Τότε και η $y = |f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και είναι*

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx \Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Δεν θα αποδείξουμε ότι η $y = |f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αν, όμως, το αποδεχτούμε, τότε από την ανισότητα $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ για κάθε x στο $[a, b]$ προκύπτει ότι $-\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ και, επομένως, $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Η ανισότητα της Πρότασης 7.11 ονομάζεται **τριγωνική ανισότητα** για ολοκληρώματα.

Παράδειγμα: Από την ανισότητα $|\sin x| \le 1$ για κάθε x έχουμε για οποιοδήποτε $x > 0$ ότι $\big|\int_0^x \sin t\,dt\big| \le \int_0^x |\sin t|\,dt \le x$. Επίσης, από την $|\sin x| \le |x|$ για κάθε x έχουμε $\big|\int_0^x \sin t\,dt\big| \le \int_0^x |\sin t|\,dt \le \int_0^x |t|\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$. Άρα $\big|\int_0^x \sin t\,dt\big| \le \min\big\{x, \frac{x^2}{2}\big\} = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & \text{αν } 0 < x \le 2, \\ x, & \text{αν } x \ge 2. \end{cases}$

E. Μέση τιμή συνάρτησης.

Είναι γνωστό ότι η *μέση τιμή* οποιωνδήποτε αριθμών $y_1, y_2, \dots, y_n$, όπου ο κάθε y_k εμφανίζεται ν_k φορές, είναι ο λόγος του συνολικού αθροίσματος των αριθμών προς το συνολικό πλήθος τους, δηλαδή ο αριθμός

$$\frac{\nu_1 y_1 + \cdots + \nu_n y_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n} = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\, y_1 + \cdots + \frac{\nu_n}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}\, y_n = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n,$$

όπου κάθε $\mu_k = \frac{\nu_k}{\nu_1 + \cdots + \nu_n}$ είναι η αναλογία του πλήθους του αντίστοιχου y_k προς το συνολικό πλήθος των $y_1, \dots, y_n$. Είναι, επίσης, γνωστό ότι ο αριθμός αυτός μπορεί να μην είναι ίσος με κανέναν από τους $y_1, \dots, y_n$ αλλά ότι είναι (ως προς το μέγεθος) ανάμεσα στον μικρότερο και στον μεγαλύτερο από τους $y_1, \dots, y_n$.

Υπάρχει μια ανάλογη έννοια μέσης τιμής για συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ και οποιοδήποτε σύνολο $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Θεωρούμε, επίσης, και τις αντίστοιχες τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ της συνάρτησης σε όλα τα ενδιάμεσα σημεία. Αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, δηλαδή αν κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι αρκετά μικρό, τότε τα σημεία x κάθε τέτοιου υποδιαστήματος είναι πολύ κοντά στο αντίστοιχο ξ_k, οπότε *είναι εύλογο να δεχτούμε ότι κάθε τιμή $f(\xi_k)$ «εκπροσωπεί» τις τιμές $f(x)$ για x στο αντίστοιχο* $[x_{k-1}, x_k]$ και, επομένως, *οι τιμές $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ «εκπροσωπούν» όλες τις τιμές της συνάρτησης*. Πρέπει, φυσικά, να σκεφτούμε ότι αν κάποιο $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μεγαλύτερο μήκος από κάποιο άλλο $[x_{l-1}, x_l]$, τότε η τιμή $f(\xi_k)$ «εκπροσωπεί» περισσότερες τιμές της συνάρτησης από όσες «εκπροσωπεί» η τιμή $f(\xi_l)$. Θα δεχτούμε, λοιπόν, ότι η αναλογία του συνόλου των τιμών $f(x)$ που «εκπροσωπούνται» από οποιαδήποτε τιμή $f(\xi_k)$ προς το σύνολο όλων των τιμών της συνάρτησης είναι ίδια με την αναλογία $\mu_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ του μήκους του αντίστοιχου $[x_{k-1}, x_k]$ προς το συνολικό μήκος $b - a$. Επομένως, αν θέλουμε να εισαγάγουμε την έννοια της μέσης τιμής *όλων* των τιμών της $y = f(x)$, μια καλή ιδέα είναι να θεωρήσουμε τη μέση τιμή

$$\frac{x_1 - x_0}{b - a} f(\xi_1) + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{b - a} f(\xi_n)$$

των «αντιπροσωπευτικών» τιμών $f(\xi_1), \dots, f(\xi_n)$ και να δούμε μήπως αυτή η μέση τιμή πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά κάποιον αριθμό αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό. Όμως, αυτή η μέση τιμή είναι, προφανώς, ίση με

$$\frac{1}{b - a}\, \Sigma(f; a, b; \Delta; \Xi).$$

και, επομένως, θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά τον αριθμό $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$ αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό.

Όταν, λοιπόν, η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, ορίζουμε τη **μέση τιμή** της **στο** $[a, b]$ ως τον αριθμό

$$\boxed{\text{μέση τιμή της } y = f(x) \text{ στο } [a, b] = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx.}$$

Αν η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a,b]$ είναι ο αριθμός ρ, τότε $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\rho = \int_a^b \rho\,dx$ και βλέπουμε ότι:

Η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a,b]$ είναι εκείνη η τιμή που οφείλει να έχει μια *σταθερή συνάρτηση* στο $[a,b]$ ώστε το ολοκλήρωμά της να είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$.

Ας δούμε ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της μέσης τιμής μιας συνάρτησης. Έστω $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a,b]$ και έστω A η επιφάνεια ανάμεσα στο γράφημα της $y = f(x)$ και στο διάστημα $[a,b]$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να πούμε ότι η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[a,b]$ είναι ο λόγος του εμβαδού της A προς το μήκος του $[a,b]$ ή, με άλλα λόγια, *το ύψος που πρέπει να έχει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με βάση το $[a,b]$ ώστε να έχει το ίδιο εμβαδό με την A.*

Παράδειγμα: Η μέση τιμή αριθμών είναι ειδική περίπτωση μέσης τιμής συνάρτησης. Πράγματι, ας πάρουμε τους $y_1, \ldots, y_n$ με αντίστοιχες αναλογίες $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Ορίζουμε τους αριθμούς $x_0 = 0$, $x_1 = \mu_1$, $x_2 = \mu_1 + \mu_2$, $\ldots$, $x_{n-1} = \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1}$ και $x_n = \mu_1 + \cdots + \mu_{n-1} + \mu_n = 1$ και, τέλος, ορίζουμε τη συνάρτηση $y = f(x)$ κατά τμήματα σταθερή στο διάστημα $[0,1]$ η οποία είναι σταθερή y_1 στο $[x_0 = 0, x_1)$, σταθερή y_2 στο $[x_1, x_2)$, $\ldots$, σταθερή y_n στο $[x_{n-1}, x_n = 1]$. Η μέση τιμή της $y = f(x)$ στο $[0,1]$ είναι ίση με τον αριθμό $\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + \cdots + y_n(x_n - x_{n-1}) = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \cdots + \mu_n y_n$.

Από την Πρόταση 7.10 συνεπάγεται ότι η μέση τιμή μιας συνάρτησης είναι ανάμεσα σε οποιοδήποτε κάτω φράγμα και σε οποιοδήποτε άνω φράγμα της. Ειδικότερα, αν η συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, τότε η μέση τιμή της είναι ανάμεσα στην ελάχιστη και στη μέγιστη τιμή της. Αν, ακόμη ειδικότερα, η συνάρτηση είναι συνεχής, τότε έχουμε το εξής πιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.4 ***Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού.*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$. Τότε υπάρχει κάποιος ξ στο $[a,b]$ ώστε*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi).$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Μέγιστης - Ελάχιστης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχουν x_1 και x_2 στο $[a,b]$ ώστε να ισχύει $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε x στο $[a,b]$. Τότε $(b-a)f(x_1) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)f(x_2)$, οπότε ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ανάμεσα στη μέγιστη και στην ελάχιστη τιμή της $y = f(x)$. Άρα από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[a,b]$ ώστε ο αριθμός αυτός να είναι ίσος με την τιμή $f(\xi)$.

Παραδείγματα: (1) Η $y = x^2$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Ο ξ στο $[0,1]$ για τον οποίο ισχύει $\xi^2 = \frac{1}{3}$ είναι ο $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(2) Αν η $y = f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $[a,b]$, μπορεί η μέση τιμή της στο $[a,b]$ να μην είναι ίση με καμιά τιμή της. Η μέση τιμή της $y = \begin{cases} -1, & \text{αν } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$

στο διάστημα $[-1,1]$ είναι $\frac{1}{1-(-1)}\big(\int_{-1}^{0}(-1)\,dx+\int_{0}^{1}1\,dx\big)=0$, αλλά καμιά τιμή της συνάρτησης στο διάστημα $[-1,1]$ δεν είναι 0.

Ασκήσεις.

A. Αλγεβρικές πράξεις με ολοκληρώματα.

1. Χρησιμοποιώντας και τα αποτελέσματα των ασκήσεων 1, 2 και 3 της ενότητας 7.2, υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

$$\int_{-1}^{2}(2-3x+4x^2)\,dx,\quad \int_{-2}^{4}(3x-2^x)\,dx,\quad \int_{\pi}^{2\pi}(3\cos x-2\sin x)\,dx,$$

$$\int_{0}^{\pi}(3x-2\sin x)\,dx,\quad \int_{1}^{3}\Big(\frac{2}{x}-x^2+x^{\sqrt{2}}+3e^x\Big)\,dx.$$

B. Ισότητα ολοκληρωμάτων και γειτονικά διαστήματα.

1. Υπολογίστε το $\int_1^2 f(x)\,dx$ της $y=f(x)=\begin{cases}1+3x^2\,, & \text{αν } 1<x<2,\\ 0, & \text{αν } x=1,\\ -2, & \text{αν } x=2.\end{cases}$

2. Υπολογίστε το $\int_{-1}^5 f(x)\,dx$ της $y=f(x)=\begin{cases}x^2\,, & \text{αν } -1\le x<0,\\ 2x, & \text{αν } 0\le x\le 2,\\ x+2, & \text{αν } 2<x\le 5.\end{cases}$

3. Υπολογίστε το $\int_{-2}^{\frac{7}{2}}[x]\,dx$.

   (Υπόδειξη: Ολοκλήρωμα κατά τμήματα σταθερής συνάρτησης.)

4. Αποδείξτε με γεωμετρικό τρόπο αλλά και με μαθηματικό τρόπο ότι

   (i) $\int_k^{k+1}\big(x-[x]-\frac{1}{2}\big)\,dx=0$ για κάθε ακέραιο k,

   (ii) $\int_k^{k+\frac{1}{2}}\big(x-[x]-\frac{1}{2}\big)\,dx=-\frac{1}{8}$ και $\int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\big(x-[x]-\frac{1}{2}\big)\,dx=\frac{1}{8}$ για κάθε ακέραιο k,

   (*) (iii) $-\frac{1}{8}\le\int_a^b\big(x-[x]-\frac{1}{2}\big)\,dx\le\frac{1}{8}$ για κάθε a,b με $a<b$.

   (Υπόδειξη: Ο a είναι ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς ακεραίους και το ίδιο ισχύει για τον b.)

Γ. Σύγκριση ολοκληρωμάτων.

1. Αποδείξτε ότι $xe^{-2x}\le\int_x^{2x}e^{-t}\,dt\le xe^{-x}$ για κάθε $x>0$, χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

2. Αποδείξτε ότι $3e^{-2}\le\int_{\frac{1}{2}}^{2}xe^{-x}\,dx\le\frac{3}{2}e^{-1}$, χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

3. Αποδείξτε ότι $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4x}{3}$ για κάθε x στο διάστημα $[0,1]$ καθώς και ότι $0 \leq \frac{x}{1-x+x^2} \leq \frac{4}{3x}$ για κάθε x στο διάστημα $[1,+\infty)$.

   Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, να συμπεράνετε ότι

   (i) $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2x^2}{3}$ για κάθε x στο $[0,1]$,

   (ii) $0 \leq \int_0^x \frac{t}{1-t+t^2}\,dt \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\log x$ για κάθε x στο $[1,+\infty)$.

4. Χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα, αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό n είναι

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^{n+1}\,dx \leq \int_0^{\pi} (\sin x)^n\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{n+1}\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n\,dx.$$

5. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt, \quad \lim_{x\to 0+} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x}\int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

   (Υπόδειξη: Υπολογίστε τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές της $y = \frac{t}{1+t^2}$ στα αντίστοιχα διαστήματα.)

6. (*) Έστω $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ για κάθε x_1, x_2 στο $[0,1]$. Δηλαδή, η $y = f(x)$ είναι Lipschitz-συνεχής στο $[a,b]$ (για τον ορισμό δείτε την άσκηση Α8 της ενότητας 6.9).

   (i) Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(b)\big| \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$ για κάθε υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$.

   (Υπόδειξη: Είναι $(b-a)f(b) = \int_a^b f(b)\,dx$.)

   (ii) Αποδείξτε ότι

$$\Big|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leq \frac{M}{2n}$$

   για κάθε φυσικό n.

   (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το (i) στα υποδιαστήματα $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ για $k = 1, \ldots, n$.)

7. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \int_c^d f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a,b]$.

8. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{n}$ και, επομένως, $\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$ για κάθε φυσικό n.

   Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) με $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \log n$ για κάθε n είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα τον 0 και, επομένως, ότι συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Το όριο της ακολουθίας αυτής συμβολίζεται

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\Big)$$

   και ονομάζεται **σταθερά του Euler**.

9. $^{(*)}$ Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.

Αποδείξτε ότι για κάθε t, s ισχύει $t^2 \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx + 2ts \int_a^b f(x)g(x)\, dx + s^2 \int_a^b \big(g(x)\big)^2\, dx = \int_a^b \big(tf(x) + sg(x)\big)^2\, dx \geq 0$.

Με βάση αυτό αποδείξτε την *πολύ σημαντική* **ανισότητα του Schwarz**:

$$\Big(\int_a^b f(x)g(x)\, dx\Big)^2 \leq \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx \int_a^b \big(g(x)\big)^2\, dx.$$

(Υπόδειξη: Αποδείξτε με αλγεβρικό τρόπο ότι, αν είναι $At^2 + 2Bts + Cs^2 \geq 0$ για κάθε t, s, τότε είναι $B^2 \leq AC$.)

10. $^{(*)}$ Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$.

Αποδείξτε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_a^b \Big(\int_a^b \big(f(y) - f(x)\big)\big(g(y) - g(x)\big)\, dy\Big)\, dx \\ = (b - a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx.\end{aligned}$$

Αν οι δυο συναρτήσεις είναι είτε και οι δυο αύξουσες είτε και οι δυο φθίνουσες στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx \leq (b - a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx$.

Αν η μια συνάρτηση είναι αύξουσα στο $[a, b]$ και η άλλη φθίνουσα στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b g(x)\, dx \geq (b - a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx$.

(Υπόδειξη: Μελετήστε το πρόσημο του $\big(f(y) - f(x)\big)\big(g(y) - g(x)\big)$ ανάλογα με την περίπτωση.)

Δ. Μέση τιμή συνάρτησης.

1. Υπολογίστε τη μέση τιμή των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.

   (i) $y = x$ στα $[-1, 1]$ και $[0, 1]$.

   (ii) $y = x^2$ στο $[-1, 1]$.

   (iii) $y = \sin x$ στα $[0, \pi]$, $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $[0, 2\pi]$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της άσκησης 3 της προηγούμενης ενότητας.

2. $^{(*)}$ **Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού**. Αν οι $y = f(x)$ και $y = w(x)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και $w(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$ ώστε να είναι

$$\int_a^b f(x)w(x)\, dx = f(\xi)\int_a^b w(x)\, dx.$$

Αυτό αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 7.4 – με σταθερή $w(x) = 1$ – και αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Σ' αυτό το πλαίσιο, η $y = w(x)$ χαρακτηρίζεται **συνάρτηση βάρους**, το $\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ ονομάζεται **ολοκλήρωμα της** $y = f(x)$ **με συνάρτηση βάρους την** $y = w(x)$ και, αν είναι $\int_a^b w(x)\,dx > 0$, ο αριθμός $\frac{1}{\int_a^b w(x)\,dx}\int_a^b f(x)w(x)\,dx$ ονομάζεται **μέση τιμή της** $y = f(x)$ **με συνάρτηση βάρους την** $y = w(x)$.

3. $^{(**)}$ Έστω ότι η $z = f(y)$ είναι *κυρτή* και συνεχής στο διάστημα I, ότι η $y = g(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ότι ο $g(x)$ ανήκει στο I για κάθε x στο $[a,b]$ – δηλαδή, ότι ορίζεται η $z = f\big(g(x)\big)$ στο $[a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$f\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\big(g(x)\big)\,dx.$$

(Υπόδειξη: Πάρτε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ του $[a,b]$ και συλλογή $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Από την άσκηση ΣΤ5 της ενότητας 6.10 εφαρμόστε την $f(\mu_1 y_1 + \cdots + \mu_n y_n) \leq \mu_1 f(y_1) + \cdots + \mu_n f(y_n)$ με $\mu_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$ και $y_k = g(\xi_k)$. Παρατηρήστε ότι ο αριθμός $\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$ ανήκει στο I. Τέλος, πάρτε όριο όταν το πλάτος της Δ τείνει στον 0.)

Αποδείξτε τις ανισότητες:

(*i*) $e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{g(x)}\,dx$,

(*ii*) $\log\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\big) \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \log g(x)\,dx$ αν είναι $g(x) > 0$ στο $[a,b]$,

(*iii*) $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\big)^\alpha \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(g(x)\big)^\alpha\,dx$ αν είναι $g(x) > 0$ στο $[a,b]$ και $\alpha \geq 1$ ή $\alpha \leq 0$,

(*iii*) $\big(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\big)^\alpha \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \big(g(x)\big)^\alpha\,dx$ αν είναι $g(x) > 0$ στο $[a,b]$ και $0 \leq \alpha \leq 1$.

7.4 Εφαρμογές ολοκληρωμάτων Riemann.

Α. Υπολογισμός μάζας.

Η *γραμμική πυκνότητα* μιας ευθύγραμμης ράβδου – υποθέτοντας ότι σε κάθε σημείο της το πάχος της είναι αμελητέο – φτιαγμένης από ομοιογενές υλικό ορίζεται ως ο λόγος $d = \frac{m}{l}$, όπου m είναι η μάζα της ράβδου και l το μήκος της.

Αν η ράβδος είναι φτιαγμένη από ανομοιογενές υλικό, τότε ο $d = \frac{m}{l}$ είναι η *μέση γραμμική πυκνότητα* της ράβδου. Αν πάρουμε οποιοδήποτε σημείο Α της ράβδου και κάποιο πολύ κοντινό του σημείο Β και μετρήσουμε τη μέση γραμμική πυκνότητα του μέρους της ράβδου ανάμεσα στα Α και Β, τότε η *σημειακή γραμμική πυκνότητα* στο σημείο Α είναι το όριο αυτής της μέσης γραμμικής πυκνότητας καθώς το Β πλησιάζει το Α. Φυσικά, αν το υλικό της ράβδου είναι ομοιογενές, τότε η σημειακή γραμμική πυκνότητα είναι ίδια σε κάθε σημείο της και ίση με τη μέση γραμμική πυκνότητά της.

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τη μάζα m μιας ευθύγραμμης ράβδου αν το υλικό της είναι ανομοιογενές και αν γνωρίζουμε τη σημειακή γραμμική πυκνότητά της σε κάθε σημείο της.

Επιλέγοντας την ευθεία της ράβδου ως x-άξονα, ταυτίζουμε τη ράβδο με κάποιο διάστημα $[a, b]$. Αν $d(x)$ είναι η γραμμική πυκνότητα σε κάθε σημείο x της ράβδου $[a, b]$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $y = d(x)$ στο διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι η $y = d(x)$ δεν παρουσιάζει απότομες αλλαγές σε κοντινά σημεία x ή, με άλλα λόγια, ότι είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Εφαρμόζουμε και πάλι τη μέθοδο των διαμερίσεων. Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος. Συμβολίζουμε m_k τη μάζα του υποδιαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$, οπότε

$$m = m_1 + \cdots + m_n .$$

Επειδή η $y = d(x)$ είναι συνεχής, καθώς ο x διατρέχει οποιοδήποτε από τα μικρά υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, οι διακυμάνσεις της $y = d(x)$ είναι αμελητέες ή, με άλλα λόγια, είναι *περίπου σταθερή*. Μάλιστα, όσο πιο μικρό είναι το πλάτος της Δ τόσο πιο μικρές είναι οι διακυμάνσεις της $y = d(x)$ σε κάθε υποδιάστημα. Επομένως, αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε ενδιάμεσο σημείο ξ_k στο $[x_{k-1}, x_k]$, τότε οι τιμές της $d(x)$ είναι *περίπου ίσες* με την $d(\xi_k)$, οπότε η μάζα m_k είναι *περίπου ίση* με τη μάζα $\widetilde{m_k} = d(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ που θα είχε το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ αν το υλικό του ήταν ομοιογενές σταθερής σημειακής γραμμικής πυκνότητας $d(\xi_k)$. Συμβολικά:

$$m_k \approx \widetilde{m_k} = d(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Επομένως, και η συνολική μάζα $m = m_1 + \cdots + m_n$ είναι περίπου ίση με την $\widetilde{m} = \widetilde{m_1} + \cdots + \widetilde{m_n} = d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ ή, συμβολικά,

$$m \approx \widetilde{m} = d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, τότε καθένα από τα $|m_k - \widetilde{m_k}|$ και, επομένως, και το συνολικό σφάλμα $|m - \widetilde{m}|$ είναι όσο θέλουμε μικρό. Αυτό σημαίνει ότι το άθροισμα Riemann $\Sigma(d; a, b; \Delta, \Xi) = d(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + d(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ είναι όσο θέλουμε κοντά στην m αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, οπότε

$$\boxed{m = \int_a^b d(x)\, dx.}$$

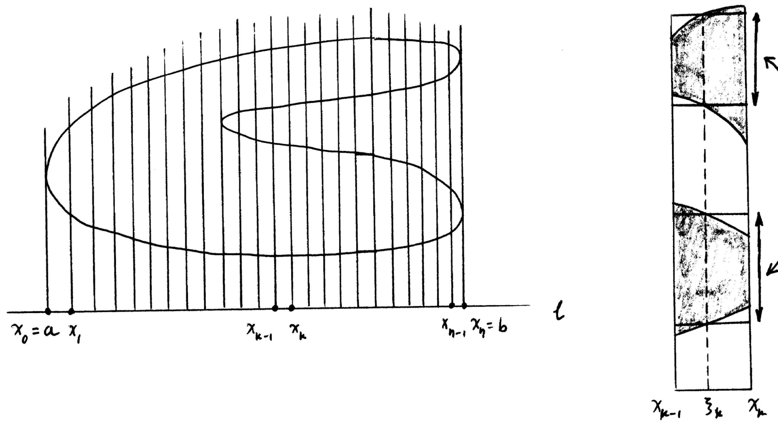
Δηλαδή,

Η μάζα μιας ευθύγραμμης ράβδου ισούται με το ολοκλήρωμα της σημειακής γραμμικής πυκνότητάς της.

Β. Υπολογισμός γενικότερων εμβαδών.

Θεωρούμε μια φραγμένη επίπεδη επιφάνεια A με σχετικά ομαλό σύνορο και θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό της, E. Θα γνωρίσουμε μερικές πολύ χρήσιμες μεθόδους, όλες παραλλαγές της λεγόμενης **μεθόδου των διατομών**.

(i). **Η μέθοδος των παράλληλων διατομών**. Ως x-άξονα θεωρούμε μια οποιαδήποτε ευθεία l στο ίδιο επίπεδο με την επιφάνεια A. Σε κάθε σημείο x της l φτιάχνουμε την κάθετη προς αυτήν ευθεία l_x (πάνω στο ίδιο επίπεδο), θεωρούμε την τομή $A^{(x)}$ της A με την l_x και την ονομάζουμε **διατομή της** A **κάθετη προς την ευθεία** l. Αν το σύνορο της A δεν είναι αρκετά ακανόνιστο, η $A^{(x)}$ αποτελείται από ένα ή περισσότερα ευθύγραμμα τμήματα και συμβολίζουμε $l(x)$ το συνολικό μήκος της, δηλαδή το άθροισμα των μηκών αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων. Επειδή η επιφάνεια A είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο διάστημα $[a,b]$ της l ώστε, αν ο x είναι εκτός του $[a,b]$, τότε η αντίστοιχη διατομή $A^{(x)}$ είναι κενή και, επομένως, $l(x)=0$. Θα δούμε τώρα πώς υπολογίζεται το εμβαδό E αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση $y=l(x)$ στο $[a,b]$.



Σχήμα 7.5: Παράλληλες διατομές.

Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a,b]$ με αρκετά μικρό πλάτος. Συμβολίζουμε A_k το μέρος της A το οποίο περιέχεται ανάμεσα στις ευθείες $l_{x_{k-1}}$ και l_{x_k} και συμβολίζουμε E_k το εμβαδό της A_k. Προφανώς, η A ισούται με την ένωση των επιφανειών $A_1, \dots, A_n$, οπότε

$$E = E_1 + \cdots + E_n .$$

Επιλέγουμε σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ ένα ενδιάμεσο σημείο ξ_k και θεωρούμε την αντίστοιχη διατομή $A^{(\xi_k)}$ και τα ευθύγραμμα τμήματα που την αποτελούν. Από κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα φτιάχνουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τις δυο του πλευρές να ανήκουν στις ευθείες $l_{x_{k-1}}$ και l_{x_k} και τις άλλες δυο του πλευρές να διέρχονται από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος. Επειδή το $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό, η επιφάνεια A_k είναι *περίπου ίση* με την ένωση $\widetilde{A_k}$ αυτών των ορθογώνιων παραλληλογράμμων που φτιάξαμε από τα ευθύγραμμα τμήματα της διατομής $A^{(\xi_k)}$. Καθένα από αυτά τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα έχει βάση μήκους $x_k - x_{k-1}$ και το άθροισμα των υψών τους είναι ίσο με $l(\xi_k)$, οπότε το εμβαδό $\widetilde{E_k}$ της $\widetilde{A_k}$ είναι ίσο με $l(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Τώρα το εμβαδό E_k της A_k είναι *περίπου* *ίσο* με το εμβαδό $\widetilde{E_k}$ της $\widetilde{A_k}$, δηλαδή:

$$E_k \approx \widetilde{E_k} = l(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Επομένως, και το συνολικό εμβαδό $E = E_1 + \cdots + E_n$ είναι *περίπου ίσο* με το $\widetilde{E} = \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n} = l(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + l(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ ή, συμβολικά,

$$E \approx \widetilde{E} = l(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + l(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, τότε καθένα από τα $\big|E_k - \widetilde{E_k}\big|$ και, επομένως, και το συνολικό σφάλμα $\big|E - \widetilde{E}\big|$ θα είναι όσο μικρό θέλουμε. Άρα το άθροισμα Riemann $\Sigma(l; a, b; \Delta, \Xi) = l(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + l(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ θα είναι όσο θέλουμε κοντά στο E αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό, οπότε

$$\boxed{E = \int_a^b l(x)\, dx.}$$

Αυτό το αποτέλεσμα αναφέρεται ως εξής:

Το εμβαδό μιας φραγμένης επίπεδης επιφάνειας είναι ίσο με το ολοκλήρωμα των μηκών των διατομών της που είναι όλες κάθετες στην ίδια ευθεία.

Παραδείγματα: (1) Θα υπολογίσουμε το εμβαδό τραπεζίου με ύψος h, του οποίου οι παράλληλες βάσεις έχουν μήκη a και b. Ως x-άξονα θεωρούμε μια ευθεία l κάθετη στις παράλληλες πλευρές του τραπεζίου και επιλέγουμε το σημείο 0 της l να είναι το σημείο τομής της με την ευθεία της βάσης μήκους a του τραπεζίου και το σημείο h της l να είναι το σημείο τομής της με την ευθεία της βάσης μήκους b του τραπεζίου. Αν ο x είναι εκτός του $[0, h]$, η αντίστοιχη διατομή του τραπεζίου είναι κενή ενώ για κάθε x στο $[0, h]$ το μήκος $l(x)$ της αντίστοιχης διατομής δίνεται από τον τύπο $l(x) = \frac{b-a}{h}x + a$. Άρα το εμβαδό του τραπεζίου είναι ίσο με $\int_0^h l(x)\, dx = \int_0^h (\frac{b-a}{h}x + a)\, dx = \frac{b-a}{h}\int_0^h x\, dx + a\int_0^h 1\, dx = \frac{b-a}{h}\frac{h^2}{2} + ah = \frac{b+a}{2}h$. Αυτός είναι γνωστός τύπος και περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις τους τύπους των εμβαδών τριγώνου και παραλληλογράμμου.

(2) Παίρνουμε οποιονδήποτε κυκλικό δίσκο ακτίνας $r > 0$ και ως x-άξονα θεωρούμε ευθεία l η οποία διέρχεται από το κέντρο του δίσκου. Επιλέγουμε το σημείο 0 της l να είναι το κέντρο του δίσκου, οπότε το μήκος $l(x)$ της διατομής του δίσκου που είναι κάθετη στην l στο σημείο x είναι ίσο με $2\sqrt{r^2 - x^2}$ για κάθε x στο διάστημα $[-r, r]$ και ίσο με 0 για κάθε x εκτός του $[-r, r]$. Άρα το εμβαδό του δίσκου είναι ίσο με το $2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό θα υπολογισθεί στο επόμενο κεφάλαιο! Η τιμή του είναι πr^2, όπως καλά γνωρίζουμε.

Πάντως, ανεξάρτητα από τη μέθοδο των παράλληλων διατομών, το εμβαδό του κυκλικού δίσκου θα υπολογισθεί σε λίγο με την επόμενη μέθοδο που θα εξετάσουμε.

Ας δούμε και μια χρήσιμη ειδική περίπτωση. Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδό της επιφάνειας A η οποία περιέχεται ανάμεσα στα γραφήματα των συναρτήσεων αυτών, στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(a, f(a))$ και $(a, g(a))$ και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(b, f(b))$ και $(b, g(b))$. Τότε για κάθε x στο $[a, b]$ η διατομή $A^{(x)}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$, του οποίου το μήκος είναι $l(x) = |g(x) - f(x)|$, ενώ για κάθε x εκτός του $[a, b]$ η διατομή $A^{(x)}$ είναι κενή. Άρα το εμβαδό της A είναι

$$\boxed{E = \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx.}$$

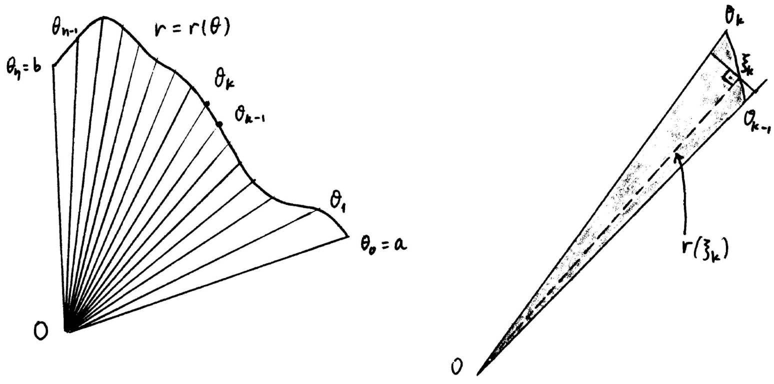
Παράδειγμα: Το εμβαδό της επιφάνειας η οποία περιέχεται ανάμεσα στις καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$, στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(-1, -1)$ και $(-1, 1)$ και στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(3, 3)$ και $(3, 9)$ είναι ίσο με $\int_{-1}^3 |x^2 - x|\, dx$. Μελετώντας το πρόσημο της παράστασης $x^2 - x = x(x - 1)$, υπολογίζουμε: $\int_{-1}^3 |x^2 - x|\, dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x)\, dx + \int_0^1 (x - x^2)\, dx + \int_1^3 (x^2 - x)\, dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{16}{3} = \frac{19}{3}$.

(ii). **Η μέθοδος των ακτινικών διατομών**. Θεωρούμε ένα σημείο Ο στο επίπεδο καθώς και όλες τις ημιευθείες με κορυφή το Ο, τις οποίες παραμετρικοποιούμε βάσει της γωνίας τους. Δηλαδή ονομάζουμε κατ' αρχήν s_0 μια οποιαδήποτε από τις ημιευθείες με κορυφή το Ο και, για κάθε θ στο $[0, 2\pi]$, ονομάζουμε s_θ την ημιευθεία με κορυφή το Ο η οποία σχηματίζει γωνία μέτρου θ με την s_0. Φυσικά, η $s_{2\pi}$ είναι η ίδια με την s_0 και, καθώς ο θ αυξάνει από 0 σε 2π, η s_θ περιστρέφεται, με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, από την s_0 στην $s_{2\pi}$. Τώρα για κάθε θ σε κάποιο υποδιάστημα $[a, b]$ του $[0, 2\pi]$ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $A^{(\theta)}$ επί της s_θ με ένα άκρο το Ο και μήκος $r(\theta)$. Η συνάρτηση $r = r(\theta)$ είναι (για απλούστευση) συνεχής στο $[a, b]$ και, φυσικά, υποθέτουμε ότι $r(\theta) \geq 0$ για κάθε θ. Το σύνολο αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων $A^{(\theta)}$ σχηματίζει μια επίπεδη επιφάνεια A η οποία περιέχεται στη γωνία που σχηματίζουν οι ημιευθείες s_a και s_b. Για κάθε θ στο $[a, b]$ το αντίστοιχο ευθύγραμμο τμήμα $A^{(\theta)}$, δηλαδή η τομή της A με την ημιευθεία s_θ, ονομάζεται **ακτινική διατομή της A κέντρου Ο**. Κάθε επιφάνεια A που κατασκευάζεται με αυτόν τον τρόπο χαρακτηρίζεται **ακτινική επιφάνεια κέντρου Ο** και η αντίστοιχη συνάρτηση $r = r(\theta)$ ονομάζεται **ακτινική συνάρτηση** της A.

Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{\theta_0 = a, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_n = b\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος. Για κάθε υποδιάστημα $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ συμβολίζουμε A_k το μέρος της A το οποίο περιέχεται ανάμεσα στις ημιευθείες $s_{\theta_{k-1}}$ και s_{θ_k}, οπότε η A είναι η ένωση των $A_1, \ldots, A_n$ και, αν συμβολίσουμε E_k το εμβαδό της επιφάνειας A_k, έχουμε

$$E = E_1 + \cdots + E_n.$$

Επιλέγουμε σε κάθε $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ έναν ενδιάμεσο ξ_k και φτιάχνουμε το τρίγωνο $\widetilde{A_k}$ με κορυφή το Ο, του οποίου οι δυο πλευρές είναι πάνω στις ημιευθείες $s_{\theta_{k-1}}$ και s_{θ_k} και η τρίτη πλευρά είναι κάθετη στην ημιευθεία s_{ξ_k} σε απόσταση $r(\xi_k)$ από το Ο. Επειδή το υποδιάστημα $[\theta_{k-1}, \theta_k]$ είναι πολύ μικρό, η επιφάνεια A_k είναι *περίπου ίση* με το τρίγωνο $\widetilde{A_k}$, οπότε το εμβαδό E_k της A_k είναι *περίπου ίσο* με το



Σχήμα 7.6: Ακτινικές διατομές.

εμβαδό $\widetilde{E_k}$ του τριγώνου $\widetilde{A_k}$. Όμως, το $\widetilde{E_k}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2}(r(\xi_k))^2\big(\tan(\theta_k-\xi_k)+\tan(\xi_k-\theta_{k-1})\big)\approx\frac{1}{2}(r(\xi_k))^2\big((\theta_k-\xi_k)+(\xi_k-\theta_{k-1})\big)$. Η τελευταία προσεγγιστική ισότητα ισχύει διότι οι διαφορές $\theta_k-\xi_k$ και $\xi_k-\theta_{k-1}$ είναι *περίπου ίσες* με 0. Άρα

$$E_k\approx\frac{1}{2}(r(\xi_k))^2\big((\theta_k-\xi_k)+(\xi_k-\theta_{k-1})\big)=\frac{1}{2}(r(\xi_k))^2(\theta_k-\theta_{k-1}).$$

Αυτό ισχύει για κάθε $k=1,\dots,n$, οπότε

$$E\approx\frac{1}{2}(r(\xi_1))^2(\theta_1-\theta_0)+\cdots+\frac{1}{2}(r(\xi_n))^2(\theta_n-\theta_{n-1}).$$

Άρα το άθροισμα Riemann $\Sigma\big(\frac{1}{2}r^2;a,b;\Delta;\Xi\big)$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το εμβαδό E της A αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό, οπότε

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\int_a^b(r(\theta))^2\,d\theta.}$$

Επομένως:

Το εμβαδό μιας ακτινικής επιφάνειας ισούται με το μισό του ολοκληρώματος του τετραγώνου της ακτινικής της συνάρτησης.

Παραδείγματα: (1) Ένας κυκλικός δίσκος κέντρου Ο και ακτίνας $r>0$ είναι ακτινική επιφάνεια κέντρου Ο. Η ακτινική συνάρτηση είναι σταθερή: $r(\theta)=r$ για κάθε θ στο $[0,2\pi]$. Άρα το εμβαδό του δίσκου είναι ίσο με $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\,d\theta=\pi r^2$.

(2) Ένας κυκλικός τομέας με κορυφή Ο, ακτίνα $r>0$ και γωνία κορυφής Θ (στο $[0,2\pi]$) είναι ακτινική επιφάνεια κέντρου Ο. Η ακτινική συνάρτηση είναι σταθερή $r(\theta)=r$ στο διάστημα $[0,\Theta]$ και σταθερή $r(\theta)=0$ εκτός του $[0,\Theta]$. Άρα το

εμβαδό του τομέα είναι ίσο με $\frac{1}{2}\int_0^{\Theta} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}r^2\Theta$.

(3) Ένας κυκλικός δακτύλιος εσωτερικής ακτίνας $r_1 \geq 0$ και εξωτερικής ακτίνας r_2 (με $r_2 > r_1$) δεν είναι ακτινική επιφάνεια. Είναι, όμως, η διαφορά δύο κυκλικών δίσκων και το εμβαδό του είναι ίσο με $\pi {r_2}^2 - \pi {r_1}^2 = \pi({r_2}^2 - {r_1}^2)$.

Ομοίως, ένας *τομέας κυκλικού δακτυλίου* εσωτερικής ακτίνας r_1, εξωτερικής ακτίνας r_2 και γωνίας κορυφής Θ είναι η διαφορά δυο κυκλικών τομέων, οπότε το εμβαδό του είναι ίσο με $\frac{1}{2}{r_2}^2\Theta - \frac{1}{2}{r_1}^2\Theta = \frac{1}{2}({r_2}^2 - {r_1}^2)\Theta$.

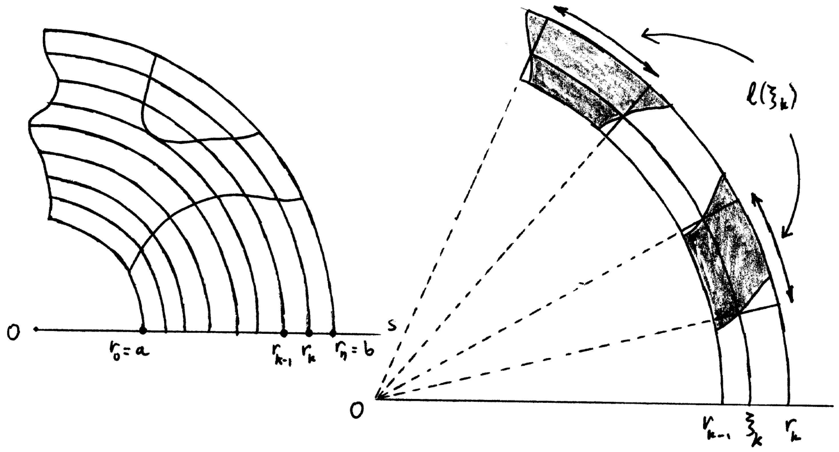
(4) Έστω $0 \leq \lambda < \mu$. Το εμβαδό της «κοχλιωτής» επιφάνειας που περιέχεται ανάμεσα στην καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = \lambda\theta\cos\theta$, $y = y(\theta) = \lambda\theta\sin\theta$ όταν ο θ διατρέχει το $[0, 2\pi]$, στην καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = \mu\theta\cos\theta$, $y = y(\theta) = \mu\theta\sin\theta$ όταν ο θ διατρέχει και πάλι το $[0, 2\pi]$ και στο ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(\lambda 2\pi, 0)$ και $(\mu 2\pi, 0)$ είναι ίσο με τη διαφορά $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mu^2\theta^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \lambda^2\theta^2\,d\theta = \frac{4\pi^3}{3}(\mu^2 - \lambda^2)$.

(iii). **Η μέθοδος των κυκλικών διατομών**. Θεωρούμε μια φραγμένη επίπεδη επιφάνεια A και στο επίπεδό της ένα σημείο O. Για κάθε $r \geq 0$ φέρνουμε τον κύκλο C_r με κέντρο το O και ακτίνα r. Συμβολίζουμε $A^{(r)}$ την τομή του κύκλου C_r με την A και την ονομάζουμε **κυκλική διατομή της A (με κέντρο O)**. Η $A^{(r)}$ αποτελείται από ένα ή περισσότερα τόξα του κύκλου C_r, των οποίων το συνολικό μήκος συμβολίζουμε $l(r)$. Επειδή η A είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο υποδιάστημα $[a, b]$ του $[0, +\infty)$ ώστε, αν ο r είναι εκτός του $[a, b]$, τότε η αντίστοιχη κυκλική διατομή $A^{(r)}$ είναι κενή και, επομένως, $l(r) = 0$.

Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{r_0 = a, r_1, \dots, r_{n-1}, r_n = b\}$ του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος και ονομάζουμε A_k την τομή της A με τον δακτύλιο που περιέχεται ανάμεσα στους κύκλους με κέντρο O και ακτίνες r_{k-1} και r_k. Αν συμβολίσουμε E_k το εμβαδό της A_k, τότε, προφανώς:

$$E = E_1 + \cdots + E_n\,.$$

Επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα $[r_{k-1}, r_k]$ ένα ενδιάμεσο σημείο ξ_k και θεωρούμε την αντίστοιχη κυκλική διατομή $A^{(\xi_k)}$. Από κάθε τόξο της διατομής αυτής φτιάχνουμε τον τομέα κυκλικού δακτυλίου με εσωτερική ακτίνα r_{k-1} και εξωτερική ακτίνα r_k, ο οποίος περιέχεται ανάμεσα στις δυο ημιευθείες με κορυφή το O που διέρχονται από τα άκρα του τόξου. Το εμβαδό αυτού του τομέα κυκλικού δακτυλίου είναι ίσο με $\frac{1}{2}({r_k}^2 - {r_{k-1}}^2)\theta$, αν θ είναι η γωνία του. Όμως, $\frac{1}{2}({r_k}^2 - {r_{k-1}}^2)\theta = \frac{r_k + r_{k-1}}{2}(r_k - r_{k-1})\theta \approx \xi_k(r_k - r_{k-1})\theta$, διότι και οι δυο ακτίνες r_k και r_{k-1} είναι *περίπου ίσες* με την ξ_k. Τώρα βλέπουμε ότι το μήκος l του τόξου από το οποίο φτιάχτηκε ο τομέας κυκλικού δακτυλίου είναι ίσο με $\xi_k\theta$, οπότε το εμβαδό του τομέα κυκλικού δακτυλίου είναι *περίπου ίσο* με $l \cdot (r_k - r_{k-1})$. Αν $\widetilde{A_k}$ είναι η ένωση αυτών των τομέων κυκλικού δακτυλίου που φτιάχνονται από τα τόξα της διατομής $A^{(\xi_k)}$, τότε το εμβαδό $\widetilde{E_k}$ της $\widetilde{A_k}$ είναι ίσο με το γινόμενο του αθροίσματος των μηκών των τόξων της διατομής $A^{(\xi_k)}$ επί το $r_k - r_{k-1}$ και, επομένως, ίσο με το $l(\xi_k)(r_k - r_{k-1})$. Επειδή το $[r_{k-1}, r_k]$ είναι αρκετά μικρό, η A_k είναι *περίπου ίση* με την $\widetilde{A_k}$, οπότε το εμβαδό E_k της A_k είναι *περίπου ίσο* με



Σχήμα 7.7: Κυκλικές διατομές.

το εμβαδόν $\widetilde{E_k}$ της $\widetilde{A_k}$. Δηλαδή:

$$E_k \approx \widetilde{E_k} \approx l(\xi_k)(r_k - r_{k-1}).$$

Αθροίζοντας:

$$E \approx l(\xi_1)(r_1 - r_0) + \cdots + l(\xi_n)(r_n - r_{n-1}).$$

Άρα το άθροισμα Riemann $\Sigma(l; a, b; \Delta; \Xi)$ θα πλησιάσει όσο θέλουμε κοντά το εμβαδό E αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό, οπότε

$$\boxed{E = \int_a^b l(r)\, dr.}$$

Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται ως εξής.

Το εμβαδό μιας φραγμένης επίπεδης επιφάνειας ισούται με το ολοκλήρωμα των μηκών των κυκλικών διατομών της (με το ίδιο κέντρο).

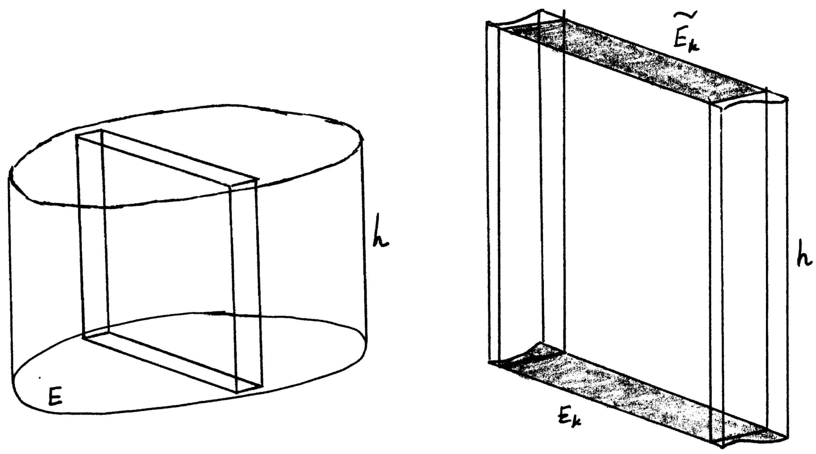
Παράδειγμα: Έστω $0 < \lambda < \mu$. Θα υπολογίσουμε το εμβαδό της «κοχλιωτής» επιφάνειας η οποία περιέχεται ανάμεσα στην καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(r) = r\cos(\lambda r)$, $y = y(r) = r\sin(\lambda r)$ όταν ο r διατρέχει το διάστημα $[0, \frac{2\pi}{\mu}]$, στην καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(r) = r\cos(\mu r)$, $y = y(r) = r\sin(\mu r)$ όταν ο r διατρέχει πάλι το διάστημα $[0, \frac{2\pi}{\mu}]$ και στο κυκλικό τόξο με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και άκρα τα σημεία $\big(\frac{2\pi}{\mu}cos(\lambda\frac{2\pi}{\mu}), \frac{2\pi}{\mu}\sin(\lambda\frac{2\pi}{\mu}\big)$ και $\big(\frac{2\pi}{\mu}, 0\big)$. Η κυκλική διατομή ακτίνας r της επιφάνειας αυτής αποτελείται από ένα τόξο μήκους $(\mu-\lambda)r$, οπότε το εμβαδό της επιφάνειας είναι ίσο με $\int_0^{\frac{2\pi}{\mu}} (\mu-\lambda)r\, dr = 2\pi^2\frac{\mu-\lambda}{\mu^2}$.

Γ. Υπολογισμός όγκων.

Θεωρούμε ένα φραγμένο στερεό σώμα B με σχετικά ομαλό σύνορο και θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του V. Θα εφαρμόσουμε και πάλι τη **μέθοδο των διατομών**.

(i). **Ορθά κυλινδρικά σώματα.** Θα εξετάσουμε πρώτα μια ειδική περίπτωση στερεού σώματος. Θεωρούμε μια φραγμένη επίπεδη επιφάνεια A εμβαδού E πάνω σε κάποιο επίπεδο L και φτιάχνουμε όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι κάθετα στο επίπεδο L, έχουν το ένα άκρο τους στην επιφάνεια A, έχουν το ίδιο μήκος h και είναι όλα στον ίδιο ημιχώρο από τους δυο ημιχώρους που ορίζονται από το επίπεδο L. Το στερεό σώμα B που σχηματίζεται από όλα αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα χαρακτηρίζεται **ορθό κυλινδρικό σώμα με βάση την επιφάνεια A και ύψος h**. Θα αποδείξουμε ότι ο όγκος V του B είναι ίσος με

$$V = Eh.$$



Σχήμα 7.8: Ορθό κυλινδρικό σώμα.

Παίρνουμε μια ευθεία l πάνω στο επίπεδο L και σε κάθε σημείο x της l φτιάχνουμε την ευθεία l_x πάνω στο επίπεδο L και κάθετη στην l στο σημείο x. Επειδή η επιφάνεια A είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιο διάστημα $[a, b]$ της l ώστε για κάθε x εκτός του $[a, b]$ η τομή της ευθείας l_x με την A να είναι κενή. Παίρνουμε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος και έστω A_k το μέρος της A που είναι ανάμεσα στις ευθείες $l_{x_{k-1}}$ και l_{x_k}. Αν ορίσουμε E_k να είναι το εμβαδόν της A_k, τότε, προφανώς:

$$E = E_1 + \cdots + E_n\,.$$

Αν συμβολίσουμε B_k το ορθό κυλινδρικό σώμα το οποίο φτιάχνεται από την A_k, όπως ακριβώς φτιάχτηκε το B από την A, τότε το B είναι ίσο με την ένωση των $B_1, \ldots, B_n$ και, αν συμβολίσουμε V_k τον όγκο του B_k, τότε:

$$V = V_1 + \cdots + V_n\,.$$

Επειδή κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό, καθεμιά από τις επιφάνειες A_k είναι *περίπου ίση* με την ένωση $\widetilde{A_k}$ ενός ή περισσοτέρων ορθογώνιων παραλληλογράμμων και, επομένως, καθένα από τα σώματα B_k είναι *περίπου ίσο* με την ένωση $\widetilde{B_k}$ ενός ή περισσοτέρων ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων. Μάλιστα, καθένα από τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα της $\widetilde{B_k}$ έχει ως βάση επί του L ένα από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα της $\widetilde{A_k}$ και ύψος h. Αν συμβολίσουμε $\widetilde{E_k}$ το εμβαδό του $\widetilde{A_k}$ και συμβολίσουμε $\widetilde{V_k}$ τον όγκο του $\widetilde{B_k}$, τότε:

$$V_k \approx \widetilde{V_k}\,, \quad E_k \approx \widetilde{E_k}\,, \quad \widetilde{V_k} = \widetilde{E_k} \cdot h.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι ο όγκος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι ίσος με το γινόμενο του εμβαδού μιας βάσης του επί το ύψος του. Επομένως:

$$V \approx \widetilde{V_1} + \cdots + \widetilde{V_n}\,, \quad E \approx \widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n}$$

και

$$\widetilde{V_1} + \cdots + \widetilde{V_n} = \big(\widetilde{E_1} + \cdots + \widetilde{E_n}\big)\, h.$$

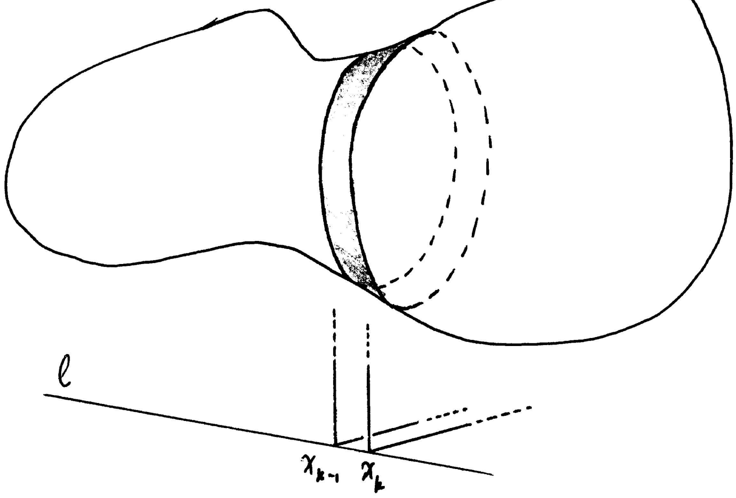
Δηλαδή, αν το πλάτος της διαμέρισης Δ γίνει αρκετά μικρό, τότε το άθροισμα $\widetilde{V_1} + \cdots + \widetilde{V_n}$ θα προσεγγίσει όσο θέλουμε κοντά τον όγκο V αλλά και το γινόμενο Eh. Αυτό, φυσικά, είναι δυνατό μόνο αν ισχύει $V = Eh$.

(ii). **Η μέθοδος των παράλληλων διατομών**. Θα μελετήσουμε τώρα τη γενική περίπτωση φραγμένου στερεού σώματος B.

Παίρνουμε οποιαδήποτε ευθεία l στον χώρο και σε κάθε σημείο x της l φτιάχνουμε το επίπεδο L_x το οποίο είναι κάθετο στην l στο σημείο x και θεωρούμε την τομή $B^{(x)}$ του επιπέδου L_x με το σώμα B. Κάθε τέτοια τομή του B ονομάζεται **διατομή του σώματος** B **κάθετη προς την ευθεία** l. Επειδή το σώμα B είναι φραγμένο, υπάρχει κάποιο διάστημα $[a, b]$ της l ώστε για κάθε x εκτός του $[a, b]$ η διατομή $B^{(x)}$ του B να είναι κενή. Τώρα για κάθε x στο $[a, b]$ συμβολίζουμε $E(x)$ το εμβαδό της διατομής $B^{(x)}$. Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ του $[a, b]$ με πολύ μικρό πλάτος και συμβολίζουμε B_k το μέρος του B που βρίσκεται ανάμεσα στα επίπεδα $L_{x_{k-1}}$ και L_{x_k}. Το B είναι ίσο με την ένωση των $B_1, \ldots, B_n$, οπότε, αν συμβολίσουμε V_k τον όγκο του B_k, τότε:

$$V = V_1 + \cdots + V_n\,.$$

Επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ ένα ενδιάμεσο σημείο ξ_k και φτιάχνουμε το ορθό κυλινδρικό σώμα $\widetilde{B_k}$ του οποίου οι δυο βάσεις ανήκουν στα επίπεδα $L_{x_{k-1}}$ και L_{x_k} και του οποίου η τομή με το επίπεδο L_{ξ_k} είναι, ακριβώς, η διατομή



Σχήμα 7.9: Παράλληλες διατομές.

$B^{(\xi_k)}$ του B. Τότε, επειδή το υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι πολύ μικρό, το σώμα B_k είναι *περίπου ίσο* με το ορθό κυλινδρικό σώμα $\widetilde{B_k}$, οπότε ο όγκος V_k του B_k είναι *περίπου ίσος* με τον όγκο $\widetilde{V_k}$ του $\widetilde{B_k}$. Όμως, $\widetilde{V_k} = E(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, οπότε

$$V_k \approx \widetilde{V_k} = E(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

για κάθε k. Άρα

$$V \approx E(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + E(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Τώρα, αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό, τότε το άθροισμα Riemann $\Sigma(E; a, b; \Delta; \Xi) = E(\xi_1)(x_1 - x_0) + \cdots + E(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ θα προσεγγίσει όσο θέλουμε κοντά τον όγκο V και, επομένως,

$$\boxed{V = \int_a^b E(x)\,dx.}$$

Άρα:

Ο όγκος ενός φραγμένου στερεού σώματος είναι ίσος με το ολοκλήρωμα των εμβαδών των διατομών του που είναι όλες κάθετες στην ίδια ευθεία.

Παράδειγμα: Ως ειδική περίπτωση, θα υπολογίσουμε τον – ήδη γνωστό – τύπο για τον όγκο ορθού κυλινδρικού σώματος με ύψος h και εμβαδό βάσης ίσο με E. Θεωρούμε οποιαδήποτε ευθεία l κάθετη προς το επίπεδο L που περιέχει τη βάση

A του σώματος. Επιλέγουμε το σημείο 0 της l να είναι το σημείο τομής της με το επίπεδο L και το σημείο h της l να είναι το σημείο τομής της με το επίπεδο που περιέχει την άλλη βάση του σώματος. Τότε το εμβαδό $E(x)$ της διατομής του σώματος είναι ίσο με E για κάθε x στο $[0,h]$ και ίσο με 0 για κάθε x εκτός του $[0,h]$. Άρα ο όγκος του σώματος είναι ίσος με $\int_0^h E\,dx = Eh$.

(iii). **Σώματα παραγόμενα με περιστροφή**. Έστω ευθεία l στον χώρο, την οποία θεωρούμε ως x-άξονα, και διάστημα $[a,b]$ της l. Για κάθε x στο $[a,b]$ φτιάχνουμε έναν επίπεδο κυκλικό δίσκο κάθετο στην l στο σημείο x με κέντρο το x και με ακτίνα ίση με $r(x)$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $r = r(x)$ είναι (για απλούστευση) συνεχής στο $[a,b]$ και ότι είναι $r(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a,b]$. Όλοι αυτοί οι δίσκοι σχηματίζουν ένα στερεό σώμα B το οποίο χαρακτηρίζεται **σώμα παραγόμενο με περιστροφή**. Η ονομασία αυτή προκύπτει από ένα δεύτερο τρόπο κατασκευής του σώματος B. Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα επίπεδο L που περιέχει την ευθεία l καθώς και μια ευθεία l', τον y-άξονα, επί του L και κάθετη στην l στο σημείο 0 της l και να θεωρήσουμε την επίπεδη επιφάνεια A η οποία βρίσκεται επί του L ανάμεσα στην καμπύλη $y = r(x)$ και στο ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]$. Τότε το σώμα B προκύπτει αν περιστρέψουμε στον χώρο την επιφάνεια A κατά γωνία ίση με 2π με άξονα περιστροφής την l.

Για κάθε x στο $[a,b]$ η διατομή του B που είναι κάθετη στην l στο x είναι ο κυκλικός δίσκος με ακτίνα $r(x)$ και κέντρο το x. Το εμβαδό αυτού του δίσκου είναι $E(x) = \pi(r(x))^2$, οπότε ο όγκος του B είναι ίσος με

$$\boxed{V = \pi \int_a^b (r(x))^2\,dx.}$$

Δηλαδή:

`Ο όγκος ενός σώματος παραγώμενου με περιστροφή είναι ίσος με το γινόμενο του` π `με το ολοκλήρωμα του τετραγώνου των ακτίνων περιστροφής.`

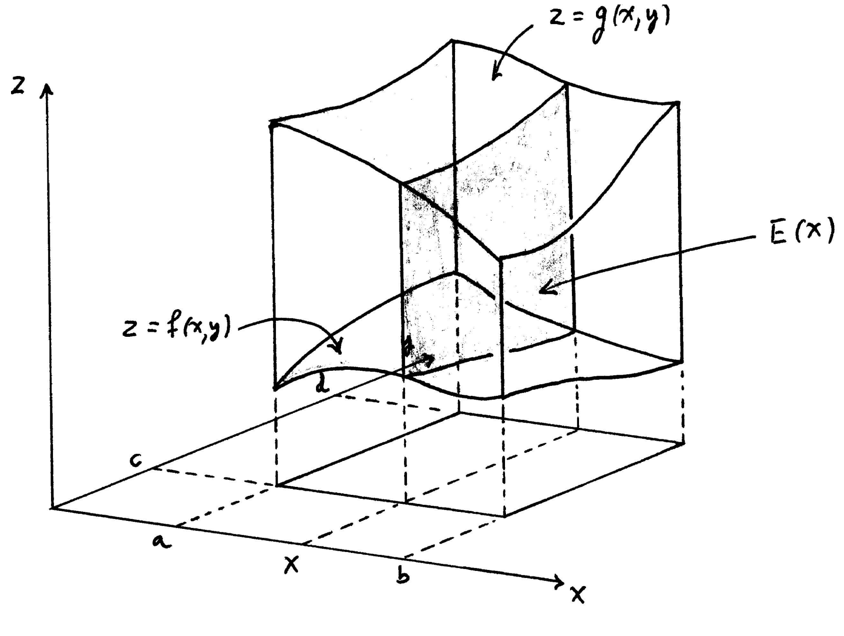
Παραδείγματα: (1) Έστω οποιαδήποτε μπάλα ακτίνας $R > 0$. Μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε ευθεία l η οποία διέρχεται από το κέντρο της μπάλας και να επιλέξουμε το σημείο 0 της l να είναι το κέντρο της μπάλας. Τότε η μπάλα σχηματίζεται από τους κυκλικούς δίσκους που είναι κάθετοι στην l σε κάθε x στο διάστημα $[-R,R]$ της l με κέντρο το x και ακτίνα $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Επομένως, ο όγκος της μπάλας είναι ίσος με $\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \frac{4\pi}{3} R^3$.

(2) Το $B = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ είναι ένα σώμα παραγόμενο με περιστροφή. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ως ευθεία l τον z-άξονα, τότε, αν $z < 0$ ή $z > 1$, η διατομή $B^{(z)}$ του B είναι κενή ενώ, αν $0 \leq z \leq 1$, η διατομή $B^{(z)}$ είναι ένας κυκλικός δίσκος με κέντρο το σημείο $(0,0,z)$, κάθετος στην l στο ίδιο σημείο και με ακτίνα $r(z) = \sqrt{z}$. Άρα ο όγκος του B είναι ίσος με $\pi \int_0^1 z\,dz = \frac{\pi}{2}$.

Το B ονομάζεται **παραβολοειδές** διότι παράγεται με περιστροφή της παραβολικής επιφάνειας $A = \{(x,z) : x^2 \leq z \leq 1\}$, η οποία περιέχεται στο xz-επίπεδο, με άξονα περιστροφής τον z-άξονα.

(3) Έστω ένας *ορθός κυκλικός κώνος* B με ύψος $h > 0$ και ακτίνα βάσης $R > 0$. Συμβολίζουμε l την ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Ο του κώνου και από το κέντρο Κ της βάσης του. Ως σημείο 0 της l επιλέγουμε το Ο και ως σημείο h επιλέγουμε το Κ. Τότε για κάθε x της l εκτός του $[0, h]$ η διατομή $B^{(x)}$ είναι κενή ενώ για κάθε x στο $[0, h]$ η διατομή $B^{(x)}$ είναι ένας κυκλικός δίσκος κάθετος στην l κέντρου x και ακτίνας $r(x) = \frac{R}{h}x$. Δηλαδή ο κώνος είναι σώμα παραγόμενο με περιστροφή και ο όγκος του είναι ίσος με $\pi \int_0^h \frac{R^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi}{3}R^2 h$.

(iv). **Σώματα ανάμεσα σε δυο επιφάνειες.** Θεωρούμε στο xy-επίπεδο του χώρου το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν όλα τα σημεία (x, y) με $a \leq x \leq b$ και $c \leq y \leq d$. Θεωρούμε και δυο συναρτήσεις δυο μεταβλητών η καθεμιά, την $z = f(x, y)$ και την $z = g(x, y)$, ορισμένες στα σημεία (x, y) του παραπάνω ορθογώνιου παραλληλογράμμου. Η πρώτη ορίζει μια επιφάνεια στο χώρο, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων $(x, y, f(x, y))$, και, ομοίως, η δεύτερη ορίζει μια άλλη επιφάνεια, το σύνολο όλων των σημείων $(x, y, g(x, y))$. Θεωρούμε το στερεό σώμα B το οποίο περιέχεται ανάμεσα στις δυο αυτές επιφάνειες. Θα υποθέσουμε ότι οι $z = f(x, y)$ και $z = g(x, y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών x και y. Αυτό, απλώς, σημαίνει ότι μικρές μεταβολές στις τιμές των x και y συνεπάγονται μικρές αντίστοιχες μεταβολές στις τιμές $f(x, y)$ και $g(x, y)$.



Σχήμα 7.10: Σώμα ανάμεσα σε δυο επιφάνειες.

Θα υπολογίσουμε τον όγκο του σώματος B.
Θεωρούμε ως ευθεία l τον x-άξονα και για κάθε x φτιάχνουμε το επίπεδο L_x

που είναι κάθετο στην l στο x. Τα σημεία του L_x είναι όλα τα σημεία (x, y, z) με σταθερό x. Τώρα για κάθε x στο $[a, b]$ η διατομή $B^{(x)}$ του B που είναι κάθετη στην l στο x αποτελείται από την επίπεδη επιφάνεια πάνω στο επίπεδο L_x η οποία βρίσκεται ανάμεσα στις καμπύλες $z = f(x, y)$ και $z = g(x, y)$ με σταθερό x και το y να μεταβάλλεται στο διάστημα $[c, d]$. Επομένως, το εμβαδό αυτής της διατομής είναι ίσο με $E(x) = \int_c^d |g(x, y) - f(x, y)|\, dy$. Αν ο x είναι εκτός του $[a, b]$, τότε η αντίστοιχη διατομή $B^{(x)}$ είναι κενή. Ο όγκος V του B είναι ίσος με $\int_a^b E(x)\, dx$ και, επομένως,

$$\boxed{V = \int_a^b \Big(\int_c^d |g(x, y) - f(x, y)|\, dy \Big)\, dx.}$$

Αν θεωρήσουμε ως ευθεία l τον y-άξονα, τότε με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι ο όγκος του B δίνεται και από τον τύπο

$$\boxed{V = \int_c^d \Big(\int_a^b |g(x, y) - f(x, y)|\, dx \Big)\, dy.}$$

Παράδειγμα: Έστω B το σώμα που βρίσκεται ανάμεσα στην επίπεδη επιφάνεια με εξίσωση $z = 2x + y$ και στην επίπεδη επιφάνεια με εξίσωση $z = x + 2y$ όταν οι μεταβλητές ικανοποιούν τις ανισότητες $-1 \leq x \leq 1$ και $-1 \leq y \leq 1$. Ο όγκος του είναι ίσος με $\int_{-1}^1 \big(\int_{-1}^1 |x + 2y - 2x - y|\, dy \big)\, dx = \int_{-1}^1 \big(\int_{-1}^1 |y - x|\, dy \big)\, dx$. Μελετώντας το πρόσημο της παράστασης $y-x$, βλέπουμε ότι για κάθε x στο $[-1, 1]$ ισχύει $y-x \geq 0$, αν ο y είναι στο $[x, 1]$, και ισχύει $y-x \leq 0$, αν ο y είναι στο $[-1, x]$. Επομένως, ο όγκος του B είναι ίσος με $\int_{-1}^1 \big(\int_{-1}^x (x - y)\, dy + \int_x^1 (y - x)\, dy \big)\, dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 1)\, dx = \frac{8}{3}$.

Δ. Υπολογισμός μήκους καμπύλης.

Γνωρίζουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα (x', y') και (x'', y'') στο επίπεδο έχει μήκος ίσο με την απόσταση ανάμεσα στα άκρα του, δηλαδή

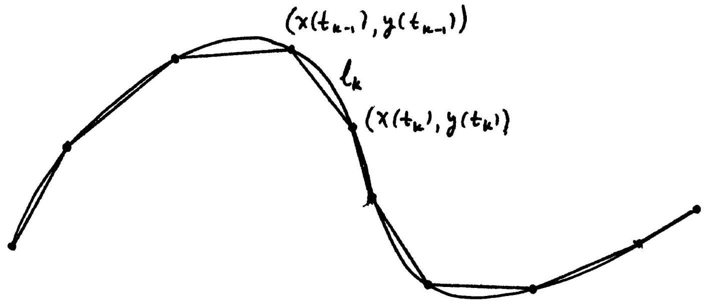
$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}\,.$$

Ομοίως, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα (x', y', z') και (x'', y'', z'') στον χώρο έχει μήκος ίσο με την απόσταση ανάμεσα στα άκρα του, δηλαδή

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}\,.$$

Γενικότερα, μια πολυγωνική καμπύλη – είτε στο επίπεδο είτε στον χώρο – δηλαδή μια ένωση διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων, έχει μήκος ίσο με το άθροισμα των μηκών αυτών των ευθύγραμμων τμημάτων.

Το πρόβλημα δημιουργείται όταν θελήσουμε να μετρήσουμε το μήκος l μιας *οποιασδήποτε* καμπύλης. Αυτό γίνεται *προσεγγίζοντας* την καμπύλη με κατάλληλες πολυγωνικές καμπύλες: πρέπει το σχήμα των πολυγωνικών καμπυλών να είναι *περίπου ίδιο* με το σχήμα της καμπύλης.



Σχήμα 7.11: Προσέγγιση με πολυγωνική γραμμή.

Πρώτα θα περιγράψουμε τη λύση του προβλήματος για καμπύλες στο επίπεδο. Θεωρούμε ότι το μεταβλητό σημείο $(x, y) = (x(t), y(t))$ για t στο $[a, b]$ διαγράφει την καμπύλη μας και θα υποθέσουμε, για απλούστευση, ότι οι παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$. Τέτοιου είδους καμπύλες χαρακτηρίζονται **συνεχώς παραγωγίσιμες**. Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ του $[a, b]$ με αρκετά μικρό πλάτος και για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ συμβολίζουμε T_k το σημείο $(x(t_k), y(t_k))$ της καμπύλης. Τα T_0 και T_n είναι τα δυο άκρα της καμπύλης. Αν συμβολίσουμε l_k το μήκος του μέρους της καμπύλης που βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία T_{k-1} και T_k, τότε

$$l = l_1 + \cdots + l_n\,.$$

Κατόπιν φτιάχνουμε την πολυγωνική γραμμή με διαδοχικές κορυφές τα σημεία $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}, T_n$ και, επειδή κάθε υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$ είναι αρκετά μικρό, το αντίστοιχο αρκετά μικρό μέρος της καμπύλης είναι *περίπου ίδιο* με το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα T_{k-1} και T_k. Επομένως, το μήκος l_k είναι *περίπου ίσο* με το μήκος του ευθύγραμμου αυτού τμήματος, δηλαδή

$$l_k \approx \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2}\,.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού συνεπάγεται ότι υπάρχουν ξ_k και η_k στο $[t_{k-1}, t_k]$ ώστε να είναι $x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ και $y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$. Άρα είναι

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2}(t_k - t_{k-1}).$$

Μάλιστα, επειδή η συνάρτηση $y'(t)$ είναι συνεχής και το $[t_{k-1}, t_k]$ είναι αρκετά μικρό – οπότε και η απόσταση των ξ_k και η_k είναι αρκετά μικρή – συνεπάγεται ότι $y'(\eta_k) \approx y'(\xi_k)$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} \approx \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}(t_k - t_{k-1}).$$

Προσθέτοντας:

$$l \approx \sqrt{(x'(\xi_1))^2 + (y'(\xi_1))^2}(t_1 - t_0) + \cdots + \sqrt{(x'(\xi_n))^2 + (y'(\xi_n))^2}(t_n - t_{n-1})$$

και καταλήγουμε, όπως και σε τόσες άλλες περιπτώσεις, ότι το άθροισμα Riemann $\Sigma\big(\sqrt{x'^{\,2} + y'^{\,2}}\,; a, b; \Delta; \Xi\big)$ θα προσεγγίσει όσο θέλουμε κοντά το μήκος l της καμπύλης αν το πλάτος της Δ είναι αρκετά μικρό. Άρα

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.}$$

Ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε και για συνεχώς παραγωγίσιμες καμπύλες στον χώρο. Το μήκος της καμπύλης με μεταβλητό σημείο το $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ για t στο $[a, b]$ δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dt.}$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα διατυπώνονται ως εξής:

Το μήκος μιας συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του μέτρου της διανυσματικής παραγώγου της.

Παραδείγματα: (1) Θα επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμά μας με το παράδειγμα του ευθύγραμμου τμήματος, όπου $x = x(t) = \kappa t + \lambda$ και $y = y(t) = \mu t + \nu$ για κάθε t στο $[a, b]$. Είναι $x'(t) = \kappa$ και $y'(t) = \mu$ για κάθε t στο $[a, b]$, οπότε το μήκος είναι ίσο με $\int_a^b \sqrt{\kappa^2 + \mu^2}\, dt = \sqrt{\kappa^2 + \mu^2}(b - a)$. Αλλά και η απόσταση από το άκρο A$= (\kappa a + \lambda, \mu a + \nu)$ στο άκρο B$= (\kappa b + \lambda, \mu b + \nu)$ είναι ίση με $\sqrt{(\kappa b + \lambda - \kappa a - \lambda)^2 + (\mu b + \nu - \mu a - \nu)^2} = \sqrt{\kappa^2 + \mu^2}(b - a)$.

(2) Έστω ο κύκλος κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας r_0 με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = r_0 \cos t + x_0$ και $y = y(t) = r_0 \sin t + y_0$ για κάθε t στο $[0, 2\pi]$. Τότε είναι $x'(t) = -r_0 \sin t$ και $y'(t) = r_0 \cos t$ και το μήκος του κύκλου είναι ίσο με $\int_0^{2\pi} \sqrt{{r_0}^2(\sin t)^2 + {r_0}^2(\cos t)^2}\, dt = 2\pi r_0$.

(3) Έστω η έλλειψη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = \kappa_0 \cos t + x_0$ και $y = y(t) = \mu_0 \sin t + y_0$ για κάθε t στο $[0, 2\pi]$. Είναι $x'(t) = -\kappa_0 \sin t$ και $y'(t) = \mu_0 \cos t$ και το μήκος της έλλειψης είναι ίσο με $\int_0^{2\pi} \sqrt{{\kappa_0}^2(\sin t)^2 + {\mu_0}^2(\cos t)^2}\, dt$.

(4) Μια ειδική περίπτωση καμπύλης στο επίπεδο είναι, όπως είδαμε, το γράφημα μιας συνεχούς συνάρτησης $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$. Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$, το μήκος της καμπύλης είναι ίσο με

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.}$$

Ομοίως, αν μια καμπύλη είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $x = g(y)$ συνεχώς παραγωγίσιμης στο διάστημα $[a, b]$, τότε το μήκος της είναι ίσο με

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(g'(y))^2}\, dy.}$$

(5) Για την καμπύλη στον χώρο με $(x,y,z) = (r_0 \cos t + x_0, r_0 \sin t + y_0, \frac{h_0}{2\pi} t + z_0)$, για t στο $[0, 2\pi]$, είναι $x'(t) = -r_0 \sin t$, $y'(t) = r_0 \cos t$ και $z'(t) = \frac{h_0}{2\pi}$, οπότε το μήκος της είναι $\int_0^{2\pi} \sqrt{{r_0}^2 (\sin t)^2 + {r_0}^2 (\cos t)^2 + \frac{{h_0}^2}{4\pi^2}}\, dt = \sqrt{4\pi^2 {r_0}^2 + {h_0}^2}$.

Ε. Υπολογισμός έργου.

Γνωρίζουμε ότι όταν μια σταθερή σε διεύθυνση, φορά και μέτρο δύναμη $\vec{F}$ ασκείται πάνω σε κάποιο (σημειακό) υλικό σώμα, το οποίο κινείται σε ευθύγραμμη τροχιά από το σημείο A στο σημείο B, τότε η δύναμη αυτή παράγει έργο W, η τιμή του οποίου είναι ίση με το γινόμενο του μέτρου της συνιστώσας της $\vec{F}$ στην κατεύθυνση της τροχιάς επί την απόσταση των A και B και με πρόσημο $+$ ή $-$, αν η συνιστώσα αυτή της $\vec{F}$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουν την ίδια ή αντίθετη, αντιστοίχως, φορά. Δηλαδή,

$$W = |\vec{F}||\overrightarrow{AB}| \cos\theta,$$

όπου θ είναι η τιμή στο διάστημα $[0, \pi]$ της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{F}$ και $\overrightarrow{AB}$. Ειδικώτερα, αν $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, τότε το έργο που παράγεται είναι θετικό, αν $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, τότε το έργο που παράγεται είναι αρνητικό και, τέλος, αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε το έργο είναι ίσο με 0. Η παράσταση $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}| \cos\theta$ είναι ίση με το *εσωτερικό γινόμενο* των διανυσμάτων $\vec{F}$ και $\overrightarrow{AB}$, οπότε

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Το πρόβλημα τώρα είναι πώς θα υπολογισθεί το έργο W μιας *μεταβαλλόμενης* δύναμης η οποία και πάλι ασκείται πάνω σε κάποιο (σημειακό) υλικό σώμα που κινείται σε *καμπυλόγραμμη* τροχιά από το A στο B πάνω σε ένα επίπεδο ή στον χώρο.

Στην περίπτωση που το σημείο κινείται σε ένα επίπεδο, εκφράζουμε με $(x,y) = (x(t), y(t))$ τη θέση του υλικού σημείου ως συνάρτηση του χρόνου t σε κάποιο χρονικό διάστημα $[a,b]$. Άρα και η δύναμη $\vec{F} = (F_x, F_y)$ που ασκείται στο σημείο $(x,y) = (x(t), y(t))$ είναι συνάρτηση $\vec{F}(t) = (F_x(t), F_y(t))$ του t στο $[a,b]$. Υποθέτουμε, για απλούστευση, ότι οι συναρτήσεις $F_x = F_x(t)$ και $F_y = F_y(t)$ είναι συνεχείς καθώς και ότι οι συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ ή, με άλλα λόγια, ότι η κίνηση του υλικού σημείου είναι *συνεχώς παραγωγίσιμη*.

Επιλέγουμε οποιαδήποτε διαμέριση $\Delta = \{t_0 = a, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b\}$ του $[a,b]$ με αρκετά μικρό πλάτος. Συμβολίζουμε W_k το έργο που παράγεται από τη μεταβαλλόμενη δύναμη κατά την κίνηση του υλικού σημείου στο χρονικό υποδιάστημα $[t_{k-1}, t_k]$. Βάσει της φυσικής παραδοχής ότι *το έργο που παράγεται στην ένωση διαδοχικών χρονικών υποδιαστημάτων ισούται με το άθροισμα των επιμέρους έργων σε όλα τα χρονικά υποδιαστήματα*, έχουμε:

$$W = W_1 + \cdots + W_n.$$

Επειδή το $[t_{k-1}, t_k]$ είναι αρκετά μικρό, η δύναμη $(F_x(t), F_y(t))$ είναι *περίπου σταθερή* αλλά και η τροχιά του υλικού σημείου είναι *περίπου ευθύγραμμη* κατά το χρονικό αυτό υποδιάστημα. Επιλέγουμε οποιονδήποτε ενδιάμεσο ξ_k στο $[t_{k-1}, t_k]$, οπότε το έργο W_k είναι *περίπου ίσο* με το έργο που θα παρήγαγε μια σταθερή δύναμη $\overrightarrow{F}(\xi_k) = (F_x(\xi_k), F_y(\xi_k))$ σε ευθύγραμμη κίνηση από το σημείο $A_{k-1} = (x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$ στο σημείο $A_k = (x(t_k), y(t_k))$, δηλαδή με το $\widetilde{W_k} = \overrightarrow{F}(\xi_k) \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k} = F_x(\xi_k)\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big) + F_y(\xi_k)\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)$. Συμβολικά:

$$W_k \approx \widetilde{W_k} = F_x(\xi_k)\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big) + F_y(\xi_k)\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big).$$

Τώρα συνεπάγεται ότι υπάρχουν η_k και ζ_k στο $[t_{k-1}, t_k]$ ώστε να είναι $x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(\eta_k)(t_k - t_{k-1})$ και $y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(\zeta_k)(t_k - t_{k-1})$. Επειδή οι συναρτήσεις $x'(t)$ και $y'(t)$ είναι συνεχείς, οι τιμές $x'(\eta_k)$ και $y'(\zeta_k)$ είναι *περίπου ίσες* με τις αντίστοιχες $x'(\xi_k)$ και $y'(\xi_k)$, οπότε

$$W_k \approx \widetilde{W_k} \approx F_x(\xi_k)x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) + F_y(\xi_k)y'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}).$$

Προσθέτοντας όλες τις προσεγγιστικές ισότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} W &\approx \big(F_x(\xi_1)x'(\xi_1) + F_y(\xi_1)y'(\xi_1)\big)(t_1 - t_0) + \cdots \\ &\quad \cdots + \big(F_x(\xi_n)x'(\xi_n) + F_y(\xi_n)y'(\xi_n)\big)(t_n - t_{n-1}). \end{aligned}$$

Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι το άθροισμα Riemann $\Sigma(F_x x' + F_y y'; a, b; \Delta; \Xi)$ θα προσεγγίσει όσο θέλουμε κοντά το W αν το πλάτος της Δ γίνει αρκετά μικρό και, επομένως,

$$\boxed{W = \int_a^b \big(F_x(t)x'(t) + F_y(t)y'(t)\big)\, dt.}$$

Είναι φανερό ότι, αν το υλικό σημείο κινείται στον χώρο, τότε ο ανάλογος τύπος για το παραγόμενο έργο είναι

$$\boxed{W = \int_a^b \big(F_x(t)x'(t) + F_y(t)y'(t) + F_z(t)z'(t)\big)\, dt.}$$

Επομένως:

Το έργο που παράγεται από μια συνεχή δύναμη η οποία δρα σε υλικό σημείο κινούμενο με συνεχώς παραγωγίσιμη κίνηση είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου της δύναμης και της διανυσματικής παραγώγου της κίνησης.

Παράδειγμα: Αν η δύναμη είναι κάθετη στην κατεύθυνση της κίνησης, τότε το παραγώμενο από αυτήν έργο είναι 0.

Πράγματι, το διάνυσμα κατεύθυνσης σε κάθε σημείο $(x(t), y(t))$ της τροχιάς του υλικού σημείου είναι το $(x'(t), y'(t))$. Από την υπόθεση έχουμε ότι ισχύει $F_x(t)x'(t) + F_y(t)y'(t) = 0$ για κάθε t και, επομένως, $W = \int_a^b \big(F_x(t)x'(t) +$

$F_y(t)y'(t)\big)\,dt = 0.$

Ασκήσεις.

Α. Υπολογισμός εμβαδών.

1. Χρησιμοποιώντας παράλληλες διατομές, γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το εμβαδό της επίπεδης επιφάνειας που βρίσκεται ανάμεσα στα γραφήματα των $y = x^2$ και $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[0, 1]$.

2. Χρησιμοποιώντας παράλληλες και ακτινικές διατομές, γράψτε με τρεις τρόπους στη μορφή ολοκληρώματος το εμβαδό της επίπεδης επιφάνειας που περικλείεται στην έλλειψη $\frac{(x-x_0)^2}{\kappa_0{}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\mu_0{}^2} = 1$.

   Υπολογίστε το εμβαδό αυτό με τη μέθοδο των ακτινικών διατομών.

3. Για οποιονδήποτε $a > 0$, θεωρήστε την καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\cos\theta$ και $y = y(\theta) = a\sqrt{\cos(2\theta)}\sin\theta$ για θ στο διάστημα $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ καθώς και την καμπύλη με τις ίδιες παραμετρικές εξισώσεις αλλά για θ στο διάστημα $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Σχεδιάστε τις δυο αυτές καμπύλες, οι οποίες είναι συμμετρικές ως προς το σημείο $(0, 0)$. Η ένωση των δυο καμπυλών ονομάζεται **λημνίσκος**.

   Χρησιμοποιώντας ακτινικές και κυκλικές διατομές, γράψτε με δυο τρόπους στη μορφή ολοκληρώματος το εμβαδό της επίπεδης επιφάνειας η οποία περικλείεται στα δυο «φύλλα» του λημνίσκου.

4. Για οποιονδήποτε $a > 0$, θεωρήστε τις τρεις καμπύλες με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = a\sqrt{\cos(3\theta)}\cos\theta$ και $y = y(\theta) = a\sqrt{\cos(3\theta)}\sin\theta$ και πεδία ορισμού τα διαστήματα $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ για την πρώτη, $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ για τη δεύτερη και $[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$ για την τρίτη. Σχεδιάστε τις τρεις καμπύλες.

   Χρησιμοποιώντας ακτινικές και κυκλικές διατομές, γράψτε με δυο τρόπους στη μορφή ολοκληρώματος το εμβαδό της επίπεδης επιφάνειας η οποία περικλείεται στα τρία «φύλλα» που σχηματίζονται από τις τρεις αυτές καμπύλες.

5. Γενικεύστε τα σχήματα των δυο προηγούμενων ασκήσεων σε σχήμα με $n \geq 2$ «φύλλα».

Β. Υπολογισμός όγκων.

1. Γράψτε με διάφορους τρόπους στη μορφή ολοκληρώματος τον όγκο του στερεού σώματος το οποίο περικλείεται στην *ελλειψοειδή επιφάνεια* με εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

   Ειδικώτερα, αν δυο από τους a, b, c είναι ίσοι, παρατηρήστε ότι το στερεό αυτό σώμα παράγεται με περιστροφή.

2. $^{(*)}$ Υπολογίστε τον όγκο του στερεού σώματος το οποίο περικλείεται ανάμεσα στην κυλινδρική επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 = 4$ και στα επίπεδα με εξισώσεις $z = 0$ και $x + y + z = 0$.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε παράλληλες διατομές οι οποίες να είναι κάθετες στην ευθεία $y = x$ του xy-επιπέδου.)

Γ. Υπολογισμός μήκους καμπύλης.

1. Γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της παραβολής $y = ax^2$.

2. Γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της υπερβολής $y = \frac{a}{x}$.

3. Έστω $\kappa > 0$. Το γράφημα της συνάρτησης $y = \frac{\kappa}{2}(e^{\frac{x}{\kappa}} + e^{-\frac{x}{\kappa}}) = \kappa \cosh \frac{x}{\kappa}$ ονομάζεται **κατενοειδής** καμπύλη. Το σχήμα της κατενοειδούς ταυτίζεται με το σχήμα που παίρνει ένα σχοινί όταν κρέμεται ελεύθερα υπό την επίδραση του βάρους του από τα σταθερά άκρα του. Σχεδιάστε την κατενοειδή και γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της.

4. Θεωρούμε μια καμπύλη στο επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = r(\theta)\cos\theta$ και $y = y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$, για θ στο διάστημα $[a, b]$, όπου η συνάρτηση $r = r(\theta)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$ και είναι $r(\theta) \geq 0$ για κάθε t στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι το μήκος l της καμπύλης είναι ίσο με

$$l = \int_a^b \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\, d\theta.$$

   Αν $c, \kappa > 0$, η επίπεδη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = ce^{\kappa\theta}\cos\theta$ και $y = y(\theta) = ce^{\kappa\theta}\sin\theta$, για θ στο $(-\infty, +\infty)$, ονομάζεται **λογαριθμική σπείρα**. Σχεδιάστε τη λογαριθμική σπείρα και γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της.

   Αν $\kappa > 0$, η επίπεδη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = \kappa\theta\cos\theta$ και $y = y(\theta) = \kappa\theta\sin\theta$, για θ στο $[0, +\infty)$, ονομάζεται **σπείρα του Αρχιμήδη**. Σχεδιάστε τη σπείρα του Αρχιμήδη και γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της.

   Αν $\kappa > 0$, η επίπεδη καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(\theta) = \frac{\kappa}{\theta}\cos\theta$ και $y = y(\theta) = \frac{\kappa}{\theta}\sin\theta$, για θ στο $(0, +\infty)$, ονομάζεται **υπερβολική σπείρα**. Σχεδιάστε την υπερβολική σπείρα και γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της.

5. Θεωρήστε την έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{{\kappa_0}^2} + \frac{(y-y_0)^2}{{\mu_0}^2} = 1$ και γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το μήκος κάθε τόξου της.

6. Ποια απλή και γνωστή γεωμετρική ανισότητα εκφράζει η

$$\sqrt{(x(b) - x(a))^2 + (y(b) - y(a))^2} \leq \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt\,?$$

Αποδείξτε την ανισότητα αυτή, κατανοώντας και συμπληρώνοντας τα παρακάτω βήματα.

$$\begin{aligned}
(x(b)-x(a))^2+(y(b)-y(a))^2 &= |x(b)-x(a)|\Big|\int_a^b x'(t)\,dt\Big| + \\
&\quad +|y(b)-y(a)|\Big|\int_a^b y'(t)\,dt\Big| \\
&\le \int_a^b \big(|x(b)-x(a)||x'(t)|+|y(b)-y(a)||y'(t)|\big)\,dt \\
&\le \int_a^b \sqrt{(x(b)-x(a))^2+(y(b)-y(a))^2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.
\end{aligned}$$

7. Μήπως κρύβεται κάποιος «λογικός κύκλος» στον υπολογισμό του μήκους κύκλου που κάναμε στην ενότητα αυτή;

Δ. Υπολογισμός έργου.

1. Βάσει του νόμου του Newton η κεντρική βαρυτική δύναμη $\overrightarrow{F}=(F_x,F_y,F_z)$ που ασκείται πάνω σε υλικό σημείο $(x,y,z)\neq(0,0,0)$ μάζας m είναι ίση με

$$(F_x,F_y,F_z)=-\frac{cm}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,(x,y,z)=-\frac{cm}{r^3}\,(x,y,z)\,,$$

όπου $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ και c είναι ένας σταθερός – δηλαδή ανεξάρτητος της θέσης του σημείου – θετικός αριθμός.

Αν οι συναρτήσεις κίνησης του υλικού σημείου είναι $x=x(t)$, $y=y(t)$ και $z=z(t)$, για t στο διάστημα $[a,b]$, αποδείξτε ότι το έργο που παράγει η βαρυτική δύναμη είναι ίσο με

$$-\frac{cm}{2}\int_a^b \frac{1}{(r(t))^3}\frac{d\,(r(t))^2}{dt}\,dt=-cm\int_a^b\frac{r'(t)}{(r(t))^2}\,dt,$$

όπου $r(t)=\sqrt{(x(t))^2+(y(t))^2+(z(t))^2}>0$ είναι, φυσικά, η απόσταση του υλικού σημείου από το κέντρο $(0,0,0)$.

2. Βάσει του νόμου του Hooke η δύναμη $\overrightarrow{F}=F_x$ που ασκείται πάνω σε υλικό σημείο x του x-άξονα από ένα ελατήριο προσαρμοσμένο στο σημείο 0 είναι ίση με $F_x=-cx$, όπου c είναι ένας σταθερός – δηλαδή ανεξάρτητος της θέσης του σημείου – θετικός αριθμός. Αν η συνάρτηση κίνησης του υλικού σημείου είναι $x=x(t)$, για t στο διάστημα $[a,b]$, γράψτε στη μορφή ολοκληρώματος το έργο που παράγεται από τη δύναμη του ελατηρίου.

Κεφάλαιο 8

Σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος Riemann.

Αντιπαράγωγοι και αόριστα ολοκληρώματα Riemann. Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού. Ταύτιση των αντιπαραγώγων και των αόριστων ολοκληρωμάτων Riemann για συνεχείς συναρτήσεις. Οι πράξεις της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης Riemann είναι, ουσιαστικά, αντίστροφες. Υπολογισμός ολοκληρώματος Riemann συνεχούς συνάρτησης χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε αντιπαράγωγό της. Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής, μέθοδος ολοκλήρωσης Riemann κατά μέρη ή κατά παράγοντες, ολοκλήρωση Riemann των ρητών συναρτήσεων, ολοκλήρωση Riemann κάποιων ειδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων και ολοκλήρωση Riemann κάποιων ειδικών αλγεβρικών συναρτήσεων. Απλά παραδείγματα γενικευμένων ολοκληρωμάτων Riemann. Απλές διαφορικές εξισώσεις πρώτης και δεύτερης τάξης. Εναλλακτικοί ορισμοί των στοιχειωδών συναρτήσεων: λογαριθμική, εκθετική, δυνάμεις, τριγωνομετρικές.

8.1 Αντιπαράγωγοι και αόριστα ολοκληρώματα Riemann.

Σ' αυτό το κεφάλαιο, όπως και στο προηγούμενο, θα λέμε «ολοκλήρωμα» ή «ολοκληρώσιμη» συνάρτηση αντί να λέμε «ολοκλήρωμα Riemann» ή «Riemann ολοκληρώσιμη» συνάρτηση.

Α. Αντιπαράγωγοι.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου). Αν μια δεύτερη συνάρτηση $y = F(x)$, ορισμένη στο ίδιο διάστημα I, έχει την ιδιότητα

$$F'(x) = f(x) \qquad (x \text{ στο } I),$$

τότε η $y = F(x)$ ονομάζεται **αντιπαράγωγος** ή **παράγουσα** ή **πρωτεύουσα συνάρτηση** ή **αρχική συνάρτηση** της $y = f(x)$ στο διάστημα I.

Παραδείγματα: (1) Για κάθε φυσικό n η $y=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι αντιπαράγωγος της $y=x^n$ στο $(-\infty,+\infty)$.

(2) Η $y=x$ είναι αντιπαράγωγος της $y=1$ στο $(-\infty,+\infty)$.

(3) Για κάθε ακέραιο $n\leq -2$ η $y=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ είναι αντιπαράγωγος της $y=x^n$ στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$.

(4) Για κάθε πραγματικό μη ακέραιο a η $y=\frac{x^{a+1}}{a+1}$ είναι αντιπαράγωγος της $y=x^a$ στο $(0,+\infty)$.

(5) Η $y=\log|x|$ είναι αντιπαράγωγος της $y=\frac{1}{x}$ στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$.

(6) Αν $a>0, a\neq 1$, η $y=\frac{a^x}{\log a}$ είναι αντιπαράγωγος της $y=a^x$ στο $(-\infty,+\infty)$.

(7) Η $y=\sin x$ είναι αντιπαράγωγος της $y=\cos x$ και η $y=-\cos x$ είναι αντιπαράγωγος της $y=\sin x$ στο $(-\infty,+\infty)$.

(8) Η $y=\tan x$ είναι αντιπαράγωγος της $y=\frac{1}{(\cos x)^2}$ στο $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$. Επίσης, η $y=-\cot x$ είναι αντιπαράγωγος της $y=\frac{1}{(\sin x)^2}$ στο $(k\pi,\pi+k\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$.

(9) Η $y=\arcsin x$ είναι αντιπαράγωγος της $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στο $(-1,1)$. Επίσης, η $y=-\arccos x$ είναι αντιπαράγωγος της $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ στο $(-1,1)$.

(10) Η $y=\arctan x$ είναι αντιπαράγωγος της $\frac{1}{1+x^2}$ στο $(-\infty,+\infty)$.

Πρόταση 8.1 *Αν η διαφορά των $y=F_1(x)$ και $y=F_2(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα I και η μια είναι αντιπαράγωγος της $y=f(x)$ στο I, τότε και η άλλη είναι αντιπαράγωγος της $y=f(x)$ στο I. Αντιστρόφως, αν οι $y=F_1(x)$ και $y=F_2(x)$ είναι αντιπαράγωγοι της $y=f(x)$ στο διάστημα I, τότε η διαφορά τους είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Απόδειξη: Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι πολύ απλή. Έστω ότι είναι $F_2(x)-F_1(x)=c$ για κάθε x στο I, όπου c είναι ένας σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του x), και ότι η $y=F_1(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y=f(x)$ στο I. Τότε είναι ${F_2}'(x)={F_1}'(x)+0=f(x)$ για κάθε x στο I, οπότε η $y=F_2(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y=f(x)$ στο I. Αντιστρόφως, έστω ότι οι $y=F_1(x)$ και $y=F_2(x)$ είναι αντιπαράγωγοι της $y=f(x)$ στο I και ας συμβολίσουμε $y=h(x)=F_2(x)-F_1(x)$ τη διαφορά τους στο I. Τότε είναι $h'(x)={F_1}'(x)-{F_2}'(x)=f(x)-f(x)=0$ για κάθε x στο διάστημα I, οπότε από την Πρόταση 6.7(i) συνεπάγεται ότι η $y=h(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και με τον εξής τρόπο.

Έστω ότι η $y=F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y=f(x)$ στο διάστημα I. Τότε το σύνολο όλων των αντιπαραγώγων της $y=f(x)$ στο I αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $y=F(x)+c$, όπου c είναι οποιοσδήποτε σταθερός αριθμός (δηλαδή ανεξάρτητος του x), και από καμιά άλλη συνάρτηση.

Από την Πρόταση 8.1 συνεπάγεται ότι, αν μια συνάρτηση έχει τουλάχιστον μία αντιπαράγωγο σε ένα διάστημα, τότε *η συνάρτηση έχει άπειρες αντιπαραγώγους στο ίδιο διάστημα: αυτές οι αντιπαράγωγοι είναι μια οποιαδήποτε από τις αντιπαραγώγους συν αυθαίρετη σταθερά και καμιά άλλη συνάρτηση.*

Παραδείγματα: (1) Οι αντιπαράγωγοι της $y = x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι *ακριβώς όλες* οι συναρτήσεις $y = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

(2) Για κάθε συνάρτηση στα αρχικά παραδείγματα μπορούμε να περιγράψουμε ακριβώς όλες τις αντιπαραγώγους της αν επισυνάψουμε το σύμβολο c στην αναφερόμενη αντιπαράγωγο. Για παράδειγμα, οι αντιπαράγωγοι της $y = \cos x$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = \sin x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Πρέπει να προσεχθεί το εξής. Αν μια συνάρτηση $y = g(x)$ έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης *δυο ξένων* διαστημάτων, τότε *δε συνεπάγεται* ότι η συνάρτηση είναι σταθερή στην ένωση των δυο αυτών διαστημάτων.

Παράδειγμα: Η $y = g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{αν } 0 < x < 1, \\ 2\,, & \text{αν } 1 < x < 3, \end{cases}$ έχει παράγωγο ίση με 0 σε κάθε σημείο της ένωσης $(0,1) \cup (1,3)$, διότι είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,3)$. Όμως, η $y = g(x)$ δεν είναι σταθερή στην ένωση $(0,1) \cup (1,3)$.

Μετά από την τελευταία παρατήρηση καταλαβαίνουμε γιατί στην Πρόταση 8.1 και στις αναδιατυπώσεις της αναφέρεται «διάστημα» και όχι «ένωση περισσοτέρων του ενός διαστημάτων».

Παράδειγμα: Οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = \log|x| + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Όμως, οι αντιπαράγωγοι της $y = \frac{1}{x}$ στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι ακριβώς όλες οι $y = \begin{cases} \log|x| + c_1\,, & \text{αν } x < 0, \\ \log|x| + c_2\,, & \text{αν } x > 0, \end{cases}$ όπου c_1 και c_2 είναι δυο αυθαίρετες σταθερές (ανεξάρτητες του x), *όχι απαραιτήτως ίσες*.

Β. Αόριστα ολοκληρώματα.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$, οπότε ορίζεται το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$. Είναι πολύ χρήσιμη η εξής επέκταση του συμβόλου του ολοκληρώματος:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Επιτρέπεται, λοιπόν, να γράφουμε το μεγαλύτερο άκρο του διαστήματος στην κάτω μεριά και το μικρότερο άκρο στην πάνω μεριά του συμβόλου του ολοκληρώματος. Επίσης, αν απλώς ορίζεται η $y = f(x)$ στο σημείο a, τότε θα την θεωρούμε, αυτομάτως, ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, a] = \{a\}$ και ορίζουμε:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Επομένως, έχουμε ορίσει το σύμβολο $\int_a^b f(x)\,dx$ για οποιουσδήποτε a και b με την προϋπόθεση ότι η $y=f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, αν $b>a$, ή στο $[b,a]$, αν $b<a$, ή ότι είναι ορισμένη στο σημείο a, αν $b=a$.

Η γνωστή ιδιότητα

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

η οποία ισχύει όταν $a<b<c$, επεκτείνεται για όλες τις περιπτώσεις σχετικής διάταξης των a,b,c, αρκεί η $y=f(x)$ να είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα από το μικρότερο μέχρι το μεγαλύτερο από τα τρία αυτά σημεία. Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, διακρίνοντας περιπτώσεις. Για παράδειγμα, αν $c<b<a$, η ισότητα αυτή γράφεται $-\int_c^a f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$ ή, ισοδύναμα, $\int_c^a f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$ και αυτή είναι η ήδη γνωστή μας ισότητα. Επίσης, αν $a=c<b$, η ισότητα γράφεται $0=\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx$ η οποία ισχύει λόγω του ορισμού του $\int_b^a f(x)\,dx$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι παρόμοια.

Μια ακόμη γνωστή ιδιότητα που επεκτείνεται είναι η εξής. Αν η $y=f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, αν $a<b$, ή στο $[b,a]$, αν $b<a$, και, αν για κάποιον αριθμό M ισχύει $|f(x)|\leq M$ για κάθε x στο ίδιο διάστημα, τότε συνεπάγεται ότι

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq M|b-a|.$$

Πράγματι, αν είναι $a<b$, (οπότε $|b-a|=b-a$), τότε το αποτέλεσμα είναι ήδη γνωστό. Αν είναι $b<a$, τότε είναι $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| = \big|-\int_b^a f(x)\,dx\big| = \big|\int_b^a f(x)\,dx\big| \leq M(a-b) = M|b-a|$. Τέλος, αν $a=b$, τότε η ανισότητα $\big|\int_a^b f(x)\,dx\big| \leq M|b-a|$ ισχύει ως ισότητα $0=0$.

Τώρα, έστω ότι η $y=f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημά του. Παίρνουμε ένα οποιοδήποτε σημείο a του I, κατόπιν θεωρούμε έναν μεταβλητό x στο I και για κάθε τέτοιον x γράφουμε το ολοκλήρωμα $\int_a^x f(t)\,dt$. Αυτό είναι ένας αριθμός η τιμή του οποίου εξαρτάται από την τιμή του x. Τέλος, παίρνουμε και μια αυθαίρετη σταθερά c (ανεξάρτητη του x) και ορίζουμε στο διάστημα I μια συνάρτηση με τύπο

$$y=F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + c.$$

Κάθε τέτοια συνάρτηση την ονομάζουμε **αόριστο ολοκλήρωμα** της $y=f(x)$ στο διάστημα I. Ο a ονομάζεται **αρχικό σημείο** του αόριστου ολοκληρώματος $y=F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+c$.

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε το αρχικό σημείο a με ένα άλλο a' στο ίδιο διάστημα I, κάνουμε το εξής απλό:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt + c = \int_{a'}^x f(t)\,dt + \int_a^{a'} f(t)\,dt + c = \int_{a'}^x f(t)\,dt + c'\,,$$

όπου c' είναι μια νέα σταθερά, η $c' = \int_a^{a'} f(t)\,dt + c$. Δηλαδή, βλέπουμε ότι η αντικατάσταση ενός αρχικού σημείου a με ένα άλλο a' ισοδυναμεί με την αντικατάσταση μιας σταθεράς c με μια άλλη c'. Γι αυτό όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα επιλέγουμε κατάλληλο αρχικό σημείο a τέτοιο ώστε είτε να είναι βολικότερες οι πράξεις για τον υπολογισμό του $\int_a^x f(t)\,dt$ είτε να είναι πιο απλός ο τύπος που θα προκύψει.

Παράδειγμα: Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x^2$ στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, παίρνουμε $a = 0$ και έχουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $y = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{x^3}{3}$. Ένα οποιοδήποτε άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της $y = x^2$ είναι το $y = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι οποιαδήποτε σταθερά. Αν, για παράδειγμα, επιλέξουμε κάποιο άλλο a ως αρχικό σημείο, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $y = \int_a^x t^2\,dt$ είναι το $y = \int_a^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ και η σταθερά είναι η $c = -\frac{a^3}{3}$.

Πρόταση 8.2 *Αν η διαφορά των $y = F_1(x)$ και $y = F_2(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο διάστημα I και η μια είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο I, τότε και η άλλη είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο I. Αντιστρόφως, αν οι $y = F_1(x)$ και $y = F_2(x)$ είναι αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x)$ στο διάστημα I, τότε η διαφορά τους είναι σταθερή συνάρτηση στο I.*

Πράγματι, έστω ότι είναι $y = F_2(x) - F_1(x) = c$ για κάθε x στο I, όπου η c είναι μια σταθερά, ανεξάρτητη του x, και έστω ότι η $y = F_1(x)$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο I. Δηλαδή, υπάρχουν σημείο a_1 του I και σταθερά c_1 ώστε να είναι $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ για κάθε x στο I. Συνεπάγεται ότι είναι $F_2(x) = F_1(x) + c = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + (c_1 + c) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$ για κάθε x στο I, όπου $a_2 = a_1$ και $c_2 = c_1 + c$. Άρα η $y = F_2(x)$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο I. Αντιστρόφως, έστω ότι οι $y = F_1(x)$ και $y = F_2(x)$ είναι αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x)$ στο I, οπότε υπάρχουν σημεία a_1 και a_2 στο I και σταθερές c_1 και c_2 ώστε να είναι $F_1(x) = \int_{a_1}^x f(t)\,dt + c_1$ και $F_2(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2$ για κάθε x στο I. Συνεπάγεται ότι $F_2(x) - F_1(x) = \int_{a_2}^x f(t)\,dt + c_2 - \int_{a_1}^x f(t)\,dt - c_1 = \int_{a_2}^{a_1} f(t) + c_2 - c_1$ για κάθε x στο I, οπότε η $y = F_2(x) - F_1(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση στο I.

Από την Πρόταση 8.2 συνεπάγεται ότι, αν μια συνάρτηση έχει τουλάχιστον ένα αόριστο ολοκλήρωμα σε κάποιο διάστημα, τότε *η συνάρτηση έχει άπειρα αόριστα ολοκληρώματα στο ίδιο διάστημα: αυτά είναι ένα οποιοδήποτε από τα αόριστα ολοκληρώματα συν αυθαίρετη σταθερά και καμιά άλλη συνάρτηση.*

Χρησιμοποιούμε το σύμβολο

$$\int f(x)\,dx$$

για να δηλώσουμε *ταυτόχρονα όλα τα αόριστα ολοκληρώματα* της συνάρτησης $y = f(x)$ σε κάποιο διάστημα I ή, ισοδύναμα, *ταυτόχρονα όλες τις συναρτήσεις* $\int_a^x f(t)\,dt + c$ στο I, όπου ο a είναι οποιοδήποτε σημείο του I και η c είναι αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή, γράφουμε

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + c.$$

Παράδειγμα: Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι *ακριβώς όλες* οι συναρτήσεις $y = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα με το σύμβολο $\int x^2\,dx$ δηλώνουμε όλες μαζί αυτές τις συναρτήσεις και, επομένως, γράφουμε $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά.

Πρέπει να τονιστεί ότι με το σύμβολο $\int f(x)\,dx$ περιγράφουμε ταυτόχρονα *άπειρες συναρτήσεις*.

Παρατηρήστε ότι, όπως είδαμε σε δυο από τα παραδείγματά μας, οι αντιπαράγωγοι της $y = x^2$ είναι ίδιες με τα αόριστα ολοκληρώματά της: κάθε αντιπαράγωγος είναι αόριστο ολοκλήρωμα και κάθε αόριστο ολοκλήρωμα είναι αντιπαράγωγος. Στην επόμενη ενότητα αυτό θα γενικευθεί.

Πριν προχωρήσουμε ας δούμε δυο απλές ιδιότητες του συμβόλου $\int f(x)\,dx$. Η πρώτη είναι:

$$\boxed{\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.}$$

Η ισότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της αντίστοιχης ισότητας ανάμεσα σε ολοκληρώματα με συγκεκριμένα άκρα. Θεωρούμε ένα αρχικό σημείο a του διαστήματος I και παίρνουμε τα αόριστα ολοκληρώματα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ και $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ στο I. Αυτό σημαίνει ότι $\int f(x)\,dx = F(x) + c_1$ και $\int g(x)\,dx = G(x) + c_2$, όπου οι c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές που παίρνουν όλες τις πραγματικές τιμές. Τώρα, έχουμε $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + c_1 + G(x) + c_2 = F(x) + G(x) + (c_1 + c_2) = \int_a^x (f(t) + g(t))\,dt + (c_1 + c_2)$. Το $\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x) + g(x)$ στο I και, επειδή η σταθερά $c_1 + c_2$ παίρνει, προφανώς, όλες τις πραγματικές τιμές, συμπεραίνουμε ότι το $\int_a^x (f(t) + g(t))\,dt + (c_1 + c_2)$ ταυτίζεται με το $\int (f(x) + g(x))\,dx$. Δηλαδή, $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \int (f(x) + g(x))\,dx$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι:

$$\boxed{\int \big(\lambda f(x)\big)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx \qquad (\lambda \neq 0).}$$

Θεωρούμε, όπως πριν, το ίδιο αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, οπότε $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, όπου η c είναι αυθαίρετη σταθερά που παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Τώρα $\lambda \int f(x)\,dx = \lambda F(x) + \lambda c = \int_a^x (\lambda f(t))\,dt + \lambda c$. Το $\int_a^x (\lambda f(t))\,dt$ είναι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = \lambda f(x)$ στο I και η σταθερά λc (προσέξτε: είναι $\lambda \neq 0$) παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Άρα το $\int_a^x (\lambda f(t))\,dt + \lambda c$ ταυτίζεται με το $\int (\lambda f(x))\,dx$ και, επομένως, $\lambda \int f(x)\,dx = \int (\lambda f(x))\,dx$.

Όπως φάνηκε στην προηγούμενη απόδειξη, όταν προσθέτουμε δυο γενικά αόριστα ολοκληρώματα μπορούμε να αντικαθιστούμε το άθροισμα των δυο αυθαίρετων σταθερών που εμφανίζονται με *μία* αυθαίρετη σταθερά. Ομοίως, όταν πολλαπλασιάζουμε ένα γενικό αόριστο ολοκλήρωμα με ένα αριθμό $\neq 0$ μπορούμε να αντικαθιστούμε το γινόμενο της αυθαίρετης σταθεράς και του πολλαπλασιαστή αριθμού με *μία* αυθαίρετη σταθερά.

Παραδείγματα: (1) Γράφουμε $\int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$. Αποφεύγουμε να γράφουμε $\int (x + x^2)\,dx = \int x\,dx + \int x^2\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 + \frac{x^3}{3} + c_2$.

(2) Γράφουμε $\int (7x)\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + c$. Αποφεύγουμε να γράφουμε $\int (7x)\,dx = 7\int x\,dx = 7\frac{x^2}{2} + 7c$.

(3) Γράφουμε $\int (x + g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \int g(x)\,dx$. Αποφεύγουμε να γράφουμε $\int (x + g(x))\,dx = \int x\,dx + \int g(x)\,dx = \frac{x^2}{2} + c + \int g(x)\,dx$ διότι η αυθαίρετη σταθερά c μπορεί να «απορροφηθεί» στο $\int g(x)\,dx$ το οποίο περιέχει αφ' εαυτού μια αυθαίρετη σταθερά.

(4) Προσέξτε! Γράφουμε $\int x\,dx - \int x\,dx = c$ και όχι $= 0$. Διότι: $\int x\,dx - \int x\,dx = \int (x - x)\,dx = \int 0\,dx = c$ ή, με άλλο τρόπο, $\int x\,dx - \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c_1 - \frac{x^2}{2} - c_2 = c_1 - c_2 = c$.

Ασκήσεις.

Α. Αντιπαράγωγοι.

1. Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $y = 2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποιες είναι όλες οι αντιπαράγωγοι της $y = 2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$;

   Βρείτε μια αντιπαράγωγο της $y = 2x + \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή της στον $x = 1$ να είναι -2. Πόσες τέτοιες αντιπαράγωγοι υπάρχουν;

2. Βρείτε συνάρτηση $y = F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε x στο $(0, +\infty)$ και $F(1) = 1$.

3. Βρείτε συνάρτηση $y = F(x)$ ώστε να ισχύει $F'(\log x) = 1$ για κάθε x στο $(0, 1]$ και $F'(\log x) = x$ για κάθε x στο $[1, +\infty)$ και $F(1) = 1$.

4. Αν υπήρχε ρητή συνάρτηση $y = r(x)$ και διάστημα (a, b) ώστε να είναι $r'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε x στο (a, b), θα ήταν $r(x) = \ldots$ στο (a, b). Τί συμπεραίνετε;

Β. Αόριστα ολοκληρώματα.

1. Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $y = 1 - x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποια είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = 1 - x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$; Με άλλα λόγια, ποιο είναι το $\int (1 - t^2)\,dt$;

   Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $y = 1 - x^2$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή του στον $x = 2$ να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

2. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα ενός διαστήματος I και έστω ένα σημείο a του I και ένας αριθμός κ. Πόσα αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x)$ υπάρχουν τα οποία έχουν τιμή κ στον $x = a$;

3. Υποθέστε ότι $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 - 3$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;

4. Θεωρήστε την $y = f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ στο $(-\infty, +\infty)$.

   (i) Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 1.

   (ii) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ στο $[0,1]$.

   (iii) Αποδείξτε ότι η $y = F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι περιοδική με περίοδο 1. Εκφράστε τον τύπο της $y = F(x)$ χρησιμοποιώντας το $[x]$.

   (iv) Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα $G(x) = \int_0^x (F(t) + \frac{1}{12})\,dt$ στο $[0,1]$ και αποδείξτε ότι η $y = G(x)$ είναι περιοδική στο $(-\infty, +\infty)$ με περίοδο 1.

5. Έστω ότι ένα από τα αόριστα ολοκληρώματα μιας συνάρτησης είναι περιοδική ή άρτια ή περιττή συνάρτηση. Ισχύει, τότε, ότι *όλα* τα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης είναι περιοδικές ή άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, αντιστοίχως;

8.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το σημαντικότερο αποτέλεσμα του Απειροστικού Λογισμού. Το θεώρημα αυτό συνδέει τις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

Θεώρημα 8.1 ***Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*** *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα I (οποιουδήποτε τύπου) και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημά του. Παίρνουμε οποιοδήποτε a στο I και θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $y = F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ στο διάστημα I. Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιον ξ στο I, τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον ξ και*

$$F'(\xi) = f(\xi).$$

Ειδικότερα, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο I, τότε η $y = F(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο I και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε x στο I.

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Επειδή η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x) - f(\xi)| < \epsilon$ για κάθε x στο I που ικανοποιεί την $|x - \xi| < \delta$. Έστω, λοιπόν, οποιοσδήποτε x στο I που ικανοποιεί την $0 < |x - \xi| < \delta$. Τότε για κάθε t στο διάστημα με άκρα x και ξ ισχύει, επίσης, $|t - \xi| < \delta$ και, επομένως, $|f(t) - f(\xi)| < \epsilon$. Τότε, όμως,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(\xi)}{x - \xi} - f(\xi)\right| &= \left|\frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^\xi f(t)\,dt}{x - \xi} - f(\xi) = \right|\frac{\int_\xi^x f(t)\,dt - f(\xi)(x - \xi)}{x - \xi}\right| \\
&= \left|\frac{\int_\xi^x f(t)\,dt - \int_\xi^x f(\xi)\,dt}{x - \xi} = \frac{\left|\int_\xi^x (f(t) - f(\xi))\,dt\right|}{|x - \xi|}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{|x-\xi|\epsilon}{|x-\xi|} = \epsilon.$$

Άρα

$$\lim_{x\to\xi} \frac{F(x)-F(\xi)}{x-\xi} = f(\xi),$$

οπότε $F'(\xi) = f(\xi)$.

Έχουμε, επομένως, το εξής άμεσο πόρισμα.

Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I, τότε κάθε αόριστο ολοκλήρωμά της στο I είναι και αντιπαράγωγός της στο I και αντιστρόφως.

Πράγματι, από το Θεώρημα 8.1 συνεπάγεται ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $y = F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ της $y = f(x)$ στο διάστημα I είναι και αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο I. Γνωρίζουμε, όμως, ότι τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x)$ είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = F(x) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά, (*ένα αόριστο ολοκλήρωμα συν αυθαίρετη σταθερά*) αλλά και ότι οι αντιπαράγωγοι της $y = f(x)$ είναι, επίσης, ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = F(x) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά (*μια αντιπαράγωγος συν αυθαίρετη σταθερά*).

Θα δούμε ένα ακόμη άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 8.1. Η διατύπωσή του είναι κάπως ασαφής αλλά θα γίνει σαφής στην αιτιολόγηση που ακολουθεί.

Οι πράξεις της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης συναρτήσεων είναι, ουσιαστικά, αντίστροφες. Η μια αναιρεί την άλλη.

Πράγματι, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και πάρουμε ένα οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμά της, $y = \int_a^x f(t)\,dt + c$, στο I και κατόπιν πάρουμε την παράγωγο του αόριστου ολοκληρώματος, τότε καταλήγουμε στη συνάρτηση $y = f(x)$:

$$\frac{d\left(\int_a^x f(t)\,dt + c\right)}{dx} = f(x).$$

Αυτό, ακριβώς, είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 8.1. Αντιστρόφως, αν η $y = F(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και πάρουμε την παράγωγο $y = \frac{d\,F(x)}{dx}$ στο I και κατόπιν πάρουμε ένα οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα της παραγώγου αυτής στο I, τότε καταλήγουμε στην $y = F(x)$ *συν κάποια σταθερά* (ανεξάρτητη του x):

$$\int_a^x \frac{d\,F(t)}{dt}\,dt + c = F(x) + \big(c - F(a)\big).$$

Αυτό δικαιολογείται ως εξής. Ορίζουμε την $y = f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx}$ στο I. Αυτό σημαίνει ότι η $y = F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο I. Αλλά το αόριστο ολοκλήρωμα $\int_a^x \frac{d\,F(t)}{dt}\,dt + c = \int_a^x f(t)\,dt + c$ είναι, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1, *κάποια* από τις αντιπαραγώγους της $y = f(x)$ στο I και, επομένως, υπάρχει σταθερός αριθμός c' ώστε να είναι $\int_a^x \frac{d\,F(t)}{dt}\,dt + c = F(x) + c'$ για κάθε x στο I.

Αν θέσουμε $x = a$, βρίσκουμε ότι $0 + c = F(a) + c'$, οπότε $c' = c - F(a)$ και, επομένως, $\int_a^x \frac{dF(t)}{dt}\,dt + c = F(x) + (c - F(a))$ για κάθε x στο I.

Η πρόταση που ακολουθεί, άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.1, έχει σπουδαία πρακτική αξία.

Πρόταση 8.3 *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και έστω $y = F(x)$ μια αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο I.*
(1) Τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = f(x)$ στο I είναι ακριβώς όλες οι συναρτήσεις $y = F(x) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Δηλαδή,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c \qquad (x \ \text{ στο } I).}$$

(2) Το ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ σε οποιοδήποτε υποδιάστημα $[a, b]$ του I είναι ίσο με τη διαφορά των τιμών της $y = F(x)$ στα άκρα του $[a, b]$. Δηλαδή,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (a, b \text{ στο } I).}$$

Ουσιαστικά, έχουμε ήδη αποδείξει την Πρόταση 8.3. Αυτό είναι προφανές για το μέρος (1) ενώ για το (2) παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.1, η $y = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι αντιπαράγωγος της $y = f(x)$ στο I. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = c$ για κάθε x στο I. Αν θέσουμε $x = a$, βρίσκουμε ότι $0 - F(a) = c$ και, επομένως, είναι $\int_a^x f(t)\,dt - F(x) = -F(a)$ για κάθε x στο I. Τέλος, με $x = b$ βρίσκουμε την $\int_a^b f(t)\,dt - F(b) = -F(a)$ ή, ισοδύναμα, την $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$.

Πρώτο πόρισμα. Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και γνωρίζουμε μια αντιπαράγωγο $y = F(x)$ της $y = f(x)$ στο I, τότε γνωρίζουμε όλα τα αόριστα ολοκληρώματά της στο I.

Παραδείγματα: Ιδού μερικά σημαντικά αόριστα ολοκληρώματα.

(1) Είναι

$$\boxed{\int 1\,dx = x + c}$$

στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

(2) Αν $\alpha \neq -1$ και $\alpha \neq 0$, είναι

$$\boxed{\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c.}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει (i) στο $(-\infty, +\infty)$ αν ο α είναι ρητός > 0 με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (ii) στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ αν ο α είναι ρητός < 0 και $\neq -1$ με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (iii) στο $[0, +\infty)$ αν ο α είναι ρητός > 0 με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του ή άρρητος > 0 και (iv) στο $(0, +\infty)$ αν ο α είναι ρητός < 0 με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του ή άρρητος < 0.

(3) Τέλος, αν $\alpha = -1$, τότε είναι

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c}$$

στο $(-\infty, 0)$ καθώς και στο $(0, +\infty)$.

(4) Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, τότε είναι

$$\boxed{\int \alpha^x\, dx = \frac{\alpha^x}{\log \alpha} + c}$$

στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

(5) Τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα ισχύουν στο $(-\infty, +\infty)$.

$$\boxed{\int \cos x\, dx = \sin x + c, \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + c}$$

(6) Το πρώτο από τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\boxed{\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c, \qquad \int \frac{1}{(\sin x)^2}\, dx = -\cot x + c}$$

ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ και το δεύτερο σε κάθε διάστημα $(k\pi, \pi + k\pi)$, όπου ο k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος.

(7) Τα αόριστα ολοκληρώματα

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\arccos x + c}$$

ισχύουν στο διάστημα $(-1, 1)$.

(8) Το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c}$$

ισχύει στο $(-\infty, +\infty)$.

Δεύτερο πόρισμα. Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και γνωρίζουμε μια αντιπαράγωγο $y = F(x)$ της $y = f(x)$ στο I, τότε γνωρίζουμε και το ολοκλήρωμά της σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του I.

Παραδείγματα: Ιδού τα αντίστοιχα των αόριστων ολοκληρωμάτων στα προηγούμενα παραδείγματα.

(1) Για κάθε a, b στο $(-\infty, +\infty)$ είναι

$$\boxed{\int_a^b 1\,dx = b - a.}$$

(2) Αν $\alpha \neq -1$ και $\alpha \neq 0$, είναι

$$\boxed{\int_a^b x^\alpha\,dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,.}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει (i) για κάθε a, b αν ο α είναι ρητός > 0 με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (ii) για κάθε $a, b < 0$ και για κάθε $a, b > 0$ αν ο α είναι ρητός < 0 και $\neq -1$ με περιττό παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του, (iii) για κάθε $a, b \geq 0$ αν ο α είναι ρητός > 0 με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του ή άρρητος > 0 και (iv) για κάθε $a, b > 0$ αν ο α είναι ρητός < 0 με άρτιο παρονομαστή στην ανάγωγη μορφή του ή άρρητος < 0.

(3) Αν $\alpha = -1$, τότε για κάθε $a, b < 0$ και για κάθε $a, b > 0$ είναι

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log|b| - \log|a| = \log\frac{b}{a}\,.}$$

(4) Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, τότε για κάθε a, b είναι

$$\boxed{\int_a^b \alpha^x\,dx = \frac{\alpha^b - \alpha^a}{\log\alpha}\,.}$$

(5) Για κάθε a, b είναι

$$\boxed{\int_a^b \cos x\,dx = \sin b - \sin a, \qquad \int_a^b \sin x\,dx = \cos a - \cos b.}$$

(6) Το πρώτο από τα

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan b - \tan a, \qquad \int_a^b \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \cot a - \cot b}$$

ισχύει για κάθε a, b στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ και το δεύτερο για κάθε a, b στο διάστημα $(k\pi, \pi + k\pi)$, όπου ο k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος.

(7) Για κάθε a, b στο διάστημα $(-1, 1)$ είναι

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin b - \arcsin a, \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos a - \arccos b.}$$

(8) Για κάθε a, b είναι

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan b - \arctan a.}$$

Βάσει του Θεωρήματος 8.1 μπορούμε, τώρα, να δούμε τη σχέση ανάμεσα στο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και στο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Πράγματι, η ισότητα $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ γράφεται $\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(x)\,dx = f'(\xi)$ αν η $y = f(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$.

Αντιστρόφως, η ισότητα $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)$ γράφεται $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi)$, όπου η $y = F(x)$ είναι οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα της $y = f(x)$ στο $[a, b]$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι

   (i) $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$,

   (Υπόδειξη: Απλώς, παραγωγίστε την $y = \frac{1}{a}\sin(ax)$.)

   (ii) $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$.

2. Αποδείξτε ότι

   (i) $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \log(\log x) + c$ στο διάστημα $(1, +\infty)$,

   (ii) $\int \frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,dx = \log\big(\log(\log x)\big) + c$ στο διάστημα $(e, +\infty)$.

3. Αποδείξτε ότι

   (i) $\int x^n e^{-x}\,dx = n!e^{-x}\big(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\big) + c$,

   (ii) $\int x^n e^x\,dx = (-1)^{n-1}n!e^x\big(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\big) + c$.

4. Υπολογίστε:

   (i) το εμβαδό της επιφάνειας της άσκησης Α1 της ενότητας 7.4.

   (ii) τα εμβαδά των επιφανειών των ασκήσεων Α3, Α4 και Α5 της ενότητας 7.4 αν αυτά εκφραστούν με τη μέθοδο των ακτινικών διατομών. Τι παρατηρείτε;

   (iii) το μήκος οποιουδήποτε τόξου της κατενοειδούς της άσκησης Γ3 της ενότητας 7.4.

   (iv) το μήκος οποιουδήποτε τόξου της λογαριθμικής σπείρας της άσκησης Γ4 της ενότητας 7.4.

   (v) το έργο που παράγει η κεντρική βαρυτική δύναμη της άσκησης Δ1 της ενότητας 7.4.

   Εξαρτάται η τιμή του έργου από το σχήμα της καμπύλης που διαγράφει το υλικό σημείο κατά την κίνησή του ή εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική *απόσταση* του σημείου από το κέντρο;

Πόσο έργο παράγεται από την κεντρική βαρυτική δύναμη όταν το υλικό σημείο κινηθεί από το «άπειρο» προς κάποιο σημείο A;

(vi) το έργο που παράγει η δύναμη του ελατηρίου της άσκησης Δ2 της ενότητας 7.4.

5. Βρείτε $y = f(x)$ συνεχή στο $(-\infty,+\infty)$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;

6. Υπάρχει $y = f(x)$ συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = e^x$ για κάθε x;

   Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t)\,dt = e^x - 1$.

7. Βρείτε την παράγωγο καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις.

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt, \qquad y = \int_x^2 \frac{\sin t + e^t}{t^2+1}\,dt,$$

$$y = \int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt, \qquad y = \int_{\sin x}^{x+\cos x} te^t\,dt.$$

   Γενικότερα, υπολογίστε την παράγωγο της $y = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt$ σε κάθε ξ στον οποίο η $y = f(x)$ είναι συνεχής και οι $y = g(x)$ και $y = h(x)$ παραγωγίσιμες.

8. Βρείτε $y = f(x)$ συνεχή στο $(-\infty,+\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = 1-2^{x^2}$ για κάθε x.

9. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt = 0$.

   (Υπόδειξη: Δε χρειάζεται να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.)

10. Βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x e^{t-x}(2t+1)\,dt$.

11. (*) Βρείτε αριθμούς $a > 0$ και b ώστε $\lim_{x\to0+} \frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\,dt = 1$.

12. Υπολογίστε τα όρια της άσκησης 4 της ενότητας 7.2.

    Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to+\infty} \frac{1^\alpha+2^\alpha+\cdots+(n-1)^\alpha+n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

13. Βάσει της πρώτης άσκησης, για κάθε ακέραιο k αποδείξτε ότι:

    (i) $\int_0^{2\pi}\sin(kx)\,dx = 0$.

    (ii) $\int_0^{2\pi}\cos(kx)\,dx = 0$, αν $k \neq 0$.

    Επίσης, για όλους τους ακεραίους n, m αποδείξτε ότι:

    (iii) $\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0$.

    (iv) $\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0$ αν $n \neq m$.

    (v) $\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0$ αν $n \neq m$.

    (vi) $\int_0^{2\pi}(\sin(nx))^2\,dx = \int_0^{2\pi}(\cos(nx))^2\,dx = \pi$ αν $n \neq 0$.

14. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση αποδείξτε ότι, αν $f(x) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \cdots + (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ και $g(x) = c_0 + (c_1 \cos x + d_1 \sin x) + \cdots + (c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx))$, τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = a_0c_0 + \frac{a_1c_1 + b_1d_1}{2} + \cdots + \frac{a_nc_n + b_nd_n}{2}\,.$$

15. Χρησιμοποιώντας τις ισότητες της άσκησης 3 της ενότητας 7.2 καθώς και τις προηγούμενες δυο ασκήσεις, αποδείξτε ότι

(i) $\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \pi$ για κάθε φυσικό n.

(ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx = \pi$ ή 0, αν ο n είναι περιττός ή άρτιος φυσικός, αντιστοίχως.

(iii) $\int_0^{\pi} \big(\frac{\sin(nx)}{\sin x}\big)^2\,dx = n\pi$ για κάθε φυσικό n.

16. Αν $a \neq \pm b$, αποδείξτε ότι $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sin(ax)\sin(bx)\,dx = 0$.

Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο Δεύτερος Κανόνας του l' Hopitâl?

17. Η ακολουθία των **πολυωνύμων του Bernoulli** ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

$$P_0(x) = 1, \quad {P_n}'(x) = nP_{n-1}(x), \quad \int_0^1 P_n(x)\,dx = 0 \ (n \geq 1).$$

Βρείτε τα πολυώνυμα $P_n(x)$ για $n = 1, 2, 3, 4$.

Αποδείξτε με την αρχή της επαγωγής ότι το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο x^n.

Αποδείξτε ότι είναι $P_n(0) = P_n(1)$ για κάθε $n \geq 2$.

Αποδείξτε ότι είναι $P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1}$ για κάθε $n \geq 1$.

Αποδείξτε ότι

$$1^n + 2^n + \cdots + k^n = \int_0^{k+1} P_n(x)\,dx = \frac{P_{n+1}(k+1) - P_{n+1}(0)}{n+1}$$

και επαληθεύστε τους γνωστούς τύπους με $n = 1$ και $n = 2$.

Αποδείξτε ότι είναι $P_n(1-x) = (-1)^n P_n(x)$ για κάθε $n \geq 1$.

Αποδείξτε ότι είναι $P_{2n+1}(0) = 0$ και $P_{2n-1}(\frac{1}{2}) = 0$ για κάθε $n \geq 1$.

18. Έστω $y = f(x)$ συνεχής στο διάστημα I και σημείο a του I.

(i) Αν η $y = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι σταθερή στο I, αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι σταθερή 0 στο I.

(ii) Αν ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^b f(t)\,dt$ για κάθε x στο I, αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι σταθερή 0 στο I.

19. $^{(**)}$ Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο του $[a, b]$ στο οποίο είναι συνεχής.

(Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος*: Από την $\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt = 0$ αποδείξτε ότι είναι $\int_a^x f(t)\,dt = 0$ για κάθε x στο $[a, b]$. *Δεύτερος τρόπος*: Έστω ότι είναι $f(\xi) > 0$ για κάποιον ξ στο $[a, b]$ στον οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής. Τότε υπάρχει υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$ με $d - c > 0$ το οποίο περιέχει τον ξ ώστε να είναι $f(x) > \frac{f(\xi)}{2}$ για κάθε x στο $[c, d]$. Άρα $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx \geq \frac{f(\xi)}{2}(d - c) > 0$.)

Ειδική περίπτωση: Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, τότε η $y = f(x)$ είναι σταθερή 0 στο $[a, b]$.

20. $^{(*)}$ Έστω $y = f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$ και αριθμός M ώστε να ισχύει $f(x) \leq M$ για κάθε x στο $[a, b]$. Γνωρίζουμε ότι $\int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$.

Αποδείξτε ότι, αν $\int_a^b f(x)\,dx = M(b - a)$, τότε είναι $f(x) = M$ για κάθε x στο $[a, b]$.

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση στην $y = M - f(x)$.)

21. $^{(*)}$ Έστω $y = f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$, αποδείξτε ότι είναι $f(x) = 0$ για κάθε x στο $[a, b]$.

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προπροηγούμενη άσκηση.)

22. $^{(*)}$ Έστω $y = f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$. Αν $\int_{x'}^{x''} f(t)\,dt \geq 0$ για κάθε x', x'' στο $[a, b]$ με $x' < x''$, αποδείξτε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$.

(Υπόδειξη: *Πρώτος τρόπος*: Αποδείξτε ότι η $y = \int_a^x f(t)\,dt$ είναι αύξουσα στο $[a, b]$. *Δεύτερος τρόπος*: Έστω ότι είναι $f(\xi) < 0$ για κάποιον ξ στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει υποδιάστημα $[c, d]$ του $[a, b]$ με $d - c > 0$ το οποίο περιέχει τον ξ ώστε να είναι $f(x) < \frac{f(\xi)}{2}$ για κάθε x στο $[c, d]$. Άρα $\int_c^d f(x)\,dx \leq \frac{f(\xi)}{2}(d - c) < 0$.)

23. $^{(*)}$ Έστω $y = f(x)$ συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $(f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $x \geq 0$.

(i) Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $f(0) = 0$ και είτε $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ είτε $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$. Στη δεύτερη περίπτωση η $y = (f(x))^2 = 2\int_0^x f(t)\,dt$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και καταλήξτε σε άτοπο.)

(ii) Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

(Υπόδειξη: Πάρτε $\sqrt{\cdots}$.)

(iii) Αποδείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

24. (*) Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, a]$ και $f(0) = 0$.

(i) Θεωρήστε την $y = g(x) = \begin{cases} \frac{(f(x))^2}{x}, & \text{αν } 0 < x \le a, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ και αποδείξτε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $[0, a]$.

(ii) Να συγκρίνετε τις παραγώγους των $y = g(x)$ και $\int_0^x (f'(t))^2 \, dt$.

(iii) Αποδείξτε ότι $(f(x))^2 \le x \int_0^x (f'(t))^2 \, dt$ για κάθε x στο $[0, a]$.

(iv) Αν $(f(a))^2 = a \int_0^a (f'(t))^2 \, dt$, αποδείξτε ότι η $y = \frac{f(x)}{x}$ είναι σταθερή στο $(0, a]$.

(v) Αν $(f(a))^2 = a \int_0^a (f'(t))^2 \, dt$ και $f'(0) = 2$, αποδείξτε ότι $f(x) = 2x$ για κάθε x στο $[0, a]$.

25. (**) Έστω $y = f(x)$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του διαστήματος I. Αποδείξτε ότι κάθε αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση στο I.

(Υπόδειξη: Έστω $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt + c$ ένα αόριστο ολοκλήρωμα και οποιοσδήποτε ξ στο I. Έστω υποδιάστημα $[c, d]$ του I που περιέχει τους a, ξ. Τότε υπάρχει M ώστε να είναι $|f(x)| \le M$ για κάθε x στο $[c, d]$. Άρα για κάθε x στο $[c, d]$ είναι $|F(x) - F(\xi)| = \big| \int_\xi^x f(t) \, dt \big| \le M|x - \xi|$.)

26. (*) Έστω $y = f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$ ώστε να είναι $\int_a^\xi f(x) \, dx = \int_\xi^b f(x) \, dx$.

(Υπόδειξη: Εξετάστε την $y = \int_a^x f(t) \, dt - \int_x^b f(t) \, dt$ βασισμένοι στην προηγούμενη άσκηση.)

8.3 Υπολογισμοί ολοκληρωμάτων Riemann.

Α. Μέθοδος αντικατάστασης ή αλλαγής μεταβλητής.

Πρόταση 8.4 *Αν η $z = f(y)$ είναι συνεχής στο διάστημα J, η $y = \phi(x)$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I και οι τιμές της $y = \phi(x)$ περιέχονται στο J (οπότε ορίζεται η σύνθεση $z = f(\phi(x))$ στο I) τότε είναι*

$$\boxed{\int f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int f(y) \, dy \Big|_{y=\phi(x)} \qquad (x \text{ στο } I).}$$

Επίσης, είναι

$$\boxed{\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) \, dy \qquad (a, b \text{ στο } I).}$$

Ας κατανοήσουμε τα δυο μέλη της πρώτης ισότητας $\int f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = \int f(y) \, dy \big|_{y=\phi(x)}$. Η συνάρτηση $z = f(\phi(x))\phi'(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I διότι σχηματίζεται από σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και το σύμβολο $z = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ δηλώνει όλα τα αόριστα ολοκληρώματά της ή, ισοδύναμα, όλες τις αντιπαραγώγους της. Βλέπουμε, ειδικώτερα, ότι το αριστερό μέλος της ισότητας δηλώνει συναρτήσεις του x στο διάστημα I. Από την άλλη μεριά, το $z = \int f(y)\,dy$ στο δεξιό μέλος της ισότητας δηλώνει όλα τα αόριστα ολοκληρώματα ή, ισοδύναμα, όλες τις αντιπαραγώγους της συνεχούς συνάρτησης $z = f(y)$ και, επομένως, δηλώνει συναρτήσεις του y στο διάστημα J. Η αντικατάσταση $y = \phi(x)$ στο δεξιό μέλος το μετατρέπει σε συναρτήσεις του x στο διάστημα I, οπότε *και τα δυο μέλη* της ισότητας δηλώνουν συναρτήσεις του x στο I. Επομένως, *κατ΄ αρχήν* έχει νόημα να αποδείξει κανείς την ισότητα αυτή.

Απόδειξη: Όπως είπαμε, το $z = \int f(y)\,dy$ δηλώνει όλες τις αντιπαραγώγους της $z = f(y)$ στο J, οπότε είναι $\int f(y)\,dy = G(y) + c$ στο J, όπου η $z = G(y)$ είναι μια οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $z = f(y)$ στο J και c είναι αυθαίρετη σταθερά. Επομένως, είναι $\int f(y)\,dy\,\big|_{y=\phi(x)} = G(\phi(x)) + c$ στο διάστημα I. Όμως, $\frac{d\,(G(\phi(x)))}{dx} = G'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I, που σημαίνει ότι η $z = G(\phi(x))$ είναι μια αντιπαράγωγος της $z = f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I. Επειδή το $z = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx$ δηλώνει όλες τις αντιπαραγώγους της $z = f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I, συνεπάγεται ότι $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = G(\phi(x)) + c$ στο I, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Αποδείχθηκε, λοιπόν, ότι $\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy\,\big|_{y=\phi(x)}$ στο I.

Για την απόδειξη της δεύτερης ισότητας θεωρούμε τις $z = F(x) = \int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$ και $z = H(x) = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$ στο διάστημα I καθώς και την $z = G(y) = \int_{\phi(a)}^{y} f(s)\,ds$ στο διάστημα J. Τώρα είναι $F'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ για κάθε x στο I και $G'(y) = f(y)$ για κάθε y στο J. Επίσης, είναι $H(x) = G(\phi(x))$ στο I και, επομένως, $H'(x) = G'(\phi(x))\phi'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ στο I. Άρα ισχύει $F'(x) = H'(x)$ στο I, οπότε υπάρχει κάποια σταθερά c ώστε να είναι $F(x) = H(x) + c$ στο I. Θέτουμε $x = a$ και βρίσκουμε ότι $0 = 0 + c$, οπότε $c = 0$ και, επομένως, $\int_a^x f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$ στο διάστημα I. Τέλος, θέτουμε $x = b$ και καταλήγουμε στην ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

Παραδείγματα: (1) Θα υπολογίσουμε το $\int (\sin x)^n \cos x\,dx$, όπου ο n είναι οποιοσδήποτε φυσικός. Χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \sin x$, οπότε $\int (\sin x)^n \cos x\,dx = \int (\sin x)^n \frac{d\,\sin x}{dx}\,dx = \int y^n\,dy\big|_{y=\sin x} = \big(\frac{y^{n+1}}{n+1} + c\big)\big|_{y=\sin x} = \frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + c$.

(2) Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 1$, οπότε $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\frac{d(x^2+1)}{dx}\,dx = \int \frac{1}{y}\,dy\big|_{y=x^2+1} = (\log|y| + c)\big|_{y=x^2+1} = \log(x^2+1) + c$.

(3) Για τον υπολογισμό του $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx$ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \log x$ και έχουμε $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_a^b \frac{1}{\log x}\frac{d\log x}{dx}\,dx = \int_{\log a}^{\log b} \frac{1}{y}\,dy = \log|\log b| - \log|\log a| = \log\big|\frac{\log b}{\log a}\big|$.

Πρέπει να προσέξουμε ώστε οι a, b να είναι τέτοιοι ώστε το σύνολο τιμών της $y = \log x$ που αντιστοιχεί στο διάστημα με άκρα a, b να περιέχεται στο ίδιο διάστημα του πεδίου ορισμού της $z = \frac{1}{y}$, δηλαδή είτε στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είτε στο διάστημα $(0, +\infty)$. Αυτό το σύνολο τιμών της $y = \log x$ είναι το διάστημα με άκρα $\log a, \log b$. Άρα πρέπει είτε να είναι $\log a, \log b > 0$ ή, ισοδύναμα, $a, b > 1$ είτε να είναι $\log a, \log b < 0$ ή, ισοδύναμα, $0 < a, b < 1$. Ειδικώτερα, παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $\log a, \log b$ έχουν το ίδιο πρόσημο, οπότε $\int_a^b \frac{1}{x\log x}\,dx = \log\frac{\log b}{\log a}$.

Β. Μέθοδος ολοκλήρωσης κατά μέρη ή κατά παράγοντες.

Πρόταση 8.5 *Αν οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο διάστημα I, τότε είναι*

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \qquad (x \text{ στο } I).}$$

Επίσης, είναι

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \qquad (a, b \text{ στο } I).}$$

Απόδειξη: Αν η $y = F(x)$ είναι αντιπαράγωγος της $y = f'(x)g(x)$ στο I, τότε $\int f'(x)g(x)\,dx = F(x) - c$ στο I, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Τότε είναι $\frac{d\,(f(x)g(x)-F(x))}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - F'(x) = f(x)g'(x)$ στο I, οπότε η $y = f(x)g(x) - F(x)$ είναι μια αντιπαράγωγος της $y = f(x)g'(x)$ στο I. Άρα είναι $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - F(x) + c = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$ στο I.

Θεωρούμε τις $y = F(x) = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$ και $y = G(x) = \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$ στο I, οπότε είναι $F'(x) + G'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{d\,(f(x)g(x))}{dx}$ στο I. Άρα υπάρχει κάποια σταθερά c ώστε να ισχύει $F(x) + G(x) = f(x)g(x) + c$ στο I. Θέτουμε $x = a$ και βρίσκουμε $0 + 0 = f(a)g(a) + c$, οπότε $c = -f(a)g(a)$. Άρα $F(x) + G(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a)$ ή, ισοδύναμα, $\int_a^x f'(t)g(t)\,dt + \int_a^x f(t)g'(t)\,dt = f(x)g(x) - f(a)g(a)$ στο I. Τέλος, θέτουμε $x = b$ και καταλήγουμε στην ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

Παραδείγματα: (1) $\int \log x\,dx = \int \log x \frac{dx}{dx}\,dx = x\log x - \int \frac{d\,\log x}{dx}\,x\,dx = x\log x - \int \frac{1}{x}\,x\,dx = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(2) Αν $a \neq 0$, τότε έχουμε $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{d\,e^{ax}}{dx}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\frac{d\,\sin(bx)}{dx}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$ (ολοκλήρωμα παρόμοιο με το αρχικό) $= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}\int \frac{d\,e^{ax}}{dx}\cos(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2}\int e^{ax}\frac{d\,\cos(bx)}{dx}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$. Άρα $\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a^2}e^{ax}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big) + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά και, επομένως, $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = e^{ax}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\cos(bx)\right) + c$.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που $a = 0$ και $b \neq 0$, αφού τότε γράφεται $\int \sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}\cos(bx) + c$. Άρα έχουμε τον χρήσιμο τύπο:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2+b^2}\,e^{ax}\cos(bx) + c$$

για κάθε a, b με $a^2 + b^2 \neq 0$. Ομοίως, αποδεικνύεται και ο τύπος:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}\,e^{ax}\cos(bx) + \frac{b}{a^2+b^2}\,e^{ax}\sin(bx) + c.$$

(3) Είναι $\int_0^2 xe^x\,dx = \int_0^2 x\frac{d\,e^x}{dx}\,dx = 2e^2 - 0e^0 - \int_0^2 \frac{d\,x}{dx}e^x\,dx = 2e^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - (e^2 - e^0) = e^2 + 1$.

(4) Είναι $\int_0^\pi x\sin x\,dx = -\int_0^\pi x\frac{d\cos x}{dx}dx = -\pi\cos\pi + 0\cos 0 + \int_0^\pi \frac{dx}{dx}\cos x\,dx = \pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$.

Γ. Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

Θα περιγράψουμε μια γενική μέθοδο υπολογισμού του

$$\int r(x)\,dx = \int \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,dx,$$

όπου $r(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ είναι οποιαδήποτε ρητή συνάρτηση.

Πρώτο βήμα. Αναγόμαστε στην περίπτωση που ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Αν $m < n$ εξ αρχής, τότε παραλείπουμε το πρώτο βήμα. Αν, όμως, $m \geq n$, τότε διαιρούμε τα πολυώνυμα και βρίσκουμε πολυώνυμα $p(x)$ και $q(x)$ ώστε ο βαθμός του $q(x)$ να είναι $< n$ και να ισχύει

$$a_m x^m + \cdots + a_0 = p(x)\big(b_n x^n + \cdots + b_0\big) + q(x)$$

για κάθε x. Τότε είναι

$$r(x) = p(x) + \frac{q(x)}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}\,.$$

Το $\int p(x)\,dx$ υπολογίζεται εύκολα, οπότε από τώρα και στο εξής μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m < n$.

Δεύτερο βήμα. Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων παραγόντων. Αυτό ισοδυναμεί με το να βρούμε τις ρίζες του παρονομαστή και είναι, εν γένει, πολύ δύσκολο ή και αδύνατο αλλά σε μερικές περιπτώσεις είναι εφικτό. Το γενικό συμπέρασμα είναι το εξής.

Κάθε πολυώνυμο $b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων

$$b_n x^n + \cdots + b_0 = b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho \cdots ((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau$$

$$= b_n(x-\alpha)^\kappa \cdots (x-\gamma)^\lambda(x-\mu-i\nu)^\rho(x-\mu+i\nu)^\rho \cdots (x-\epsilon-i\delta)^\tau(x-\epsilon+i\delta)^\tau,$$

όπου οι εκθέτες $\kappa,\ldots,\lambda,\rho,\ldots,\tau$ είναι φυσικοί αριθμοί με $\kappa+\cdots+\lambda+2\rho+\cdots+2\tau = n$ και οι αριθμοί $\nu,\ldots,\delta$ είναι όλοι >0.

Στην παραπάνω ανάλυση η ύπαρξη των πρωτοβάθμιων όρων $x-\alpha,\ldots,x-\gamma$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι $\alpha,\ldots,\gamma$ είναι όλες οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\kappa,\ldots,\lambda$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών. Επίσης, η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων όρων $(x-\mu)^2+\nu^2,\ldots,(x-\epsilon)^2+\delta^2$ ισοδυναμεί με το ότι οι αντίστοιχοι μιγαδικοί αριθμοί $\mu \pm i\nu,\ldots,\epsilon \pm i\delta$ είναι όλες οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου και οι αντίστοιχοι εκθέτες $\rho, \dots, \tau$ είναι οι πολλαπλότητες αυτών των ριζών.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι οι πραγματικές ρίζες $\alpha, \dots, \gamma$ καθορίζουν τα διαστήματα στα οποία ορίζεται το αόριστο ολοκλήρωμά μας: είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα με άκρα τα $-\infty, \alpha, \dots, \gamma, +\infty$.

Τρίτο βήμα. Αναλύουμε τη ρητή συνάρτηση σε **απλούς λόγους**:

$$\begin{aligned} r(x) = & \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{\Gamma_1}{x-\gamma} + \frac{\Gamma_2}{(x-\gamma)^2} + \cdots + \frac{\Gamma_\lambda}{(x-\gamma)^\lambda} \\ & + \frac{M_1(x-\mu)+N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{M_\rho(x-\mu)+N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \frac{E_1(x-\epsilon)+\Delta_1}{(x-\epsilon)^2+\delta^2} + \cdots + \frac{E_\tau(x-\epsilon)+\Delta_\tau}{((x-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}. \end{aligned}$$

Η «λογική» είναι απλή. Κάθε παράγων $x-\alpha, \dots, x-\gamma$ του παρονομαστή καθορίζει μια ομάδα λόγων με αριθμούς ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\kappa, \dots, \lambda$, αντιστοίχως, ως παρονομαστές. Επίσης, κάθε παράγων $(x-\mu)^2+\nu^2, \dots, (x-\epsilon)^2+\delta^2$ καθορίζει μια ομάδα λόγων με πρωτοβάθμιους όρους ως αριθμητές και δυνάμεις του ίδιου παράγοντα με εκθέτες από 1 έως $\rho, \dots, \tau$ αντιστοίχως ως παρονομαστές. Οι αριθμοί $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ είναι άγνωστοι και πρέπει να υπολογιστούν. Αυτό επιτυγχάνεται με απαλοιφή των παρονομαστών, αν πολλαπλασιάσουμε με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιό τους, δηλαδή το $b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$. Εξισώνουμε τους αντίστοιχους συντελεστές των δυο πολυωνύμων που προκύπτουν, βρίσκουμε ένα σύστημα n εξισώσεων με τους n αγνώστους $A_1, A_2, \dots, E_\tau, \Delta_\tau$ και το λύνουμε.

Τέταρτο βήμα. Το πρόβλημα, λοιπόν, ανάγεται στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής τριών τύπων:

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx, \qquad \int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx, \qquad \int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx,$$

όπου k είναι οποιοσδήποτε φυσικός. Εξετάζουμε καθένα από τους τρεις τύπους ξεχωριστά.
(*i*) Για το $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx$, είτε στο διάστημα $(-\infty, \alpha)$ είτε στο $(\alpha, +\infty)$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x-\alpha$ και έχουμε

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \int \frac{1}{(x-\alpha)^k} \frac{d(x-\alpha)}{dx}\,dx = \int \frac{1}{y^k}\,dy\Big|_{y=x-\alpha}.$$

Αν $k \geq 2$, τότε

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\,dx = \Big(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}} + c\Big)\Big|_{y=x-\alpha} = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}} + c.$$

Αν $k=1$, τότε

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \big(\log|y|+c\big)\Big|_{y=x-\alpha} = \log|x-\alpha|+c.$$

(ii) Για το $\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ με αλλαγή μεταβλητής $y=(x-\mu)^2+\nu^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\frac{d\,((x-\mu)^2+\nu^2)}{dx}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^k}\,dy\Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2}.\end{aligned}$$

Αν $k\geq 2$, τότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x-\mu}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx &= \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{k-1}\frac{1}{y^{k-1}}+c\Big)\Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} \\ &= -\frac{1}{2(k-1)}\frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{k-1}}+c.\end{aligned}$$

Αν $k=1$, τότε

$$\int \frac{x-\mu}{(x-\mu)^2+\nu^2}\,dx = \frac{1}{2}\big(\log|y|+c\big)\Big|_{y=(x-\mu)^2+\nu^2} = \frac{1}{2}\log((x-\mu)^2+\nu^2)+c.$$

(iii) Τέλος, για το $\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx$ με την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{x-\mu}{\nu}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{((x-\mu)^2+\nu^2)^k}\,dx &= \frac{1}{\nu^{2k-1}}\int \frac{1}{\big((\frac{x-\mu}{\nu})^2+1\big)^k}\frac{d}{dx}\frac{x-\mu}{\nu}\,dx \\ &= \frac{1}{\nu^{2k-1}}\int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy\Big|_{y=\frac{x-\mu}{\nu}}.\end{aligned}$$

Έτσι αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy,$$

όπου ο k είναι φυσικός. Αυτό είναι πιο περίπλοκο από τα προηγούμενα και υπολογίζεται με *αναδρομικό τύπο.* Κατ΄ αρχάς, αν $k=1$, τότε

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \arctan y + c.$$

Αν $k>1$, τότε

$$\begin{aligned}I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy &= \int \frac{y^2+1}{(y^2+1)^k}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^k}\,dy \\ &= \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\,dy - \int y\frac{y}{(y^2+1)^k}\,dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)} \int y \frac{d}{dy} \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\, dy \\
&= I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{1}{(y^2+1)^{k-1}}\, dy \\
&= \frac{1}{2k-2} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}\, I_{k-1}\, .
\end{aligned}
$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος ανάγει τον υπολογισμό του I_k στον υπολογισμό του I_{k-1} και, επαγωγικά, στο I_1 : $I_k = \frac{1}{2k-2}\frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)}\frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \frac{(2k-3)(2k-5)}{(2k-2)(2k-4)}\, I_{k-2}$ μέχρι

$$
\begin{aligned}
I_k = &\frac{1}{2k-2} \frac{y}{(y^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{(2k-2)(2k-4)} \frac{y}{(y^2+1)^{k-2}} + \cdots \\
&\cdots + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 3}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2} \frac{y}{y^2+1} + \frac{(2k-3)(2k-5)\cdots 1}{(2k-2)(2k-4)\cdots 2} \arctan y + c.
\end{aligned}
$$

Επιστρέφοντας στο $\int r(x)\, dx$, καταλήγουμε στο ότι κάθε ομάδα όρων $\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_\kappa}{(x-\alpha)^\kappa}$ θα συνεισφέρει μια ομάδα

$$
A_1 \log|x-\alpha| - \frac{A_2}{x-\alpha} - \cdots - \frac{A_\kappa}{(k-1)(x-\alpha)^{\kappa-1}}
$$

στο ολοκλήρωμα, κάθε ομάδα $\frac{M_1(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{M_2(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \cdots + \frac{M_\rho(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ θα συνεισφέρει μια ομάδα

$$
\frac{M_1}{2} \log((x-\mu)^2+\nu^2) - \frac{M_2}{2((x-\mu)^2+\nu^2)} - \cdots - \frac{M_\rho}{2(\rho-1)((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}
$$

και, τέλος, κάθε ομάδα $\frac{N_1}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \frac{N_2}{((x-\mu)^2+\nu^2)^2} + \cdots + \frac{N_\rho}{((x-\mu)^2+\nu^2)^\rho}$ θα συνεισφέρει μια ομάδα

$$
{N_1}' \arctan \frac{x-\mu}{\nu} + \frac{{N_2}'(x-\mu)}{(x-\mu)^2+\nu^2} + \cdots + \frac{{N_\rho}'(x-\mu)}{((x-\mu)^2+\nu^2)^{\rho-1}}\, ,
$$

όπου οι συντελεστές ${N_1}', \ldots, {N_\rho}'$ είναι διαφορετικοί από τους $N_1, \ldots, N_\rho$.

Παραδείγματα: (1) $\int \frac{2}{x-3}\, dx = 2\log|x-3| + c$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

(2) $\int \frac{-5}{(x+2)^3}\, dx = \frac{5}{2}\frac{1}{(x+2)^2} + c$ στο $(-\infty, -2)$ και στο $(-2, +\infty)$.

(3) Για το $\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x+1}{3}$, οπότε

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)^2+9}\, dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{y^2+1}\, dy\Big|_{y=\frac{x+1}{3}} = \Big(\frac{1}{3}\arctan y + c\Big)\Big|_{y=\frac{x+1}{3}} \\
&= \frac{1}{3} \arctan \frac{x+1}{3} + c
\end{aligned}
$$

στο $(-\infty, +\infty)$.

(4) Για το $\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=(x-2)^2+4$, οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{(x-2)^2+4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}(\log|y|+c)\Big|_{y=(x-2)^2+4}\\ &= \frac{1}{2}\log((x-2)^2+4)+c\end{aligned}$$

στο $(-\infty,+\infty)$.

(5) Για το $\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=(x-2)^2+4$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{((x-2)^2+4)^4}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^4}\,dy\Big|_{y=(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{3}\frac{1}{y^3}+c\Big)\Big|_{y=(x-2)^2+4}\\ &= -\frac{1}{6}\frac{1}{((x-2)^2+4)^3}+c.\end{aligned}$$

στο $(-\infty,+\infty)$.

(6) Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx$, κατ΄ αρχάς διαιρούμε το x^3-2x^2+2 με το x^2-3x+2 και βρίσκουμε ότι $x^3-2x^2+2=(x^2-3x+2)(x+1)+x$ ή, ισοδύναμα, $\frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}=x+1+\frac{x}{x^2-3x+2}$. Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx &= \int (x+1)\,dx + \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx\\ &= \frac{1}{2}x^2+x+\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx.\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^2-3x+2}$ σε απλούς λόγους. Οι ρίζες του x^2-3x+2 είναι οι 1 και 2, οπότε είναι $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^2-3x+2}$ γράφεται:

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}\,,$$

όπου οι αριθμοί A,B πρέπει να προσδιοριστούν. Πολλαπλασιάζουμε τα δυο μέλη της τελευταίας ισότητας με το $(x-1)(x-2)$ και προκύπτει $x=A(x-2)+B(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $x=(A+B)x+(-2A-B)$. Εξισώνουμε τους συντελεστές των ομοιόβαθμων μονωνύμων των δυο μελών της τελευταίας ισότητας και βρίσκουμε $A+B=1$ και $-2A-B=0$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $A=-1$, $B=2$. Άρα

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\,.$$

Επομένως,

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = -\int \frac{1}{x-1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-2}\,dx = -\log|x-1|+2\log|x-2|+c$$

και, τέλος,

$$\int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2+x-\log|x-1|+2\log|x-2|+c$$

στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ και $(2, +\infty)$.

(7) Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ σε απλούς λόγους. Παραγοντοποιούμε το x^3+x^2-x-1 ως εξής: $x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x^2-1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$. Δηλαδή, το x^3+x^2-x-1 έχει απλή ρίζα τον 1 και διπλή ρίζα τον -1. Άρα ο λόγος $\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}$ γράφεται:

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε την τελευταία ισότητα με το $(x-1)(x+1)^2$ και προκύπτει $2x^2+1 = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1)$ ή, ισοδύναμα, $2x^2+1 = (A+B)x^2 + (2A+C)x + (A-B-C)$. Εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $A+B=2$, $2A+C=0$ και $A-B-C=1$. Το σύστημα αυτό έχει λύση $A=\frac{3}{4}$, $B=\frac{5}{4}$, $C=-\frac{3}{2}$. Άρα

$$\frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1} = \frac{3}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{5}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)^2}\,,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+1}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{5}{4}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{4}\log|x-1| + \frac{5}{4}\log|x+1| + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} + c\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, +\infty)$.

(8) Για να υπολογίσουμε το $\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx$ αναλύουμε τον λόγο $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ σε απλούς λόγους. Παραγοντοποιούμε το x^4-x^2-2x+2 ως εξής: $x^4-x^2-2x+2 = x^2(x^2-1)-2(x-1) = x^2(x-1)(x+1)-2(x-1) = (x-1)(x^3+x^2-2) = (x-1)(x^3-x^2+2x^2-2) = (x-1)(x^2(x-1)+2(x-1)(x+1)) = (x-1)^2(x^2+2x+2)$. Δηλαδή, το x^4-x^2-2x+2 έχει διπλή ρίζα τον 1 και καμία άλλη ρίζα, διότι το $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ δεν έχει (πραγματικές) ρίζες. Άρα ο λόγος $\frac{x}{x^4-x^2-2x+2}$ γράφεται:

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C(x+1)+D}{(x+1)^2+1}\,.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x-1)^2((x+1)^2+1)$ και προκύπτει $x = (A+C)x^3 + (A+B-C+D)x^2 + (2B-C-2D)x + (-2A+2B+C+D)$. Εξισώνουμε συντελεστές και βρίσκουμε $A+C=0$, $A+B-C+D=0$, $2B-C-2D=1$ και $-2A+2B+C+D=0$. Το σύστημα έχει λύση $A=\frac{1}{25}$, $B=\frac{1}{5}$, $C=-\frac{1}{25}$, $D=-\frac{7}{25}$. Άρα

$$\frac{x}{x^4-x^2-2x+2} = \frac{1}{25}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{5}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{25}\frac{x+1}{(x+1)^2+1} - \frac{7}{25}\frac{1}{(x+1)^2+1}\,,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^4-x^2-2x+2}\,dx &= \frac{1}{25}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx \\ &\quad -\frac{1}{25}\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx - \frac{7}{25}\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\ &= \frac{1}{25}\log|x-1| - \frac{1}{5}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{50}\log((x+1)^2+1) \\ &\quad -\frac{7}{25}\arctan(x+1)+c.\end{aligned}$$

στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

(9) Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx$.

Διαιρώντας: $\frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = x^2+7x+5+\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$. Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx &= \frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2+5x \\ &\quad +\int \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx.\end{aligned}$$

Αναλύουμε τον παρονομαστή σε γινόμενο: $x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = x^4(x-1)+2x^2(x-1)+(x-1) = (x^4+2x^2+1)(x-1) = (x^2+1)^2(x-1)$. Αναλύουμε το $\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{(x^2+1)^2(x-1)}$ σε απλούς λόγους:

$$\frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{(x^2+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Πολλαπλασιάζουμε με το $(x^2+1)^2(x-1)$ και βρίσκουμε $-7x^4+3x^3+4x^2+x+5 = (A+B)x^4+(-B+C)x^3+(2A+B-C+D)x^2+(-B+C-D+E)x+(A-C-E)$ οπότε $A+B=-7$, $-B+C=3$, $2A+B-C+D=4$, $-B+C-D+E=1$ και $A-C-E=5$. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{17}{2}$, $C=-\frac{11}{2}$, $D=4$ και $E=2$. Άρα

$$\begin{aligned}\int \frac{-7x^4+3x^3+4x^2+x+5}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{17x+11}{x^2+1}\,dx \\ &\quad +2\int \frac{2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) \\ &\quad -\frac{11}{2}\arctan x - \frac{2}{x^2+1} \\ &\quad +2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx.\end{aligned}$$

στο $(-\infty,1)$ και στο $(1,+\infty)$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής.

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int x\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\
&= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + c.
\end{aligned}
$$

στο $(-\infty,+\infty)$. Συγκεντρώνοντας όλους τους υπολογισμούς:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^7+6x^6-x}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}\,dx = &\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + 5x + \frac{x-2}{x^2+1} \\
&+\frac{3}{2}\log|x-1| - \frac{17}{4}\log(x^2+1) \\
&-\frac{9}{2}\arctan x + c.
\end{aligned}
$$

στα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Δ. Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Θα δούμε μια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int r(\cos x,\sin x)\,dx,$$

όπου η $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s, t. Δηλαδή, η $y=f(x)=r(\cos x,\sin x)$ είναι ίση με $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, όπου οι $y=f_1(x)$ και $y=f_2(x)$ είναι αθροίσματα γινομένων $a\,(\cos x)^k(\sin x)^l$, όπου a είναι αριθμός και οι k,l είναι μη αρνητικοί ακέραιοι.

Παράδειγμα: Στο $\int \big(2\sin x\cos x - \frac{\sin x+(\cos x)^3-(\sin x)^2\cos x}{\sin x+(\cos x)^2}\big)\,dx$ είναι $f(x)=2\sin x\cos x - \frac{\sin x+(\cos x)^3-(\sin x)^2\cos x}{\sin x+(\cos x)^2} = \frac{2(\cos x)^3\sin x+3\cos x(\sin x)^2-(\cos x)^3-\sin x}{(\cos x)^2+\sin x}$, $f_1(x)=2(\cos x)^3\sin x+3\cos x(\sin x)^2-(\cos x)^3-\sin x$, $f_2(x)=(\cos x)^2+\sin x$ και η αντίστοιχη ρητή συνάρτηση είναι η $r(s,t)=\frac{2s^3t+3st^2-s^3-t}{s^2+t}$.

Παρατηρούμε ότι οι $y=f_1(x)$ και $y=f_2(x)$ είναι συνεχείς στο $(-\infty,+\infty)$ και ότι η $y=f(x)$ δεν ορίζεται στα σημεία στα οποία η $y=f_2(x)$ είναι 0 και ότι, αν εξαιρέσουμε αυτά τα σημεία, δηλαδή αν περιοριστούμε στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$, τότε η $y=f(x)$ είναι συνεχής. Παρατηρούμε, επίσης, ότι η $y=f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και θα διακρίνουμε δυο περιπτώσεις σχετικά με τη συνάρτηση αυτή.

Περίπτωση 1. Έστω ότι η $y=f(x)$ δεν ορίζεται στον $-\pi$, δηλαδή ότι ο παρονομαστής της είναι 0 στον $-\pi$. Επειδή η συνάρτηση έχει περίοδο 2π, δεν ορίζεται ούτε στον π. Τώρα, είτε η συνάρτηση ορίζεται στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής στο $(-\pi,\pi)$, είτε δεν ορίζεται σε διάφορα σημεία του $(-\pi,\pi)$, οπότε είναι συνεχής σε διάφορα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$. Ένας καλός τρόπος να μελετήσουμε την $y=f(x)$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ είναι να θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$. Προσέξτε: αυτή η αλλαγή μεταβλητής δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μεγαλύτερο διάστημα αφού η $u=\tan\frac{x}{2}$ δεν ορίζεται στους $\pm\pi$. Η $u=\tan\frac{x}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα, διότι $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2(\cos\frac{x}{2})^2}>0$ για κάθε x στο $(-\pi,\pi)$. Είναι $\lim_{x\to-\pi+}\tan\frac{x}{2}=-\infty$ και $\lim_{x\to\pi-}\tan\frac{x}{2}=+\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της $u=\tan\frac{x}{2}$ είναι το διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Η αντίστροφη αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=2\arctan u$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\pi,\pi)$. Άρα, καθώς η μεταβλητή x αυξάνει και διατρέχει το διάστημα $(-\pi,\pi)$, η u αυξάνει και διατρέχει το $(-\infty,+\infty)$ και αντιστρόφως. Τώρα, είναι $\cos x=\frac{1-(\tan\frac{x}{2})^2}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}=\frac{2u}{1+u^2}$, οπότε η $y=f(x)=r(\cos x,\sin x)$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στην $y=g(u)=r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2},\frac{2u}{1+u^2}\big)$ στο διάστημα $(-\infty,\infty)$. *Το σημαντικό είναι ότι η νέα αυτή συνάρτηση είναι ρητή συνάρτηση του* u.

Παράδειγμα: Στην $y=f(x)=\frac{2(\cos x)^3\sin x+3\cos x(\sin x)^2-(\cos x)^3-\sin x}{(\cos x)^2+\sin x}$ στο $(-\pi,\pi)$ του προηγούμενου παραδείγματος αντιστοιχεί η συνάρτηση $y=g(u)=\frac{2\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}\big)^3\frac{2u}{1+u^2}+3\frac{1-u^2}{1+u^2}\big(\frac{2u}{1+u^2}\big)^2-\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}\big)^3-\frac{2u}{1+u^2}}{\big(\frac{1-u^2}{1+u^2}\big)^2+\frac{2u}{1+u^2}}=\frac{-1+2u+14u^2-18u^3+6u^5-14u^6+2u^7+u^8}{1+2u+6u^3-2u^4+6u^5+2u^7+u^8}$ στο $(-\infty,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f(x)=g(u)=g(\tan\frac{x}{2})$ και $g(u)=f(x)=f(2\arctan u)$ και, επομένως, ότι οι $y=f(x)$ και $y=g(u)$ προκύπτουν η μια από την άλλη μέσω σύνθεσης με συνεχή συνάρτηση. Άρα, αν η $y=f(x)$ είναι συνεχής σε κάποιον x στο $(-\pi,\pi)$, τότε η $y=g(u)$ είναι συνεχής στον αντίστοιχο u στο $(-\infty,+\infty)$ και αντιστρόφως. Επίσης, αν η $y=f(x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον x στο $(-\pi,\pi)$, τότε η $y=g(u)$ δεν ορίζεται στον αντίστοιχο u στο $(-\infty,+\infty)$ και αντιστρόφως.

Βάσει των παραπάνω, για να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $y=f(x)$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ αρκεί να βρούμε τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $y=g(u)$ στο $(-\infty,\infty)$, δηλαδή να βρούμε τις ρίζες ενός *πολυωνύμου*. Ειδικότερα, αν η $y=g(u)$ ορίζεται και, επομένως, είναι συνεχής στο $(-\infty,\infty)$, τότε η $y=f(x)$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\pi,\pi)$. Αν η $y=g(u)$ δεν ορίζεται στους $u_1,\dots,u_n$ με $-\infty<u_1<\cdots<u_n<+\infty$, οπότε είναι συνεχής στα διαδοχικά υποδιαστήματα $(-\infty,u_1),(u_1,u_2),\dots,(u_{n-1},u_n)$, $(u_n,+\infty)$, τότε η $y=f(x)$ δεν ορίζεται στους αντίστοιχους $x_1,\dots,x_n$ με $-\pi<x_1<\cdots<x_n<\pi$ και είναι συνεχής στα διαδοχικά υποδιαστήματα $(-\pi,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_{n-1},x_n),(x_n,\pi)$. Δεν ξεχνάμε ότι οι x_i και u_i αλληλοκαθορίζονται μέσω των σχέσεων $u_i=\tan\frac{x_i}{2}$ και $x_i=2\arctan u_i$.

Επίσης, είναι $\frac{du}{dx}=\frac{1}{2(\cos\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}\big(1+(\tan\frac{x}{2})^2\big)=\frac{1+u^2}{2}$. Επομένως, αν περιορίσουμε τον υπολογισμό του $\int r(\sin x,\cos x)\,dx$ *κατ΄ αρχάς* στο διάστημα $(-\pi,\pi)$, τότε είναι

$$\begin{aligned}\int r(\sin x,\cos x)\,dx &= \int f(x)\,dx = \int g(u)\frac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}}\\ &= \int r\Big(\frac{1-u^2}{1+u^2},\frac{2u}{1+u^2}\Big)\frac{2}{1+u^2}\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

Άρα το αρχικό ολοκλήρωμα της $y=f(x)=r(\cos x,\sin x)$ στα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$ στα οποία αυτή ορίζεται και είναι συνεχής ανάγεται στο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\infty,+\infty)$.

Έστω, λοιπόν, ότι υπολογίζουμε το $\int g(u)\frac{2}{1+u^2}\,du=G(u)+c$, όπου η $y=G(u)$ είναι κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση του u στα κατάλληλα υποδιαστήματα του $(-\infty,+\infty)$. Τότε, βάσει των παραπάνω, είναι

$$\int r(\cos x,\sin x)\,dx=\int f(x)\,dx=G\Big(\tan\frac{x}{2}\Big)+c=F(x)+c$$

στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του $(-\pi,\pi)$.

Πρέπει, τώρα, να παρατηρήσουμε ότι το τελευταίο συμπέρασμα ισχύει όχι μόνο στο $(-\pi,\pi)$ αλλά και σε κάθε διάστημα $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ ($k\in\mathbf{Z}$). Αυτό συμβαίνει επειδή, όπως η $y=f(x)$ έχει περίοδο 2π, έτσι και η $y=F(x)=G\big(\tan\frac{x}{2}\big)$ έχει περίοδο 2π. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι ισχύει $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ σε κάποιο υποδιάστημα (a,b) του $(-\pi,\pi)$ στο οποίο η $y=f(x)$ είναι συνεχής. Αυτό, φυσικά, ισοδυναμεί με το ότι $F'(x)=f(x)$ στο ίδιο υποδιάστημα. Θεωρούμε το αντίστοιχο υποδιάστημα $(a+k2\pi,b+k2\pi)$ του $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$, οπότε για κάθε x στο $(a+k2\pi,b+k2\pi)$ το $x-k2\pi$ ανήκει στο (a,b) και, επομένως, $F'(x)=F'(x-k2\pi)=f(x-k2\pi)=f(x)$. Άρα είναι $\int f(x)\,dx=F(x)+c$ και στο $(a+k2\pi,b+k2\pi)$.

Έχει, επομένως, τελειώσει ο υπολογισμός του $\int r(\cos x,\sin x)\,dx$ σε κάθε υποδιάστημα του $(-\infty,+\infty)$ στο οποίο η $y=f(x)=r(\cos x,\sin x)$ ορίζεται και είναι συνεχής.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{\sin x}\,dx$.

Το παράδειγμα αυτό εμπίπτει στην Περίπτωση 1 διότι η $y=\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Θα εργαστούμε κατ΄ αρχάς στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$ η $y=\frac{1}{\sin x}$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται στην $y=\frac{1+u^2}{2u}$ στο $(-\infty,+\infty)$. Η $y=\frac{1+u^2}{2u}$ δεν ορίζεται μόνο στον 0 στο $(-\infty,+\infty)$ και η $y=\frac{1}{\sin x}$ δεν ορίζεται μόνο στον 0 στο $(-\pi,\pi)$. Τώρα έχουμε $\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}\,du\big|_{u=\tan\frac{x}{2}}=\int\frac{1}{u}\,du\big|_{u=\tan\frac{x}{2}}=\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|+c$ στα υποδιαστήματα $(-\pi,0)$ και $(0,\pi)$ του $(-\pi,\pi)$.

Επειδή οι $y=\frac{1}{\sin x}$ και $y=\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, συνεπάγεται $\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|+c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\pi+k2\pi,k2\pi)$ και $(k2\pi,\pi+k2\pi)$ του $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ ($k\in\mathbf{Z}$).

Απλουστεύοντας την απάντηση, γράφουμε: $\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\log\big|\tan\frac{x}{2}\big|+c$ σε κάθε διάστημα $(k\pi,\pi+k\pi)$ ($k\in\mathbf{Z}$).

Έστω, τώρα, γενικότερα, ότι η $y = r(\cos x, \sin x)$ δεν ορίζεται σε κάποιον x_0 ο οποίος μπορεί να είναι $\neq -\pi$.

Τώρα, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $z = x - x_0 - \pi$ οπότε είναι $\cos x = \cos(z + x_0 + \pi) = -\cos(z + x_0) = -\cos x_0 \cos z + \sin x_0 \sin z = p\cos z + q\sin z$, όπου $p = -\cos x_0$ και $q = \sin x_0$, και, παρομοίως, $\sin x = \sin(z + x_0 + \pi) = -\sin(z + x_0) = -\sin x_0 \cos z - \cos x_0 \sin z = -q\cos z + p\sin z$. Τότε είναι $r(\cos x, \sin x) = r(p\cos z + q\sin z, -q\cos z + p\sin z)$ και $\frac{dz}{dx} = 1$, οπότε το ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε

$$\int r(\cos x, \sin x)\, dx = \int r(p\cos z + q\sin z, -q\cos z + p\sin z)\, dz\Big|_{z=x-x_0-\pi} .$$

Όταν η μεταβλητή x διατρέχει το διάστημα $(x_0, x_0 + 2\pi)$ η νέα μεταβλητή z διατρέχει το $(-\pi, \pi)$ και, επειδή η $y = r(\cos x, \sin x)$ δεν ορίζεται στον x_0 , η $y = r(p\cos z + q\sin z, -q\cos z + p\sin z)$ δεν ορίζεται στον $-\pi$. Αναγόμαστε, λοιπόν, στην ειδική περίπτωση που ήδη μελετήσαμε.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx$. Το ολοκλήρωμα αυτό μας είναι ήδη γνωστό και είναι ευκαιρία να ελέγξουμε τη μέθοδο που αναπτύξαμε.

Η $y = \frac{1}{(\cos x)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\frac{\pi}{2}$ (αλλά ορίζεται στον $-\pi$). Με την αλλαγή μεταβλητής $z = x - (-\frac{\pi}{2}) - \pi = x - \frac{\pi}{2}$ η $y = \frac{1}{(\cos x)^2}$ μετατρέπεται στην $y = \frac{1}{(\cos(z+\frac{\pi}{2}))^2} = \frac{1}{(\sin z)^2}$ και, επίσης, $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\, dz\big|_{z=x-\frac{\pi}{2}}$.

Τώρα, η $y = \frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον $-\pi$ και θα εργαστούμε κατ' αρχάς στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

Με την αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{z}{2}$ η $y = \frac{1}{(\sin z)^2}$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ μετατρέπεται στην $y = \frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ στο $(-\infty, +\infty)$. Η $y = \frac{(1+u^2)^2}{4u^2}$ δεν ορίζεται στον 0 στο $(-\infty, +\infty)$ και η $y = \frac{1}{(\sin z)^2}$ δεν ορίζεται στον 0 στο $(-\pi, \pi)$. Τώρα, $\int \frac{1}{(\sin z)^2}\, dz = \int \frac{(1+u^2)^2}{4u^2} \frac{2}{1+u^2}\, du\big|_{u=\tan\frac{z}{2}} = \int \frac{1+u^2}{2u^2}\, du\big|_{u=\tan\frac{z}{2}} = \big(-\frac{1}{2u} + \frac{u}{2}\big)\big|_{u=\tan\frac{z}{2}} + c = -\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\tan\frac{z}{2} + c = -\cot z + c$ στα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

Όταν ο z διατρέχει τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$, ο $x = z + \frac{\pi}{2}$ διατρέχει τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Άρα σ' αυτά τα διαστήματα είναι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \int \frac{1}{(\sin z)^2}\, dz\big|_{z=x-\frac{\pi}{2}} = -\cot(x - \frac{\pi}{2}) + c = \tan x + c$.

Επειδή οι $y = \frac{1}{(\cos x)^2}$ και $y = \tan x$ έχουν και οι δυο περίοδο 2π, συνεπάγεται $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c$ στα αντίστοιχα υποδιαστήματα $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi)$ και $(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ του $(-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Απλουστεύουμε λέγοντας ότι $\int \frac{1}{(\cos x)^2}\, dx = \tan x + c$ σε κάθε διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Περίπτωση 2. Έστω ότι η $y = f(x) = r(\cos x, \sin x)$ ορίζεται στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή ότι ο παρονομαστής της δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Συνεπάγεται, φυσικά, ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Αυτό σημαίνει ότι το $\int f(x)\, dx = \int r(\cos x, \sin x)\, dx$ ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή ότι είναι $\int f(x)\,dx = F(x)+c$, όπου η $y=F(x)$ είναι κάποια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $F'(x)=f(x)$ στο $(-\infty,+\infty)$. Θα δούμε, τώρα, πώς υπολογίζεται η $y=F(x)$.

Όπως στην Περίπτωση 1, θα εργαστούμε, *προσωρινά*, στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ χρησιμοποιώντας την ίδια αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$ και την αντίστροφή της $x=2\arctan u$. Όπως πριν, η $y=f(x)=r(\cos x,\sin x)$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$ μετατρέπεται σε *ρητή συνάρτηση* $y=g(u)=r\big(\frac{1-u^2}{1+u^2},\frac{2u}{1+u^2}\big)$ στο διάστημα $(-\infty,\infty)$. Τώρα, όμως, θα μελετήσουμε πιο προσεκτικά κάποιες ιδιότητες της $y=g(u)$. Επειδή η $y=f(x)$ είναι συνεχής στον π, συνεπάγεται ότι το $\lim_{u\to+\infty} g(u)=\lim_{x\to\pi-} f(x)=f(\pi)$ είναι αριθμός και, επομένως, ο βαθμός του πολυωνύμου στον αριθμητή της $y=g(u)$ δεν είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του πολυωνύμου στον παρονομαστή της. Άρα για τη ρητή συνάρτηση $y=g_1(u)=g(u)\frac{2}{1+u^2}=\frac{a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n}{b_0+b_1u+\cdots+b_mu^m}$ (με $a_n,b_m\neq 0$) είναι $m\geq n+2$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $\lim_{u\to+\infty} ug_1(u)=0$. Επειδή η $y=g(u)$ ορίζεται στο $(-\infty,+\infty)$, το πολυώνυμο $b_0+b_1u+\cdots+b_mu^m$ δεν έχει *καμιά πραγματική ρίζα*. Άρα η ανάλυση της $y=g_1(u)$ σε απλούς λόγους είναι της μορφής

$$\begin{aligned} g_1(u) = {} & \frac{M_1(u-\mu)+N_1}{(u-\mu)^2+\nu^2}+\cdots+\frac{M_\rho(u-\mu)+N_\rho}{((u-\mu)^2+\nu^2)^\rho}+ \\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots+ \\ & +\frac{E_1(u-\epsilon)+\Delta_1}{(u-\epsilon)^2+\delta^2}+\cdots+\frac{E_\tau(u-\epsilon)+\Delta_\tau}{((u-\epsilon)^2+\delta^2)^\tau}\,, \end{aligned}$$

όπου, ειδικότερα, είναι $\nu,\ldots,\delta>0$.

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία ισότητα με τον u και υπολογίζοντας το όριο των δυο πλευρών καθώς $u\to+\infty$, βρίσκουμε εύκολα ότι $M_1+\cdots+E_1=0$. Μελετώντας προσεκτικά τα αποτελέσματά μας για τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων παρατηρούμε ότι το $\int g_1(u)\,du$ είναι ίσο με ένα άθροισμα της μορφής

$$\begin{aligned} \int g_1(u)\,du &= G(u)+c \\ &= \frac{M_1}{2}\log((u-\mu)^2+\nu^2)+\cdots+\frac{E_1}{2}\log((u-\epsilon)^2+\delta^2)+ \\ &\quad +{N_1}'\arctan\frac{u-\mu}{\nu}+\cdots+{\Delta_1}'\arctan\frac{u-\epsilon}{\delta}+ \\ &\quad +h(u)+c, \end{aligned}$$

όπου η $y=h(u)$ είναι μια ρητή συνάρτηση του u στο $(-\infty,+\infty)$ στην οποία ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή. Τώρα, χρησιμοποιώντας τη σχέση $M_1+\cdots+E_1=0$ και ορίζοντας

$$\kappa=({N_1}'+\cdots+{\Delta_1}')\pi,$$

βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\lim_{x\to\pi-} G\Big(\tan\frac{x}{2}\Big)=\lim_{u\to+\infty} G(u)=\frac{\kappa}{2}\,,\quad \lim_{x\to-\pi+} G\Big(\tan\frac{x}{2}\Big)=\lim_{u\to-\infty} G(u)=-\frac{\kappa}{2}\,.$$

Μέχρι τώρα έχουμε υπολογίσει το $\int f(x)\,dx$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$:

$$\int f(x)\,dx=\int g_1(u)\,du\Big|_{u=\tan\frac{x}{2}}=G\Big(\tan\frac{x}{2}\Big)+c.$$

Οι $y=f(x)$ και $y=G(\tan\frac{x}{2})$ έχουν περίοδο 2π, οπότε η σχέση $\int f(x)\,dx=G(\tan\frac{x}{2})+c$ ισχύει σε κάθε διάστημα $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$y=\Phi(x)=\begin{cases} G(\tan\frac{x}{2})+\kappa[\frac{x+\pi}{2\pi}], & \text{αν } x\neq\pi+k2\pi\ (k\in\mathbf{Z}),\\ \frac{\kappa}{2\pi}x, & \text{αν } x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$$

Σε κάθε διάστημα $I_k=(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ είναι $\Phi(x)=G(\tan\frac{x}{2})+k\kappa$, οπότε η $y=\Phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη και, μάλιστα, είναι $\Phi'(x)=f(x)$ στο διάστημα αυτό. Ας δούμε αν η $y=\Phi(x)$ είναι συνεχής στα σημεία $\pi+k2\pi$ που χωρίζουν τα γειτονικά διαστήματα I_k και I_{k+1}. Λόγω περιοδικότητας της $y=G(\tan\frac{x}{2})$ είναι $\lim_{x\to(\pi+k2\pi)+}\Phi(x)=\lim_{x\to(\pi+k2\pi)+}\big(G(\tan\frac{x}{2})+(k+1)\kappa\big)=\lim_{x\to-\pi+}G(\tan\frac{x}{2})+(k+1)\kappa=-\frac{1}{2}\kappa+(k+1)\kappa=(k+\frac{1}{2})\kappa=\Phi(\pi+k2\pi)$ και $\lim_{x\to(\pi+k2\pi)-}\Phi(x)=\lim_{x\to(\pi+k2\pi)-}\big(G(\tan\frac{x}{2})+k\kappa\big)=\lim_{x\to\pi-}G(\tan\frac{x}{2})+k\kappa=\frac{1}{2}\kappa+k\kappa=(k+\frac{1}{2})\kappa=\Phi(\pi+k2\pi)$. Άρα η $y=\Phi(x)$ είναι συνεχής σε κάθε $\pi+k2\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η $y=\Phi(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$, παραγωγίσιμη σε κάθε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ και ισχύει $\Phi'(x)=f(x)$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Αν η $y=F(x)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $y=f(x)$ στο $(-\infty,+\infty)$ – αυτό που ζητάμε να υπολογίσουμε – τότε η $y=F(x)$ είναι παραγωγίσιμη και $F'(x)=f(x)$ στο $(-\infty,+\infty)$. Συνεπάγεται ότι η $y=\Phi(x)-F(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$, παραγωγίσιμη σε κάθε $(-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$ και ισχύει $(\Phi-F)'(x)=0$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Άρα η $y=\Phi(x)-F(x)$ είναι σταθερή σε κάθε *κλειστό* διάστημα $[-\pi+k2\pi,\pi+k2\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$. Επομένως, η $y=\Phi(x)-F(x)$ είναι σταθερή στο $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή υπάρχει αριθμός c_0 ώστε να είναι $\Phi(x)=F(x)+c_0$ για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$. Επομένως, και η $y=\Phi(x)$ είναι αόριστο ολοκλήρωμα της $y=f(x)$ στο $(-\infty,+\infty)$ και μπορούμε να θεωρήσουμε ως $y=F(x)$ την ίδια την $y=\Phi(x)$. Συμπεραίνουμε, επομένως, ότι

$$\int r(\cos x,\sin x)\,dx=\Phi(x)+c$$

στο $(-\infty,+\infty)$.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx$.

Η $y=\frac{1}{2+\sin x}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$. Κατ' αρχάς εργαζόμαστε στο $(-\pi,\pi)$ με την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$ και έχουμε $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\int\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\,du\big|_{u=\tan\frac{x}{2}}=\int\frac{1}{u^2+u+1}\,du\big|_{u=\tan\frac{x}{2}}$. Τώρα, είναι $\int\frac{1}{u^2+u+1}\,du=\int\frac{1}{(u+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,du=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+c$ στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+c$ στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

Οι $y=\frac{1}{2+\sin x}$ και $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ έχουν περίοδο 2π και, επομένως, η σχέση $\int\frac{1}{2+\sin x}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\big(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\big)+c$ ισχύει σε κάθε διάστημα

$(-\pi + k2\pi, \pi + k2\pi)$. Τώρα, είναι $\lim_{x\to\pi-} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ και $\lim_{x\to-\pi+} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Τέλος, ορίζουμε την $y = \Phi(x) =$
$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}[\frac{x+\pi}{2\pi}], & x \neq \pi + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z}), \\ \frac{1}{\sqrt{3}} x, & x = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$

Η $y = \Phi(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ και $\int \frac{1}{2+\sin x}\, dx = \Phi(x) + c$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Ε. Ολοκληρώματα μερικών αλγεβρικών συναρτήσεων.

Τώρα θα υπολογίσουμε αόριστα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int r\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\, dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2-1}\big)\, dx, \qquad \int r\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\, dx.$$

Και στα τρία αυτά ολοκληρώματα η συνάρτηση $r(s,t)$ είναι ρητή συνάρτηση δυο μεταβλητών s, t.

(i) Το πρώτο αόριστο ολοκλήρωμα ορίζεται κατ΄ αρχάς στο διάστημα $[-1,1]$ και είναι φυσιολογικό να χρησιμοποιηθεί η αλλαγή μεταβλητής $x = \sin t$ με τον t στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Τότε $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ και προκύπτει το $\int r(\sin t, \cos t) \cos t\, dt$, στο οποίο, όπως είδαμε στην υποενότητα Δ, θα γίνει νέα αλλαγή μεταβλητής $u = \tan\frac{t}{2}$. Μετά από λίγες πράξεις παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Είναι, λοιπόν, προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε κατ΄ ευθείαν την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$, διότι $\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}} > 0$ για κάθε x στο $(-1,1)$ και το σύνολο τιμών της είναι, επίσης, το διάστημα $[-1,1]$. Εύκολα υπολογίζουμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης, ο οποίος είναι $x = \frac{2u}{1+u^2}$. Επίσης, έχουμε και τις ισότητες $\sqrt{1-x^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $\frac{du}{dx} = \frac{(1+u^2)^2}{2(1-u^2)}$. Επομένως,

$$\int r\big(x, \sqrt{1-x^2}\big)\, dx = \int r\Big(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\Big) \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\, dy\Big|_{u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}.$$

Αναγόμαστε έτσι σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $[-1,1]$ και συνεχίζουμε όπως ορίζει η υποενότητα Γ.

Φυσικά, για να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x, \sqrt{1-x^2})$ ενδέχεται να πρέπει να περιορισθεί ο x σε κάποια υποδιαστήματα του $[-1,1]$. Αυτό, όμως, εξαρτάται από το συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα: Θα βρούμε το $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\, dx$ στα υποδιαστήματα $[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ και $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ του $[-1,1]$.

Ο περιορισμός στα υποδιαστήματα αυτά του $[-1,1]$ χρειάζεται, επειδή πρέπει να είναι $x + \sqrt{1-x^2} \neq 0$ ή ισοδύναμα $x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Επομένως, ο $u = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$ περιορίζεται είτε στο διάστημα $[-1, 1-\sqrt{2})$ είτε στο $(1-\sqrt{2}, 1]$, αντιστοίχως, και έχουμε: $\int \frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\, dx = 2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\, du\Big|_{u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}}$. Κατόπιν, υπολογίζουμε το $2\int \frac{1-u^2}{(1+2u-u^2)(1+u^2)}\, du$ ως ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\frac{1}{2}\log\frac{|1+2u-u^2|}{1+u^2}+\arctan u+c$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο αποτέλεσμα $\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{1-x^2}|+\arctan\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+c$.

(ii) Το δεύτερο ολοκλήρωμα ορίζεται είτε στο $[1,+\infty)$ είτε στο $(-\infty,-1]$. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση του $[1,+\infty)$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=\frac{1}{\sin t}$ με τον t στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2}]$. Τότε είναι $\sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t}$ και το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $-\int r(\frac{1}{\sin t},\frac{\cos t}{\sin t})\frac{\cos t}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της υποενότητας Δ, θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι μεταβλητές x και u συνδέονται με τη σχέση $u=x+\sqrt{x^2-1}$, οπότε χρησιμοποιούμε κατ΄ ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής χωρίς να μεσολαβήσει ο t. Θεωρούμε, λοιπόν, την αλλαγή μεταβλητής $u=x+\sqrt{x^2-1}$. Η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, διότι $\frac{du}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}>0$ για κάθε x στο $(1,+\infty)$. Βρίσκουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=+\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $[1,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $x=\frac{u^2+1}{2u}$ και δυο ακόμη χρήσιμες ισότητες είναι οι $\sqrt{x^2-1}=\frac{u^2-1}{2u}$ και $\frac{du}{dx}=\frac{2u^2}{u^2-1}$. Άρα

$$\int r\big(x,\sqrt{x^2-1}\big)\,dx=\int r\Big(\frac{u^2+1}{2u},\frac{u^2-1}{2u}\Big)\frac{u^2-1}{2u^2}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$$

και έχουμε πάλι αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το αρχικό αόριστο ολοκλήρωμα στο διάστημα $(-\infty,-1]$, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=x-\sqrt{x^2-1}$ και καταλήγουμε σε αόριστο ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $(-\infty,-1]$. Οι λεπτομέρειες είναι παρόμοιες με τις παραπάνω.

Φυσικά, εκτός από τον περιορισμό στα διαστήματα $(-\infty,-1]$ ή $[1,+\infty)$, ενδέχεται να πρέπει να περιοριστούμε σε μικρότερα διαστήματα ώστε να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής του $r(x,\sqrt{x^2-1})$.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$ στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Δε χρειάζεται ο περιορισμός σε μικρότερα διαστήματα, διότι $x+\sqrt{x^2-1}\neq 0$ στο $[1,+\infty)$. Άρα $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int(\frac{1}{2u}-\frac{1}{2u^3})\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}$. Τώρα, είναι $\int(\frac{1}{2u}-\frac{1}{2u^3})\,du=\frac{1}{2}\log|u|+\frac{1}{4u^2}+c$, οπότε $\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx=\frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|+\frac{1}{4(x+\sqrt{x^2-1})^2}+c$.

(iii) Το τρίτο ολοκλήρωμα ορίζεται στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ και μια φυσιολογική αλλαγή μεταβλητής είναι η $x=-\cot t$ με τον t στο $(0,\pi)$. Τότε $\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sin t}$ και το ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\int r(-\frac{\cos t}{\sin t},\frac{1}{\sin t})\frac{1}{(\sin t)^2}\,dt$, οπότε, βάσει της υποενότητας Δ, χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{t}{2}$. Όμως, τότε $u=x+\sqrt{x^2+1}$, οπότε θεωρούμε κατ΄ ευθείαν αυτή την αλλαγή μεταβλητής. Η $u=x+\sqrt{x^2+1}$ είναι γνησίως αύξουσα διότι $\frac{du}{dx}=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$ για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$. Υπολογίζουμε εύκολα τα όρια $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=0$ και $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+1})=+\infty$, οπότε το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0,+\infty)$. Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι $x = \frac{u^2-1}{2u}$. Επίσης, ισχύουν οι ισότητες $\sqrt{x^2+1} = \frac{u^2+1}{2u}$ και $\frac{du}{dx} = \frac{2u^2}{u^2+1}$. Άρα

$$\int r\big(x, \sqrt{x^2+1}\big)\, dx = \int r\Big(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\Big)\frac{u^2+1}{2u^2}\, du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$$

και καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης του u στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Παράδειγμα: Θα υπολογίσουμε το $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx$ είτε στο διάστημα $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0,+\infty)$.

Ο περιορισμός του x στα δυο αυτά υποδιαστήματα είναι αυτονόητος, οπότε και ο $u = x+\sqrt{x^2+1}$ περιορίζεται, αντιστοίχως, είτε στο διάστημα $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$. Καταλήγουμε στην ισότητα $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx = 2\int \frac{1}{u^2-1}\, du\big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}$ και υπολογίζουμε το $2\int \frac{1}{u^2-1}\, du$ είτε στο διάστημα $(0,1)$ είτε στο $(1,+\infty)$ και βρίσκουμε ότι είναι ίσο με $\log|u-1| - \log(u+1) + c$. Επομένως, $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx = \log \frac{|x|}{1+\sqrt{x^2+1}} + c$.

Βάσει των παραπάνω τριών τύπων ολοκληρωμάτων, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ολοκληρώματα του τύπου

$$\int r\big(x, \sqrt{\kappa x^2 + \lambda x + \mu}\big)\, dx,$$

όπου κ, λ, μ είναι αριθμοί, $\kappa \neq 0$ και η $r(s,t)$ είναι μια ρητή συνάρτηση των s,t.

Πράγματι, αφού γράψουμε $\kappa x^2+\lambda x+\mu = \kappa\big((x+\frac{\lambda}{2\kappa})^2 + \frac{4\kappa\mu-\lambda^2}{4\kappa^2}\big)$, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $\kappa > 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 > 0$. Θεωρώντας την απλή αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}(x+\frac{\lambda}{2\kappa})$, βλέπουμε αμέσως ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο $\frac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\kappa}\int r\big(-\frac{\lambda}{2\kappa}+\frac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\kappa}u, \frac{\sqrt{4\kappa\mu-\lambda^2}}{2\sqrt{\kappa}}\sqrt{u^2+1}\big)\, du = \int R(u, \sqrt{u^2+1})\, du$, όπου $R(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.

Περίπτωση 2: $\kappa > 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 < 0$. Τώρα χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{2\kappa}{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}(x+\frac{\lambda}{2\kappa})$ και μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\int r\big(-\frac{\lambda}{2\kappa}+\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}u, \frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\sqrt{\kappa}}\sqrt{u^2-1}\big)\, du = \int R(u, \sqrt{u^2-1})\, du$, όπου $R(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.

Περίπτωση 3: $\kappa < 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 < 0$. Τώρα χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{-2\kappa}{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}(x+\frac{\lambda}{2\kappa})$ και μετατρέπουμε το αόριστο ολοκλήρωμα στο $-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}\int r\big(-\frac{\lambda}{2\kappa}-\frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\kappa}u, \frac{\sqrt{\lambda^2-4\kappa\mu}}{2\sqrt{-\kappa}}\sqrt{1-u^2}\big)\, du = \int R(u, \sqrt{1-u^2})\, du$, όπου $R(s,t)$ είναι μια νέα ρητή συνάρτηση των s,t.

Η περίπτωση $\kappa < 0$ και $4\kappa\mu - \lambda^2 > 0$ αποκλείεται διότι τότε δεν ορίζεται σε κανένα σημείο η $\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu}$. Οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, όπου ένας τουλάχιστον από τους κ και $4\kappa\mu-\lambda^2$ είναι 0, καταλήγει σε ολοκλήρωμα του οποίου ο υπολογισμός είναι απλός.

Τα ολοκληρώματα $\int r(x,\sqrt{\kappa x^2+\lambda x+\mu})\,dx$ με $\kappa\neq 0$ είναι ειδική περίπτωση των ολοκληρωμάτων $\int r(x,a(x))\,dx$, όπου η $y=a(x)$ είναι οποιαδήποτε αλγεβρική συνάρτηση του x. Τα ολοκληρώματα αυτά ονομάζονται **ολοκληρώματα του Abel** ή **αβελιανά ολοκληρώματα**. Μια ακόμη ειδική περίπτωση αβελιανών ολοκληρωμάτων είναι αυτά για τα οποία $y=a(x)=\sqrt{\rho x^4+\sigma x^3+\kappa x^2+\lambda x+\mu}$, όπου ένας τουλάχιστον από τους ρ και σ είναι $\neq 0$, και ονομάζονται **ελλειπτικά ολοκληρώματα**, διότι έχουν άμεση σχέση με υπολογισμό μηκών ελλειπτικών τόξων. Δείτε την άσκηση Β8 αυτής της ενότητας.

Πρέπει να πούμε ότι έχει αποδειχτεί ότι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα *δεν ανάγονται σε στοιχειώδεις συναρτήσεις*, αλλά αποτελούν ειδική κατηγορία συναρτήσεων, τις λεγόμενες **ελλειπτικές συναρτήσεις**.

Ασκήσεις.

Α. Απλές αλλαγές μεταβλητής.

1. Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.

   (i) $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

   (ii) $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$ για κάθε $\lambda>0$.

   Μελετήστε το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων, θεωρώντας επιπλέον ότι είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε x στο $[a,b]$.

2. Αν η $y=f(x)$ είναι άρτια, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

   Αν η $y=f(x)$ είναι περιττή, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$.

   Αν η $y=f(x)$ είναι άρτια, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=2\int_0^b f(x)\,dx$.

   Αν η $y=f(x)$ είναι περιττή, αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=0$.

   Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

3. Αν η $y=f(x)$ είναι περιοδική με περίοδο $T>0$, αποδείξτε ότι

   (i) $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

   (ii) $\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_b^{b+T} f(x)\,dx$.

   Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

Β. Μέθοδοι υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

1. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα με αλλαγές μεταβλητής.

$$\int x^3\cos(x^4)\,dx,\quad \int(\cos x)^2\sin x\,dx,\quad \int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,$$

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx, \quad \int x\sqrt{x+1}\,dx, \quad \int x^2\sqrt{2x+1}\,dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx,$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx, \quad \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int x\sqrt[3]{x-1}\,dx, \quad \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx,$$

$$\int \cos(2x)\sqrt{4-\sin(2x)}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}\,dx, \quad \int \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos x)^3}\,dx,$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx, \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx, \quad \int x^2 e^{x^3}\,dx, \quad \int e^{3\sin x}\cos x\,dx,$$

$$\int \tan x\,dx, \quad \int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \int \sqrt{1+3(\cos x)^2}\,\sin(2x)\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{1}{4+x^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^2-x+2}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{x(x^4+1)}\,dx, \quad \int x\sin(x^2)\cos(x^2)\,dx, \quad \int (\sin x)^3\,dx, \quad \int \frac{(\cos x)^3}{\sin x}\,dx,$$

$$\int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx, \quad \int \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx, \quad \int \frac{1}{1+e^x}\,dx.$$

2. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής.

$$\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx, \quad \int e^x\cos(5x)\,dx, \quad \int x^3 e^{2x}\,dx, \quad \int x^3 e^{-x^2}\,dx,$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int x^2\sin x\,dx, \quad \int x\log x\,dx, \quad \int x^2(\log x)^4\,dx,$$

$$\int \arcsin x\,dx, \quad \int x^2\arccos x\,dx, \quad \int \arctan x\,dx, \quad \int x^2\arcsin x\,dx,$$

$$\int x(\arctan x)^2\,dx, \quad \int \arctan\sqrt{x}\,dx, \quad \int (\cos x)^2\,dx, \quad \int (\sin x)^4\,dx,$$

$$\int (\sin x)^3\sin(5x)\,dx, \quad \int \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx, \quad \int (\tan x)^2\,dx,$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx, \quad \int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\,dx, \quad \int \frac{xe^{\arctan x}}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

3. Έχουμε μελετήσει τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων $I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\,dy$. Γράψτε τους τύπους των $I_1, \ldots, I_5$.

4. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

$$\int \frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx, \quad \int \frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx, \quad \int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx,$$

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}\,dx, \quad \int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx, \quad \int \frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{x^4-1}\,dx, \quad \int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx, \quad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx,$$

$$\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx, \quad \int \frac{1}{x^4-2x^2+1}\,dx, \quad \int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx, \quad \int \frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^4+4x^2+4)}\,dx, \quad \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^4}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{(x^2-2x+1)(x^4+2x^2+1)}\,dx, \quad \int \frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}\,dx.$$

5. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των $\sin x$ και $\cos x$.

$$\int \frac{1}{(1+\cos x)^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{1+2\sin x}\,dx, \quad \int \frac{1}{5+3\cos x}\,dx,$$

$$\int \frac{(\sin x)^2}{1+(\sin x)^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx, \quad \int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,dx.$$

6. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx, \quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}\,dx, \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$$

7. Υπολογίστε:

   (i) το εμβαδό της ελλειπτικής επιφάνειας της άσκησης Α2 της ενότητας 7.4 με τη μέθοδο των παράλληλων διατομών.

   (ii) το εμβαδό των επιφανειών των ασκήσεων Α3, Α4 και Α5 της ενότητας 7.4 αν εκφραστούν με τη μέθοδο των κυκλικών διατομών.

   (iii) τον όγκο του ελλειψοειδούς της άσκησης Β1 της ενότητας 7.4.

   (iv) το μήκος οποιουδήποτε τόξου της παραβολής της άσκησης Γ1 της ενότητας 7.4.

   (v) το μήκος οποιουδήποτε τόξου της σπείρας του Αρχιμήδη και της υπερβολικής σπείρας της άσκησης Γ4 της ενότητας 7.4.

8. Εκφράστε το μήκος οποιουδήποτε τόξου της έλλειψης της άσκησης Γ5 καθώς και της υπερβολής της άσκησης Γ2 της ενότητας 7.4 στη μορφή ελλειπτικού ολοκληρώματος.

Γ. Αναδρομικοί τύποι.

1. Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $y = f_n(x)$ για κάθε φυσικό n, αρχίζοντας από την $f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ και συνεχίζοντας με τον αναδρομικό τύπο $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$.

   Αποδείξτε ότι είναι $f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt$ για κάθε n.

2. Αν $J_n(x) = \int (\cos x)^n\,dx$ και $I_n(x) = \int (\sin x)^n\,dx$, αποδείξτε ότι για κάθε φυσικό $n \geq 2$ είναι:

   (i) $J_n(x) = \frac{\sin x (\cos x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}(x)$,

   (ii) $I_n(x) = -\frac{\cos x (\sin x)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)$.

   Βρείτε τις συναρτήσεις $y = J_1(x), \ldots, J_6(x)$ και $y = I_1(x), \ldots, I_6(x)$.

   Γενικεύστε.

3. Ορίζουμε $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,dx$ για κάθε φυσικό n. Εφαρμόστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και αποδείξτε ότι είναι $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ για κάθε $n \geq 2$.

   Είναι προφανές ότι $I_0 = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε n είναι:

   (i) $I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$,

   (ii) $I_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}$.

   Αποδείξτε ότι για κάθε n είναι:

   (iii) $\frac{\pi}{2} = \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots (2n))^2}{(3\cdot 5\cdots (2n-1))^2(2n+1)} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$,

   (iv) $(n+1) I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.

   Παρατηρήστε τις σχέσεις $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} = \frac{2n+1}{2n} I_{2n+1}$, από τις οποίες συνεπάγεται $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$.

   Αποδείξτε τον περίφημο **τύπο του Wallis**:

   $$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\big(2\cdot 4\cdot 6\cdots (2n-2)\cdot (2n)\big)^2}{\big(3\cdot 5\cdots (2n-3)\cdot (2n-1)\big)^2 (2n+1)}$$

   καθώς και τον τύπο

   $$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}} .$$

4. Αν $I_n(x) = \int (\tan x)^n\,dx$, αποδείξτε ότι είναι $I_n(x) = \frac{(\tan x)^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}(x)$ για κάθε φυσικό $n \geq 2$.

   Βρείτε τις συναρτήσεις $y = I_1(x), \ldots, I_6(x)$ και γενικεύστε.

5. Αν $I_n(x) = \int x^n e^{-x}\,dx$ και $J_n(x) = \int x^n e^{x}\,dx$, αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ είναι

   (i) $I_n(x) = -x^n e^{-x} + nI_{n-1}(x)$,

   (ii) $J_n(x) = x^n e^{x} - nJ_{n-1}(x)$.

   Βρείτε τις συναρτήσεις $y = I_n(x)$ και $y = J_n(x)$ και να αντιπαραβάλετε με την άσκηση 3 της ενότητας 8.2.

6. Αποδείξτε ότι

$$\int x^n e^{-x^2}\,dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + c \qquad (n \text{ περιττός φυσικός})$$

$$\int x^n e^{-x^2}\,dx = p_{n-1}(x)e^{-x^2} + \int e^{-x^2}\,dx \qquad (n \text{ άρτιος φυσικός})$$

   στο $(-\infty, +\infty)$, όπου $p_{n-1}(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n-1$ και c είναι αυθαίρετη σταθερά.

   Παρεμπιπτόντως, το $\int e^{-x^2}\,dx$ *δεν υπολογίζεται* βάσει των γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων. Το αόριστο ολοκλήρωμα

$$y = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

   θεωρείται πολύ σημαντική συνάρτηση, ειδικά για την περιοχή της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων.

7. Αν $I_{m,n}(x) = \int x^m(1-x)^n\,dx$, αποδείξτε ότι είναι

   (i) $I_{m,n}(x) = \frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}(x)$ για κάθε $m \neq -1$, $n \neq 0$,

   (ii) $I_{m,n}(x) = -\frac{x^m(1-x)^{n+1}}{n+1} + \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}(x)$ για κάθε $m \neq 0$, $n \neq -1$.

   Αποδείξτε ότι $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ για κάθε $m, n \geq 0$.

8. Αν $I_n(x) = \int x^n \sin x\,dx$ και $J_n(x) = \int x^n \cos x\,dx$, αποδείξτε ότι για κάθε ακέραιο n είναι

   (i) $I_n(x) = -x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}(x)$,

   (ii) $J_n(x) = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x - n(n-1)J_{n-2}(x)$.

   Βρείτε τις συναρτήσεις $y = I_n(x)$ και $y = J_n(x)$.

9. Αν $I_{m,n}(x) = \int(\cos x)^m(\sin x)^n\,dx$, αποδείξτε ότι για όλους τους φυσικούς m, n είναι

   (i) $I_{m,n}(x) = \frac{(\cos x)^{m-1}(\sin x)^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}I_{m-2,n}(x)$,

   (ii) $I_{m,n}(x) = -\frac{(\cos x)^{m+1}(\sin x)^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}(x)$.

   Αν $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^m(\sin x)^n\,dx$, αποδείξτε ότι για όλους τους φυσικούς m, n είναι

(i) $I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots 1\cdot(n-1)(n-3)\cdots 1}{(m+n)(m+n-2)\cdots 2}\,\frac{\pi}{2}$ αν και οι δυο m, n είναι άρτιοι,

(ii) $I_{m,n} = \frac{(m-1)(m-3)\cdots(1\text{ ή }2)\cdot(n-1)(n-3)\cdots(1\text{ ή }2)}{(m+n)(m+n-2)\cdots(1\text{ ή }2)}$ αν ένας τουλάχιστον από τους m, n είναι περιττός.

10. Αν $I_{m,n}(x) = \int (\sin x)^m \sin(nx)\,dx$, αποδείξτε ότι, αν $n \neq \pm m$, τότε είναι $I_{m,n}(x) = -\frac{n(\sin x)^m\cos(nx)}{n^2-m^2} + \frac{m(\sin x)^{m-1}\cos x\sin(nx)}{n^2-m^2} - \frac{m(m-1)}{n^2-m^2} I_{m-2,n}(x)$.

Δ. Άλλες ασκήσεις.

1. Αν η $y = f(x)$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi]$ αποδείξτε ότι είναι $\int_0^\pi \big(f(x) + \frac{1}{n^2}\,f''(x)\big)\sin(nx)\,dx = \frac{f(0)+(-1)^{n-1}f(\pi)}{n}$ για κάθε φυσικό n.

2. (**) **Δεύτερο Θεώρημα Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού**. Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει συνεχή παράγωγο και είναι μονότονη στο $[a, b]$ και ότι η $y = g(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει κάποιος ξ στο $[a, b]$ ώστε να είναι

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Για την απόδειξη θεωρήστε την $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, γράψτε $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx$ και, μετά από μια ολοκλήρωση κατά μέρη, εφαρμόστε τη γενίκευση του Θεωρήματος 7.4 στην άσκηση Δ2 της ενότητας 7.3.

3. (**) Αν η $y = \phi(x)$ έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[a, b]$ και η $y = \phi'(x)$ είναι μονότονη στο $[a, b]$ και υπάρχει κάποιος αριθμός $m > 0$ ώστε να είναι $\phi'(x) \geq m$ για κάθε x στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b \sin(\phi(x))\,dx\big| \leq \frac{4}{m}$.

   (Υπόδειξη: $\big|\int_a^b \sin(\phi(x))\,dx\big| = \big|\int_a^b \frac{1}{\phi'(x)}\phi'(x)\sin(\phi(x))\,dx\big|$. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης.)

   Αποδείξτε ότι $\big|\int_a^b \sin(x^2)\,dx\big| \leq \frac{2}{a}$ για κάθε a, b με $0 < a < b$.

4. (*) Υποθέτουμε ότι η $x = x(t)$ είναι γνησίως αύξουσα με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$, ότι η $y = y(t)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και ότι $y(t) \geq 0$ για κάθε t στο $[a, b]$.

   Αποδείξτε ότι το εμβαδό της επιφάνειας η οποία περιέχεται ανάμεσα στην καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, καθώς ο t διατρέχει το $[a, b]$, στον x-άξονα και στις ευθείες $x = x(a)$ και $x = x(b)$ είναι ίσο με

$$E = \int_a^b y(t)x'(t)\,dt.$$

   (Υπόδειξη: Δοκιμάστε το $\int_a^b y(t)x'(t)\,dt = \int_a^b y\big(x^{-1}(x(t))\big)x'(t)\,dt$.)

5. (**) Έστω καμπύλη C με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, καθώς ο t διατρέχει το $[a, b]$, η οποία είναι κλειστή, δηλαδή τα δυο άκρα της ταυτίζονται: $(x(b), y(b)) = (x(a), y(a))$. Υποθέτουμε ότι, καθώς ο t αυξάνεται, το $(x, y) = (x(t), y(t))$ περιστρέφεται πάνω στην C με φορά αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού και ότι καμιά οριζόντια ή κατακόρυφη ευθεία δεν τέμνει την C σε περισσότερα από δυο σημεία. Αν οι $x = x(t)$ και $y = y(t)$ έχουν συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$, τότε, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας η οποία περικλείεται από την C είναι ίσο με

$$E = -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt.$$

(Υπόδειξη: Υπάρχουν t_1, t_2, t_3, t_4 στο $[a, b]$ ώστε να είναι $x(t_1) \leq x(t) \leq x(t_3)$ και $y(t_2) \leq y(t) \leq y(t_4)$ για κάθε t στο $[a, b]$. Μελετήστε προσεκτικά τη διάταξη των t_1, t_2, t_3, t_4 καθώς και τη μονοτονία των $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στα διάφορα υποδιαστήματα του $[a, b]$.)

6. Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση με $x = x(t) = r_0 \cos t + x_0$ και $y = y(t) = r_0 \sin t + y_0$ για να υπολογίσετε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας $r_0 > 0$.

   Κάντε το ίδιο για την έλλειψη με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t) = \kappa_0 \cos t + x_0$ και $y = y(t) = \mu_0 \sin t + y_0$

7. (*) Έστω $P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\big((x^2 - 1)^n\big)$.

   Αποδείξτε ότι το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n.

   Αποδείξτε ότι $\int_{-1}^1 p(x)P_n(x)\,dx = 0$ για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού μικρότερου από n.

   Αποδείξτε ότι $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{αν } n = m. \end{cases}$

8.4 Γενικευμένα ολοκληρώματα Riemann.

Ας παρατηρήσουμε τα «ολοκληρώματα»

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_1^{+\infty} x\,dx.$$

Είναι φανερό ότι και τα δυο ξεφεύγουν από το πλαίσιο της θεωρίας των ολοκληρωμάτων που έχουμε αναπτύξει. Στο πρώτο «ολοκλήρωμα» η συνάρτηση $y = \frac{1}{x}$ δεν ορίζεται στο διάστημα $[0, 1]$ και, μάλιστα, δεν είναι καν φραγμένη στο διάστημα αυτό αφού $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Στο δεύτερο «ολοκλήρωμα» το διάστημα $[1, +\infty)$ δεν είναι κλειστό και φραγμένο. Τέτοιου τύπου «ολοκληρώματα», υπό ορισμένες προϋποθέσεις, ονομάζονται *γενικευμένα ολοκληρώματα* και θα τα ορίσουμε αμέσως τώρα.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα $[a, b)$ και ολοκληρώσιμη σε κάθε υποδιάστημα $[a, c]$ του $[a, b)$. Τότε το *σύμβολο*

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx$$

ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** της $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b)$. Αν υπάρχει το όριο $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\, dx$, τότε λέμε ότι **το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{b-} f(x)\, dx$ υπάρχει** και γράφουμε

$$\int_a^{b-} f(x)\, dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\, dx.$$

Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του ορίου $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\, dx$ ονομάζεται **τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος**. Αν το όριο $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\, dx$ δεν υπάρχει, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{b-} f(x)\, dx$ **αποκλίνει**. Αν το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι ίσο με $\pm\infty$, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{b-} f(x)\, dx$ **αποκλίνει στο** $\pm\infty$, αντιστοίχως. Αν το $\lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι αριθμός, λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{b-} f(x)\, dx$ **συγκλίνει**.

Όλα όσα είπαμε ισχύουν με την ανάλογη διατύπωση και ορολογία και στις υπόλοιπες περιπτώσεις διαστημάτων: $[a, +\infty)$, $(a, b]$ και $(-\infty, b]$. Ας γράψουμε, μόνο, τις τιμές (αν υπάρχουν) των αντίστοιχων γενικευμένων ολοκληρωμάτων:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx,$$

$$\int_{a+}^b f(x)\, dx = \lim_{c\to a+} \int_c^b f(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Μερικές φορές παρουσιάζονται γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a+}^{b-} f(x)\, dx$, όπου η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b). Για να υπολογίσουμε την τιμή ενός τέτοιου γενικευμένου ολοκληρώματος παίρνουμε οποιονδήποτε ενδιάμεσο αριθμό d (δηλαδή $a < d < b$), υπολογίζουμε τις τιμές (αν υπάρχουν) των δυο γενικευμένων ολοκληρωμάτων $\int_{a+}^d f(x)\, dx$ και $\int_d^{b-} f(x)\, dx$ και (αν δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή) τις προσθέτουμε. Δηλαδή $\int_{a+}^{b-} f(x)\, dx = \int_{a+}^d f(x)\, dx + \int_d^{b-} f(x)\, dx$.

Ομοίως ορίζονται γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_{a+}^{+\infty} f(x)\, dx$ ή $\int_{-\infty}^{b-} f(x)\, dx$ ή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Ποιο είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της έννοιας του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{b-} f(x)\, dx$; Ας θεωρήσουμε την περίπτωση που είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b)$. Τότε για κάθε c στο διάστημα (a, b) το $\int_a^c f(x)\, dx$ είναι ίσο με το εμβαδό E_c της επιφάνειας A_c που περικλείεται από το γράφημα της $y = f(x)$, από το διάστημα $[a, c]$ του x-άξονα, από το ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και από το ευθ. τμήμα με άκρα $(c, 0)$ και $(c, f(c))$. Όταν ο c αυξάνεται και πλησιάζει τον b, το τελευταίο ευθ. τμήμα μετακινείται προς τα δεξιά πλησιάζοντας την κατακόρυφη ευθεία $x = b$ και, επομένως, η προηγούμενη επιφάνεια A_c «τείνει να ταυτιστεί» με την επιφάνεια A που περικλείεται από το γράφημα της $y = f(x)$, από το διάστημα $[a, b)$ του x-άξονα, από το ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$ και από την κατακόρυφη ευθεία $x = b$. Επειδή η επιφάνεια A_c τείνει να ταυτιστεί με την επιφάνεια A είναι εύλογο να δεχτούμε ότι το εμβαδό E_c της A_c τείνει να γίνει ίσο με το εμβαδό E της A. Άρα το $\int_a^{b-} f(x)\, dx = \lim_{c\to b-} \int_a^c f(x)\, dx$ είναι ίσο με το όριο του εμβαδού E_c όταν ο c πλησιάζει τον b και, επομένως, θα πρέπει να είναι ίσο με το εμβαδό E. Παρατηρήστε ότι, ειδικά στην περίπτωση που η $y = f(x)$ δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $[a, b)$, η επιφάνεια A δεν είναι φραγμένη.

Ακριβώς τα ίδια μπορούμε να πούμε σε κάθε περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος. Για παράδειγμα, αν είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, +\infty)$, τότε το $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ είναι ίσο με το εμβαδό της επιφάνειας A που περικλείεται από το γράφημα της $y = f(x)$, από την ημιευθεία $[a, +\infty)$ του x-άξονα και από το ευθ. τμήμα με άκρα $(a, 0)$ και $(a, f(a))$. Και σ′ αυτήν την περίπτωση η επιφάνεια A δεν είναι φραγμένη.

Είναι σημαντικό να συνειδητοποιηθεί ότι *μια μη φραγμένη επιφάνεια μπορεί να έχει πεπερασμένο εμβαδό.* Παρακάτω θα δούμε αρκετά τέτοια παραδείγματα.

Στην ενότητα αυτή δε θα αναπτύξουμε τη θεωρία των γενικευμένων ολοκληρωμάτων, αλλά θα περιοριστούμε σε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα.

Παραδείγματα: (1) Έστω p οποιοσδήποτε αριθμός. Για κάθε $c > 1$ είναι $\int_1^c \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{c^{1-p}-1}{1-p}$, αν $p \neq 1$, και $= \log c$, αν $p = 1$. Επομένως, είναι $\lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty$, αν $p \leq 1$, και $= \frac{1}{p-1}$, αν $p > 1$. Άρα

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1}\,, & \text{αν } p > 1, \\ +\infty, & \text{αν } p \leq 1. \end{cases}}$$

(2) Έστω p οποιοσδήποτε αριθμός. Για κάθε c με $0 < c < 1$ είναι $\int_c^1 \frac{1}{x^p}\, dx = \frac{1-c^{1-p}}{1-p}$, αν $p \neq 1$, και $= \log \frac{1}{c}$, αν $p = 1$. Επομένως, είναι $\lim_{c\to0+} \int_c^1 \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty$, αν $p \geq 1$, και $= \frac{1}{1-p}$, αν $p < 1$. Άρα

$$\boxed{\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\,, & \text{αν } p < 1, \\ +\infty, & \text{αν } p \geq 1. \end{cases}}$$

Συνδυάζοντας με το προηγούμενο παράδειγμα, βλέπουμε ότι $\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = +\infty$ για κάθε p.

(3) Για κάθε $c > 0$ είναι $\int_0^c \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan c - \arctan 0 = \arctan c$ και, επομένως, $\lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{2}$ και, προσθέτοντας τα δυο γενικευμένα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στο

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \pi.}$$

(4) Για κάθε αριθμό t και κάθε $c > 0$ είναι $\int_0^c e^{-tx}\, dx = \frac{1-e^{-tc}}{t}$, αν $t \neq 0$, και $= c$, αν $t = 0$. Άρα $\lim_{c\to+\infty} \int_0^c e^{-tx}\, dx = \frac{1}{t}$, αν $t > 0$, και $= +\infty$, αν $t \leq 0$. Επομένως,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{t}\,, & \text{αν } t > 0, \\ +\infty, & \text{αν } t \leq 0. \end{cases}}$$

(5) Για κάθε c με $0 < c < 1$ είναι $\int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin c - \arcsin 0 = \arcsin c$. Επομένως, είναι $\lim_{c\to 1-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$. Άρα

$$\boxed{\int_0^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι $\int_{-1+}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$ και, προσθέτοντας τα δυο γενικευμένα ολοκληρώματα, καταλήγουμε στο

$$\boxed{\int_{-1+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi.}$$

Οι επόμενες τρεις προτάσεις γενικεύουν, απλώς, τις αντίστοιχες Προτάσεις 7.1, 7.2 και 7.9 για τα «κανονικά» ολοκληρώματα και χρησιμεύουν για τον απλό αλγεβρικό χειρισμό και για την απλή σύγκριση γενικευμένων ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 8.6 *Έστω ότι το $\int_a^{b-} f(x)\, dx$ υπάρχει, έστω αριθμός λ και έστω ότι το $\lambda \int_a^{b-} f(x)\, dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή. Τότε και το $\int_a^{b-} \lambda f(x)\, dx$ υπάρχει και είναι*

$$\int_a^{b-} \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^{b-} f(x)\, dx.$$

Τα ίδια, με τις προφανείς προσαρμογές, ισχύουν και για κάθε άλλη περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Απόδειξη: Για κάθε c στο $[a, b)$ είναι $\int_a^c \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^c f(x)\, dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια καθώς $c \to b-$.

Πρόταση 8.7 *Έστω ότι τα $\int_a^{b-} f(x)\, dx$ και $\int_a^{b-} g(x)\, dx$ υπάρχουν και ότι το $\int_a^{b-} f(x)\, dx + \int_a^{b-} g(x)\, dx$ δεν είναι απροσδιόριστη μορφή. Τότε και το $\int_a^{b-} (f(x) + g(x))\, dx$ υπάρχει και είναι*

$$\int_a^{b-} (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^{b-} f(x)\, dx + \int_a^{b-} g(x)\, dx.$$

Τα ίδια, με τις προφανείς προσαρμογές, ισχύουν και για κάθε άλλη περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Απόδειξη: Για κάθε c στο $[a,b)$ είναι $\int_a^c (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_a^c g(x)\,dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια καθώς $c \to b-$.

Πρόταση 8.8 *Έστω ότι τα $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ και $\int_a^{b-} g(x)\,dx$ υπάρχουν και ότι είναι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x στο $[a,b)$. Τότε είναι*

$$\int_a^{b-} f(x)\,dx \leq \int_a^{b-} g(x)\,dx.$$

Τα ίδια, με τις προφανείς προσαρμογές, ισχύουν και για κάθε άλλη περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Απόδειξη: Για κάθε c στο $[a,b)$ είναι $\int_a^c f(x)\,dx \leq \int_a^c g(x)\,dx$ και το αποτέλεσμα προκύπτει παίρνοντας όρια καθώς $c \to b-$.

Το Θεώρημα 8.2 παρέχει ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο για να αποφασίζουμε αν κάποιο γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Θεώρημα 8.2 *Έστω ότι οι $y = f(x)$ και $y = g(x)$ είναι ολοκληρώσιμες σε κάθε υποδιάστημα $[a,c]$ του $[a,b)$. Αν είναι $|f(x)| \leq g(x)$ για κάθε x στο $[a,b)$ και αν το $\int_a^{b-} g(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{b-} f(x)\,dx$ συγκλίνει και είναι*

$$\Big|\int_a^{b-} f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^{b-} g(x)\,dx.$$

Τα ίδια, με τις προφανείς προσαρμογές, ισχύουν και για κάθε άλλη περίπτωση γενικευμένου ολοκληρώματος.

Απόδειξη: Επειδή είναι $f(x)+g(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a,b)$, συνεπάγεται ότι για $a < c_1 < c_2 < b$ ισχύει $\int_a^{c_2}(f(x)+g(x))\,dx = \int_a^{c_1}(f(x)+g(x))\,dx + \int_{c_1}^{c_2}(f(x)+g(x))\,dx \geq \int_a^{c_1}(f(x)+g(x))\,dx$. Δηλαδή το $\int_a^c (f(x)+g(x))\,dx$ είναι αύξουσα συνάρτηση του c στο διάστημα $[a,b)$. Άρα το $\lim_{c\to b-} \int_a^c (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^{b-}(f(x)+g(x))\,dx$ υπάρχει. Επίσης, επειδή είναι $0 \leq f(x) + g(x) \leq 2g(x)$ για κάθε x στο $[a,b)$, συνεπάγεται $0 \leq \int_a^{b-}(f(x)+g(x))\,dx \leq \int_a^{b-} 2g(x)\,dx = 2\int_a^{b-} g(x)\,dx$. Όμως, είναι $\int_a^{b-} g(x)\,dx < +\infty$, οπότε $0 \leq \int_a^{b-}(f(x)+g(x))\,dx < +\infty$. Συνεπάγεται ότι το $\int_a^{b-} f(x)\,dx = \int_a^{b-}(f(x)+g(x))\,dx - \int_a^{b-} g(x)\,dx$ υπάρχει και είναι αριθμός.

Τώρα, από τις $-g(x) \leq f(x) \leq g(x)$ συνεπάγεται η $-\int_a^{b-} g(x)\,dx = \int_a^{b-}(-g(x))\,dx \leq \int_a^{b-} f(x)\,dx \leq \int_a^{b-} g(x)\,dx$ και, επομένως, η $\Big|\int_a^{b-} f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^{b-} g(x)\,dx$.

Παραδείγματα: (1) Γνωρίζουμε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και η τιμή του είναι 1. Επειδή είναι $|\frac{\sin x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \geq 1$, συνεπάγεται ότι και το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει και, μάλιστα, ότι $\Big|\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx\Big| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

(2) Το $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ συγκλίνει.

Πράγματι, είναι $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{1-x}$ για κάθε $x \geq 0$. Το $\int_0^{+\infty} e^{1-x}\,dx$ συγκλίνει και, μάλιστα, η τιμή του είναι $\int_0^{+\infty} e^{1-x}\,dx = e\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = e$. Επομένως, και το $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ συγκλίνει.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τις τιμές, αν υπάρχουν, των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$\int_{0+}^{1} \frac{1}{x}\,dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx, \quad \int_{0+}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx, \quad \int_{0+}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} e^{-tx}x^2\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \sin x\,dx,$$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-tx}\sin x\,dx, \quad \int_{0+}^{1} \log x\,dx, \quad \int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx, \quad \int_{e}^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx,$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx \quad \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

2. Υπολογίστε τις τιμές, αν υπάρχουν, των παρακάτω ολοκληρωμάτων.

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}x\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}x\,dx, \quad \int_{0+}^{1-} \frac{1}{x(1-x)}\,dx, \quad \int_{0+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx.$$

3. Σχεδιάστε το γράφημα του αόριστου ολοκληρώματος $y = \int_0^x (-1)^{[t]}\,dt$ ως συνάρτηση του x.

   Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση ή απόκλιση το $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x]}\,dx$.

4. (*) Αποδείξτε ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ συγκλίνει.

   (Υπόδειξη: Γράψτε $\int_1^c \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos c}{c} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ και δείτε, όπως σε κάποιο παράδειγμα, ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ συγκλίνει.)

5. (**) Αποδείξτε ότι τα $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ και $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$, τα οποία ονομάζονται **ολοκληρώματα Fresnel**, συγκλίνουν.

   (Υπόδειξη: Γράψτε $\int_1^c \sin(x^2)\,dx = -\int_1^c \frac{1}{2x}\big(\cos(x^2)\big)'\,dx = -\frac{\cos(c^2)}{2c} + \frac{\cos 1}{2} - \frac{1}{2}\int_1^c \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$ και δείτε, όπως σε κάποιο από τα παραδείγματα, ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$ συγκλίνει. Κατόπιν, είναι $\int_0^c \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \sin(x^2)\,dx + \int_1^c \sin(x^2)\,dx$.)

6. (*) Συμβολίζουμε $\Gamma(n)$ το $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$ για κάθε φυσικό n:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx \qquad (n \text{ φυσικός}).$$

   Αποδείξτε ότι $\Gamma(1) = 1$.

Αν το $\Gamma(n)$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και το $\Gamma(n+1)$ συγκλίνει και ότι είναι $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.

(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\int_0^c e^{-x}x^n\,dx = -e^{-c}c^n + n\int_0^c e^{-x}x^{n-1}\,dx$.)

Αποδείξτε ότι είναι $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάθε φυσικό n.

7. (**) Συμβολίζουμε $\Gamma(t)$ το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,dx$ για κάθε $t \geq 1$ και το $\int_{0+}^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,dx$ για κάθε t με $0 < t < 1$:

$$\Gamma(t) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,dx, & \text{αν } t \geq 1, \\ \int_{0+}^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\,dx, & \text{αν } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Το $\Gamma(t)$ είναι γενίκευση του $\Gamma(n)$ της προηγούμενης άσκησης.

Αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα που ορίζει τον $\Gamma(t)$ συγκλίνει και, επομένως, ο $\Gamma(t)$ είναι αριθμός για κάθε t στο $(0,+\infty)$. Η συνάρτηση $y = \Gamma(t)$ που ορίζεται στο $(0,+\infty)$ είναι εξαιρετικά σημαντική και ονομάζεται **συνάρτηση γάμμα (του Euler)**.

(Υπόδειξη: Αν $t \geq 1$, πάρτε $n = [t]+1$ και δείτε ότι είναι $|e^{-x}x^{t-1}| \leq e^{-x}x^{n-1}$ για κάθε x στο $[1,+\infty)$. Αν $0 < t < 1$, δείτε ότι είναι $|e^{-x}x^{t-1}| \leq x^{t-1}$ για κάθε x στο $(0,1]$ και ότι είναι $|e^{-x}x^{t-1}| \leq e^{-x}$ για κάθε x στο $[1,+\infty)$.)

Αποδείξτε ότι είναι $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ για κάθε $t > 0$.

8.5 Απλές διαφορικές εξισώσεις.

Με τον όρο **διαφορική εξίσωση** χαρακτηρίζουμε μια εξίσωση

$$F(x, y, y', y'', \dots) = 0,$$

όπου η $F(x, y, y', y'', \dots)$ είναι μια παράσταση των μεταβλητών $x, y', y'', \dots$ και όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή x διατρέχει κάποιο διάστημα I, η εξαρτημένη μεταβλητή y είναι κάποια συνάρτηση της x – δηλαδή $y = f(x)$ – και οι $y', y'', \dots$ είναι οι συναρτήσεις $y' = f'(x), y'' = f''(x), \dots$. Η συνάρτηση $y = f(x)$ (αν υπάρχει) χαρακτηρίζεται **λύση** της διαφορικής εξίσωσης $F(x, y, y', y'', \dots) = 0$ και ικανοποιεί την

$$F\big(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots\big) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \text{ στο } I.$$

Παραδείγματα: (1) Η διαφορική εξίσωση $y' + 2xy = 0$ έχει ως λύση τη συνάρτηση $y = e^{-x^2}$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$, διότι ισχύει $\frac{d\,e^{-x^2}}{dx} + 2xe^{-x^2} = -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} = 0$ για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$.

(2) Η διαφορική εξίσωση $y'' + y = 0$ έχει ως λύση τη συνάρτηση $y = \sin x$ στο $(-\infty,+\infty)$, διότι ισχύει $\frac{d^2 \sin x}{dx^2} + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$ για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$.

Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η μέγιστη τάξη παραγώγου που εμφανίζεται σ' αυτήν. Η διαφορική εξίσωση του πρώτου παραδείγματος είναι πρώτης τάξης και η διαφορική εξίσωση του δεύτερου παραδείγματος είναι δεύτερης τάξης.

Από κάθε άποψη, η πιο απλή διαφορική εξίσωση είναι η $y' - q(x) = 0$ ή η ισοδύναμη

$$y' = q(x),$$

όπου η συνάρτηση $y = q(x)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα I. Λύση της εξίσωσης αυτής στο I είναι οποιαδήποτε συνάρτηση $y = f(x)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο I και ικανοποιεί την

$$f'(x) = q(x) \qquad (x \text{ στο } I),$$

δηλαδή οποιαδήποτε αντιπαράγωγος της $y = q(x)$ στο I. Αν η $y = q(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I, τότε, σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα, οι λύσεις αυτής της εξίσωσης, δηλαδή οι αντιπαράγωγοι της $y = q(x)$ στο I, είναι οι ίδιες με τα αόριστα ολοκληρώματα της $y = q(x)$ στο I. Με άλλα λόγια, η γενική λύση της $y' = q(x)$ στο I είναι η

$$y = f(x) = \int q(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} q(t)\,dt + c \qquad (x \text{ στο } I),$$

όπου x_0 είναι ένα αυθαίρετο σημείο του I και η c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Ένας τυπικός τρόπος να συγκεκριμενοποιήσουμε κάποιες από τις άπειρες αυτές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι να επιλέξουμε κάποιον αριθμό y_0 και να αναζητήσουμε τις λύσεις που έχουν τιμή y_0 στον x_0, δηλαδή που ικανοποιούν τις

$$f'(x) = q(x) \quad (x \text{ στο } I), \qquad f(x_0) = y_0\,.$$

Για να βρούμε αυτές τις λύσεις, θέτουμε $x = x_0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε $y_0 = f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} q(t)\,dt + c = c$. Επομένως, η λύση είναι μοναδική και είναι η

$$y = f(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)\,dt + y_0 \qquad (x \text{ στο } I).$$

Δε θα επιχειρήσουμε συστηματική μελέτη των διαφορικών εξισώσεων· θα περιοριστούμε σε μερικές απλές αλλά βασικές ειδικές περιπτώσεις. Η έμφαση θα είναι στην εφαρμογή της ολοκλήρωσης για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Α. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές.

Έστω ότι έχουμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με τη μορφή

$$g(y)y' = h(x).$$

Είναι φανερό γιατί αυτού του τύπου οι διαφορικές εξισώσεις χαρακτηρίζονται διαφορικές εξισώσεις **με χωριζόμενες μεταβλητές**.

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης σε κάποιο διάστημα I. Δηλαδή, έστω

$$g\big(f(x)\big)f'(x) = h(x) \qquad (x \text{ στο } I).$$

Εξυπακούεται ότι το σύνολο τιμών της $y = f(x)$ που αντιστοιχεί στο διάστημα I είναι υποσύνολο κάποιου διαστήματος J στο οποίο ορίζεται η $g(y)$ ώστε να ορίζεται η σύνθεση $g\big(f(x)\big)$.

Έστω οποιαδήποτε αντιπαράγωγος $G(y)$ της $g(y)$ στο J και οποιαδήποτε αντιπαράγωγος $H(x)$ της $h(x)$ στο I. Αν, ειδικώτερα, οι $g(y)$ και $h(x)$ είναι συνεχείς, τότε μπορούμε να πάρουμε ως $G(y)$ οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα της $g(y)$ στο J και ως $H(x)$ οποιοδήποτε αόριστο ολοκλήρωμα της $h(x)$ στο I. Συνεπάγεται ότι είναι $G'(y) = g(y)$ στο J και $H'(x) = h(x)$ στο I, οπότε η $y = f(x)$ ικανοποιεί την

$$\big(G\big(f(x)\big)\big)' = G'\big(f(x)\big)f'(x) = H'(x) \qquad (x \text{ στο } I).$$

Συνεπάγεται ότι είναι

$$G\big(f(x)\big) = H(x) + c \qquad (x \text{ στο } I)$$

για κατάλληλη σταθερά c. Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι η $y = f(x)$ ικανοποιεί μια εξίσωση, η οποία δεν είναι διαφορική εξίσωση, δηλαδή περιέχει μόνο την ίδια την $y = f(x)$ και καμιά από τις παραγώγους της. Τώρα, οι συναρτήσεις $G(y)$ και $H(x)$ είναι, υποτίθεται, γνωστές – αφού υπολογίζονται από τις $g(y)$ και $h(x)$ – οπότε αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $G\big(f(x)\big) = H(x) + c$ για να βρούμε την $y = f(x)$.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $y = f(x)$ ικανοποιεί την εξίσωση $G\big(f(x)\big) = H(x) + c$ στο διάστημα I και ότι είναι παραγωγίσιμη στο I. Τότε, προφανώς, ισχύει $G'\big(f(x)\big)f'(x) = H'(x)$ στο I και, επειδή είναι $G'(y) = g(y)$ στο διάστημα J και $H'(x) = h(x)$ στο I, συνεπάγεται ότι είναι $g\big(f(x)\big)f'(x) = h(x)$ στο I.

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $g(y)y' = h(x)$ στο διάστημα I είναι οι ίδιες με τις λύσεις της (μη διαφορικής) εξίσωσης $G(y) = H(x) + c$ (με αυθαίρετη σταθερά c) οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο I.

Παραδείγματα: (1) Θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές $yy' = x$.

Θεωρούμε την αντιπαράγωγο $\frac{1}{2}y^2$ της y στο $(-\infty, +\infty)$ και την αντιπαράγωγο $\frac{1}{2}x^2$ της x στο $(-\infty, +\infty)$. Τότε κάθε λύση $y = f(x)$ της διαφορικής εξίσωσης $yy' = x$ σε κάποιο διάστημα I είναι λύση παραγωγίσιμη στο I της $\frac{1}{2}(f(x))^2 = \frac{1}{2}x^2 + c$ (με αυθαίρετη σταθερά c) και αντιστρόφως. Η $\frac{1}{2}(f(x))^2 = \frac{1}{2}x^2 + c$ (με αυθαίρετη σταθερά) γράφεται ισοδύναμα $(f(x))^2 = x^2 + c$ (με αυθαίρετη σταθερά).

Τώρα, διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις. Αν $c > 0$, τότε οι δυο συναρτήσεις $y = f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = f(x) = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$. Αν $c = 0$, οι $y = f(x) = x$ και $y = f(x) = -x$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$. Αν $c < 0$, οι $y = f(x) = \sqrt{x^2 + c}$ και $y = f(x) = -\sqrt{x^2 + c}$ είναι οι μοναδικές παραγωγίσιμες λύσεις είτε στο $(-\infty, -\sqrt{|c|})$ είτε στο $(\sqrt{|c|}, +\infty)$.

(2) Θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές $y^2y' = x$.

Θεωρούμε την αντιπαράγωγο $\frac{1}{3}y^3$ της y στο $(-\infty, +\infty)$ και την αντιπαράγωγο $\frac{1}{2}x^2$ της x στο $(-\infty, +\infty)$. Οποιαδήποτε λύση $y = f(x)$ της $y^2y' = x$ σε κάποιο διάστημα I είναι λύση παραγωγίσιμη στο I της $\frac{1}{3}(f(x))^3 = \frac{1}{2}x^2 + c$ (με αυθαίρετη σταθερά c) και αντιστρόφως. Η $\frac{1}{3}(f(x))^3 = \frac{1}{2}x^2 + c$ (με αυθαίρετη σταθερά) γράφεται ισοδύναμα $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}$ (με αυθαίρετη σταθερά).

Αν $c > 0$, η $y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}$ είναι η μοναδική παραγωγίσιμη λύση στο $(-\infty, +\infty)$. Αν $c = 0$, η $y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}x^{\frac{2}{3}}$ είναι η μοναδική παραγωγίσιμη λύση στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Αν $c < 0$, η $y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c}$ είναι η μοναδική παραγωγίσιμη λύση στο $\big(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}|c|}\big)$ στο $\big(-\sqrt{\frac{2}{3}|c|}, \sqrt{\frac{2}{3}|c|}\big)$ και στο $\big(\sqrt{\frac{2}{3}|c|}, +\infty\big)$. Προσέξτε: στα άκρα αυτών των διαστημάτων η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη και γι αυτό τα αφαιρούμε από τα διαστήματα.

(3) Θα λύσουμε τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης $y' + p(x)y = 0$, όπου η συνάρτηση $y = p(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I. Η διαφορική αυτή εξίσωση γράφεται και $\frac{1}{y}\,y' = -p(x)$ για $y \neq 0$, οπότε είναι διαφορική εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές.

Έστω η αντιπαράγωγος $\log|y|$ της $\frac{1}{y}$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και η αντιπαράγωγος $-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt$ της $-p(x)$ στο I, όπου x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του I. Οποιαδήποτε λύση $y = f(x)$ της $\frac{1}{y}\,y' = -p(x)$ στο I τέτοια ώστε να είναι $f(x) \neq 0$ στο I είναι λύση παραγωγίσιμη και μη μηδενιζόμενη στο I της $\log|f(x)| = -\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt + c$ (με αυθαίρετη σταθερά c) και αντιστρόφως. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα $|f(x)| = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt + c}$, οπότε η $y = f(x)$ δε μηδενίζεται στο I. Οι συνεχείς λύσεις πρέπει να έχουν σταθερό πρόσημο στο διάστημα I και, επομένως, είναι η $y = f(x) = e^c e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$ και η $y = f(x) = -e^c e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$ στο I. Οι λύσεις αυτές είναι και παραγωγίσιμες στο I. Αν συμβολίσουμε c τον αριθμό $\pm e^c$, μπορούμε να πούμε ότι η γενική λύση της $y' + p(x)y = 0$ στο I με την ιδιότητα να μη μηδενίζεται σε κανένα σημείο του I είναι η

$$y = f(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} \qquad (x \text{ στο } I),$$

με αυθαίρετη σταθερά $c \neq 0$. Αν επιτρέψουμε και τη σταθερά $c = 0$, τότε βρίσκουμε και τη λύση η οποία είναι σταθερή 0 στο I.

Β. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση

$$y' + p(x)y = q(x),$$

ανάγοντάς την στην ειδικώτερη $y' = q(x)$. Θα υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $y = p(x)$ και $y = q(x)$ είναι συνεχείς σε κάποιο διάστημα I.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = \mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}$ για κάθε x στο I, όπου x_0 είναι αυθαίρετο σημείο του I και για την οποία ισχύει $\mu'(x) = p(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt} = p(x)\mu(x)$

για κάθε x στο I. Αν υποθέσουμε ότι η (άγνωστη) συνάρτηση $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της $y' + p(x)y = q(x)$ στο διάστημα I, δηλαδή ότι ισχύει

$$f'(x) + p(x)f(x) = q(x) \qquad (x \text{ στο } I),$$

τότε έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$\mu(x)f'(x) + p(x)\mu(x)f(x) = q(x)\mu(x) \qquad (x \text{ στο } I)$$

$$\mu(x)f'(x) + \mu'(x)f(x) = q(x)\mu(x) \qquad (x \text{ στο } I)$$

$$\big(\mu(x)f(x)\big)' = q(x)\mu(x) \qquad (x \text{ στο } I),$$

οπότε η συνάρτηση $y = \mu(x)f(x)$ είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $y' = q(x)\mu(x)$ στο I. Άρα είναι

$$\mu(x)f(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)\mu(t)\,dt + c \qquad (x \text{ στο } I),$$

ή, ισοδύναμα,

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int_{x_0}^{x} q(t)\mu(t)\,dt + \frac{c}{\mu(x)} \qquad (x \text{ στο } I),$$

όπου x_0 είναι ένα αυθαίρετο σημείο του I και η c είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

Αν θέλουμε να βρούμε τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιούν τις

$$f'(x) + p(x)f(x) = q(x) \quad (x \text{ στο } I), \qquad f(x_0) = y_0\,,$$

θέτουμε $x = x_0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε $y_0 = f(x_0) = \frac{1}{\mu(x_0)}\int_{x_0}^{x_0} q(t)\mu(t)\,dt + \frac{c}{\mu(x_0)} = c$, αφού είναι φανερό ότι $\mu(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x_0} p(t)\,dt} = 1$. Άρα η λύση είναι μοναδική και είναι η

$$y = f(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int_{x_0}^{x} q(t)\mu(t)\,dt + \frac{y_0}{\mu(x)} \qquad (x \text{ στο } I).$$

Έχουμε βρει τον ακριβή τύπο της γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης $y' + p(x)y = q(x)$. Τονίζουμε, όμως, ότι είναι προτιμώτερο να *μη* θυμόμαστε τον τύπο αυτόν αλλά μόνο τη *μέθοδο* επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης.

Παραδείγματα: (1) Θα λύσουμε την $y' - 2xy = 0$.

Οι $y = p(x) = -2x$ και $y = q(x) = 0$ είναι συνεχείς στο $(-\infty, +\infty)$ και θεωρούμε την $y = \mu(x) = e^{\int_0^x (-2t)\,dt} = e^{-x^2}$ στο $(-\infty, +\infty)$. Αν η $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της $y' - 2xy = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$, δηλαδή αν είναι $f'(x) - 2xf(x) = 0$ για κάθε x, συνεπάγεται $e^{-x^2}f'(x) - 2xe^{-x^2}f(x) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\big(e^{-x^2}f(x)\big)' = 0$ και, επομένως, $e^{-x^2}f(x) = c$ για κάθε x, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα η γενική λύση της $y' - 2xy = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$ είναι η $y = f(x) = ce^{x^2}$ με αυθαίρετη σταθερά c.

Αν θέλουμε να βρούμε τη μοναδική λύση με την ιδιότητα $f(0) = -2$, τότε θέτουμε $x = 0$ στο τύπο $f(x) = ce^{x^2}$. Βρίσκουμε $-2 = f(0) = c$ και η λύση είναι η $y = f(x) = -2e^{x^2}$.

(2) Θα λύσουμε την $x^2y' + y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0. \end{cases}$

Γράφουμε την εξίσωση στη μορφή $y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ για $x \neq 0$. Οι $y = p(x) = \frac{1}{x^2}$ και $y = q(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ είναι συνεχείς στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Κατ΄ αρχάς εργαζόμαστε στο διάστημα $(0, +\infty)$ και θεωρούμε την $y = \mu(x) = e^{\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt} = e^{1-\frac{1}{x}}$ στο $(0, +\infty)$. Αν η $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της $y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{|x|}}$ στο $(0, +\infty)$, δηλαδή αν $f'(x) + \frac{1}{x^2}f(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$, τότε είναι $e^{1-\frac{1}{x}}f'(x) + \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{1}{x}}f(x) = \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{2}{x}}$ ή, ισοδύναμα, $\big(e^{1-\frac{1}{x}}f(x)\big)' = \frac{1}{x^2}e^{1-\frac{2}{x}}$ για κάθε $x > 0$. Άρα είναι $e^{1-\frac{1}{x}}f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}e^{1-\frac{2}{t}}\,dt + c = \frac{e}{2}e^{-\frac{2}{x}} + c$ για κάθε $x > 0$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Άρα η γενική λύση της $x^2y' + y = e^{-\frac{1}{|x|}}$ στο $(0, +\infty)$ είναι η $y = f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} + ce^{\frac{1}{x}}$ με αυθαίρετη σταθερά c.

Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο στο $(-\infty, 0)$ και με $x_0 = -1$, βρίσκουμε ότι η γενική λύση της $x^2y' + y = e^{-\frac{1}{|x|}}$ στο $(-\infty, 0)$ έχει τύπο $y = f(x) = -\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + c'e^{\frac{1}{x}}$ με αυθαίρετη σταθερά c'.

Τέλος, ας δούμε αν υπάρχει λύση της $x^2y' + y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x \neq 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \end{cases}$ σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$. Αν η $y = f(x)$ είναι μια τέτοια λύση, τότε αυτή είναι, προφανώς, λύση της εξίσωσης και στα μικρότερα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Άρα είναι $y = f(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} + ce^{\frac{1}{x}}$ στο $(0, +\infty)$ για κατάλληλη σταθερά c και $y = f(x) = -\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + c'e^{\frac{1}{x}}$ στο $(-\infty, 0)$ για κατάλληλη σταθερά c'. Η $y = f(x)$ πρέπει να είναι συνεχής στον 0, οπότε πρέπει να είναι $\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x)$. Υπολογίζουμε $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\big(\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}} + ce^{\frac{1}{x}}\big) = c(+\infty)$ και $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\big(-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + c'e^{\frac{1}{x}}\big) = 0$, οπότε συνεπάγεται ότι $c = 0$ και $f(0) = 0$. Επομένως, αν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο $(-\infty, +\infty)$ αυτή πρέπει να είναι η συνεχής συνάρτηση $y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x = 0, \\ -\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} + c'e^{\frac{1}{x}}, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$

Κατόπιν υπολογίζουμε $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{2x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$ που σημαίνει ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον 0 από τα δεξιά του και $f'_+(0) = 0$. Επίσης, $\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-}\big(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + c'\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\big) = 0$. Άρα η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον 0 και από τα αριστερά του και $f'_-(0) = 0$. Άρα η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στον 0 και $f'(0) = 0$ και, επομένως, ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και στον 0.

Συνοψίζουμε. Η διαφορική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις σε καθένα από τα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Επίσης, έχει άπειρες λύσεις στο $(-\infty, +\infty)$, οι οποίες, όμως, είναι όλες ίσες με την ίδια συνάρτηση στο $[0, +\infty)$.

(3) Το παράδειγμα αυτό αποτελεί μια σημαντική ειδική περίπτωση διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης τύπου $y' + p(x)y = q(x)$. Έστω η διαφορική εξίσωση

πρώτης τάξης

$$y' + ky = q(x),$$

όπου k είναι ένας σταθερός αριθμός και η $y = q(x)$ είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα I. Θεωρούμε την $y = \mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} k\,dt} = e^{k(x-x_0)}$ στο I.Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης στο I, δηλαδή ότι ισχύει $f'(x) + kf(x) = q(x)$ για κάθε x στο I. Τότε είναι $\left(e^{k(x-x_0)}f(x)\right)' = q(x)e^{k(x-x_0)}$, οπότε $e^{k(x-x_0)}f(x) = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{k(t-x_0)}\,dt + c$ και, επομένως,

$$f(x) = e^{-kx}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{kt}\,dt + ce^{-k(x-x_0)}$$

για κάθε x στο I, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Στην περίπτωση που η λύση έχει μια προκαθορισμένη τιμή y_0 στον x_0, δηλαδή αν $f(x_0) = y_0$, τότε προσδιορίζεται η σταθερά θέτοντας $x = x_0$ και βρίσκουμε $c = y_0$.

(4) Ξαναθυμόμαστε τον νόμο διάσπασης ραδιενεργού ουσίας: «κάθε χρονική στιγμή t η ταχύτητα διάσπασης μιας ραδιενεργού ουσίας είναι ανάλογη (με κάποια σταθερά αναλογίας k που εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ουσία) της ποσότητας q της ουσίας η οποία έχει απομείνει μέχρι εκείνη την στιγμή».

Αν $y = q(t)$ είναι ποσότητα της ραδιενεργού ουσίας, ως συνάρτηση του χρόνου t, που έχει απομείνει τη χρονική στιγμή t, τότε ο νόμος διάσπασης λέει ότι είναι $q'(t) = -kq(t)$ για κάθε t. Το αρνητικό πρόσημο αιτιολογείται επειδή η ταχύτητα διάσπασης $q'(t)$ είναι, προφανώς, ≤ 0 και η σταθερά k είναι > 0. Από το προηγούμενο παράδειγμα, με $x_0 = 0$, βρίσκουμε ότι είναι $q(t) = ce^{-kt}$ για κατάλληλη σταθερά c. Αν q_0 είναι η ποσότητα της ουσίας κατά την αρχική χρονική στιγμή 0 και θέσουμε $t = 0$, βρίσκουμε $q_0 = q(0) = c$, οπότε είναι $q(t) = q_0e^{-kt}$.

Γ. Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

Τώρα θα μελετήσουμε μια πολύ ειδική κατηγορία διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης, τις

$$y'' + ky' + ly = q(x),$$

όπου οι k και l είναι δυο αριθμοί. Υποθέτουμε ότι η $y = q(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα I.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις ανάλογα με τον αριθμό πραγματικών λύσεων της (πολυωνυμικής) εξίσωσης δεύτερου βαθμού $t^2 + kt + l = 0$.

Περίπτωση 1. Η $t^2 + kt + l = 0$ έχει δυο (διαφορετικές) λύσεις, τις κ_1 και κ_2, οπότε είναι $k = -\kappa_1 - \kappa_2$ και $l = \kappa_1\kappa_2$. Αν η $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της $y'' + ky' + ly = q(x)$ στο διάστημα I, δηλαδή αν είναι

$$f''(x) + kf'(x) + lf(x) = q(x) \qquad (x \text{ στο } I),$$

τότε, θεωρώντας ένα αυθαίρετο σημείο x_0 του I και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποενότητας, έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$f''(x) - (\kappa_1 + \kappa_2)f'(x) + \kappa_1\kappa_2 f(x) = q(x) \qquad (x \text{ στο } I),$$

$$
\begin{aligned}
\big(f'(x)-\kappa_1 f(x)\big)' - \kappa_2\big(f'(x)-\kappa_1 f(x)\big) &= q(x) \qquad (x \text{ στο } I),\\
f'(x)-\kappa_1 f(x) &= e^{\kappa_2 x}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\kappa_2 t}\,dt + c_1 e^{\kappa_2(x-x_0)} \qquad (x \text{ στο } I),\\
f(x) = e^{\kappa_1 x}\int_{x_0}^{x}\Big(e^{\kappa_2 t}&\int_{x_0}^{t} q(s)e^{-\kappa_2 s}\,ds + c_1 e^{\kappa_2(t-x_0)}\Big)e^{-\kappa_1 t}\,dt + c_2 e^{\kappa_1(x-x_0)}\\
&= e^{\kappa_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{(\kappa_2-\kappa_1)t}\int_{x_0}^{t} q(s)e^{-\kappa_2 s}\,ds\,dt + c_1 e^{-\kappa_2 x_0+\kappa_1 x}\int_{x_0}^{x} e^{(\kappa_2-\kappa_1)t}\,dt\\
&\quad + c_2 e^{\kappa_1(x-x_0)} \qquad (x \text{ στο } I)
\end{aligned}
$$

και, μετά από ολοκλήρωση κατά παράγοντες στο πρώτο ολοκλήρωμα,

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{\kappa_1 x}\frac{e^{(\kappa_2-\kappa_1)x}}{\kappa_2-\kappa_1}\int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\kappa_2 s}\,ds - e^{\kappa_1 x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{(\kappa_2-\kappa_1)t}}{\kappa_2-\kappa_1}q(t)e^{-\kappa_2 t}\,dt\\
&\quad + c_1 e^{-\kappa_2 x_0+\kappa_1 x}\frac{e^{(\kappa_2-\kappa_1)x}-e^{(\kappa_2-\kappa_1)x_0}}{\kappa_2-\kappa_1} + c_2 e^{\kappa_1(x-x_0)}\\
&= \int_{x_0}^{x}\frac{e^{\kappa_2(x-t)}-e^{\kappa_1(x-t)}}{\kappa_2-\kappa_1}q(t)\,dt + c_1\frac{e^{\kappa_2(x-x_0)}-e^{\kappa_1(x-x_0)}}{\kappa_2-\kappa_1} + c_2 e^{\kappa_1(x-x_0)}\\
&\quad (x \text{ στο } I),
\end{aligned}
$$

όπου οι c_1 και c_2 είναι δυο αυθαίρετες σταθερές. Ένας τυπικός τρόπος να επιλέγουμε μια συγκεκριμένη λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι να προκαθορίζουμε την τιμή της και την τιμή της παραγώγου της στον x_0 :

$$
f(x_0) = y_0\,, \quad f'(x_0) = y_0{}'\,.
$$

Θέτουμε $x = x_0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε εύκολα ότι $c_2 = y_0$. Κατόπιν παραγωγίζουμε τον τύπο της γενικής λύσης και θέτουμε $x = x_0$ και βρίσκουμε ότι $c_1 + \kappa_1 c_2 = y_0{}'$ και, επομένως, $c_1 = -\kappa_1 y_0 + y_0{}'$.

Περίπτωση 2. Η $t^2+kt+l = 0$ έχει μια μοναδική λύση, την κ, οπότε είναι $k = -2\kappa$ και $l = \kappa^2$. Αν η $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της $y'' + ky' + ly = q(x)$ στο διάστημα I, τότε, περίπου όπως πριν, έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$
\begin{aligned}
f''(x) - 2\kappa f'(x) + \kappa^2 f(x) &= q(x) \qquad (x \text{ στο } I),\\
\big(f'(x)-\kappa f(x)\big)' - \kappa\big(f'(x)-\kappa f(x)\big) &= q(x) \qquad (x \text{ στο } I),\\
f'(x)-\kappa f(x) &= e^{\kappa x}\int_{x_0}^{x} q(t)e^{-\kappa t}\,dt + c_1 e^{\kappa(x-x_0)} \qquad (x \text{ στο } I),\\
f(x) = e^{\kappa x}\int_{x_0}^{x}\Big(e^{\kappa t}&\int_{x_0}^{t} q(s)e^{-\kappa s}\,ds + c_1 e^{\kappa(t-x_0)}\Big)e^{-\kappa t}\,dt + c_2 e^{\kappa(x-x_0)}\\
&= e^{\kappa x}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)'\int_{x_0}^{t} q(s)e^{-\kappa s}\,ds\,dt + c_1 e^{\kappa(x-x_0)}\int_{x_0}^{x} dt + c_2 e^{\kappa(x-x_0)}\\
&= e^{\kappa x}(x-x_0)\int_{x_0}^{x} q(s)e^{-\kappa s}\,ds - e^{\kappa x}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)q(t)e^{-\kappa t}\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+c_1(x-x_0)e^{\kappa(x-x_0)}+c_2e^{\kappa(x-x_0)}\\
&=\int_{x_0}^{x}(x-t)e^{\kappa(x-t)}q(t)\,dt+c_1(x-x_0)e^{\kappa(x-x_0)}+c_2e^{\kappa(x-x_0)}\qquad (x \text{ στο } I),
\end{aligned}
$$

όπου οι c_1 και c_2 είναι δυο αυθαίρετες σταθερές. Αν προκαθορίσουμε την τιμή της $y=f(x)$ και την τιμή της παραγώγου της στον x_0, δηλαδή $f(x_0)=y_0$ και $f'(x_0)={y_0}'$, τότε βρίσκουμε ότι $c_2=y_0$ και $c_1=-\kappa y_0+{y_0}'$.

Περίπτωση 3. Η $t^2+kt+l=0$ έχει δυο συζυγείς μιγαδικές λύσεις, τις $\kappa+i\lambda$ και $\kappa-i\lambda$ με $\lambda>0$, οπότε είναι $k=-2\kappa$ και $l=\kappa^2+\lambda^2$. Έστω $y=f(x)$ η γενική λύση της $y''+ky'+ly=q(x)$ στο διάστημα I, δηλαδή έστω $f''(x)-2\kappa f'(x)+(\kappa^2+\lambda^2)f(x)=q(x)$ για κάθε x στο I. Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση με τον $e^{-\kappa x}$ και ορίσουμε $g(x)=e^{-\kappa x}f(x)$, καταλήγουμε στην ισοδύναμη

$$g''(x)+\lambda^2g(x)=e^{-\kappa x}q(x)\qquad (x \text{ στο } I).$$

Πολλαπλασιάζοντας με τους $\sin(\lambda x)$ και $\cos(\lambda x)$ βρίσκουμε τις

$$\big(g'(x)\sin(\lambda x)-\lambda g(x)\cos(\lambda x)\big)'=e^{-\kappa x}q(x)\sin(\lambda x)\qquad (x \text{ στο } I),$$

$$\big(g'(x)\cos(\lambda x)+\lambda g(x)\sin(\lambda x)\big)'=e^{-\kappa x}q(x)\cos(\lambda x)\qquad (x \text{ στο } I)$$

και, επομένως, τις

$$g'(x)\sin(\lambda x)-\lambda g(x)\cos(\lambda x)=\int_{x_0}^{x}e^{-\kappa t}q(t)\sin(\lambda t)\,dt+c_1\qquad (x \text{ στο } I),$$

$$g'(x)\cos(\lambda x)+\lambda g(x)\sin(\lambda x)=\int_{x_0}^{x}e^{-\kappa t}q(t)\cos(\lambda t)\,dt+c_2\qquad (x \text{ στο } I)$$

με αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $-\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda x)$ και τη δεύτερη με $\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)$ και προσθέτοντας, βρίσκουμε

$$g(x)=\int_{x_0}^{x}e^{-\kappa t}\frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda}q(t)\,dt+\frac{-c_1\cos(\lambda x)+c_2\sin(\lambda x)}{\lambda}\qquad (x \text{ στο } I)$$

και, τέλος, την

$$
\begin{aligned}
f(x)=&\int_{x_0}^{x}e^{\kappa(x-t)}\frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda}q(t)\,dt+\frac{-c_1e^{\kappa x}\cos(\lambda x)+c_2e^{\kappa x}\sin(\lambda x)}{\lambda}\\
&(x \text{ στο } I).
\end{aligned}
$$

Αν προκαθορίσουμε τις τιμές $f(x_0)=y_0$ και $f'(x_0)={y_0}'$, βρίσκουμε εύκολα τους $c_1=(-\kappa\sin(\lambda x_0)-\lambda\cos(\lambda x_0))e^{-\kappa x_0}y_0+\sin(\lambda x_0)e^{-\kappa x_0}{y_0}'$ και $c_2=(\lambda\sin(\lambda x_0)-\kappa\cos(\lambda x_0))e^{-\kappa x_0}y_0+\cos(\lambda x_0)e^{-\kappa x_0}{y_0}'$.

Η παρατήρηση που κάναμε για τις εξισώσεις πρώτης τάξης ισχύει και τώρα: είναι προτιμότερο να *μη* θυμόμαστε τον τύπο της γενικής λύσης αλλά μόνο τη *μέθοδο* επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης.

Παραδείγματα: (1) Θα λύσουμε την $y''-5y'+6y=x$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ στο οποίο η $y=x$ είναι συνεχής.

Η $t^2-5t+6=0$ έχει λύσεις τους 2 και 3, οπότε, αν η $y=f(x)$ είναι η γενική λύση της $y''-5y'+6y=x$ στο $(-\infty,+\infty)$, τότε έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$f''(x)-(2+3)f'(x)+2\cdot 3f(x)=x$$

$$\big(f'(x)-2f(x)\big)'-3\big(f'(x)-2f(x)\big)=x$$

$$f'(x)-2f(x)=e^{3x}\int_0^x te^{-3t}\,dt+c_1e^{3x}=-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}+\Big(\frac{1}{9}+c_1\Big)e^{3x}$$

$$f'(x)-2f(x)=-\frac{x}{3}-\frac{1}{9}+c_1e^{3x}$$

$$\begin{aligned} f(x)&=e^{2x}\int_0^x e^{-2t}\Big(-\frac{t}{3}-\frac{1}{9}+c_1e^{3t}\Big)\,dt+c_2e^{2x}\\ &=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}-\Big(\frac{5}{36}+c_1-c_2\Big)e^{2x}+c_1e^{3x}\end{aligned}$$

$$f(x)=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}+c_2e^{2x}+c_1e^{3x}$$

με αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2.

Αν θέλουμε να βρούμε τις λύσεις με την ιδιότητα $f(0)=-1$ και $f'(0)=2$, θέτουμε $x=0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε $-1=f(0)=\frac{5}{36}+c_2+c_1$. Κατόπιν παραγωγίζουμε την γενική λύση και θέτουμε $x=0$, οπότε βρίσκουμε $2=f'(0)=\frac{1}{6}+2c_2+3c_1$. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $c_1=\frac{37}{9}$ και $c_2=-\frac{21}{4}$. Άρα υπάρχει μια μόνο λύση και είναι η $f(x)=\frac{x}{6}+\frac{5}{36}-\frac{21}{4}e^{2x}+\frac{37}{9}e^{3x}$.

(2) Θα λύσουμε την $y''-2y'+y=4$ στο $(-\infty,+\infty)$ στο οποίο η $y=4$ είναι συνεχής.

Η $t^2-2t+1=0$ έχει μοναδική λύση τον 1, οπότε, αν η $y=f(x)$ είναι η γενική λύση της $y''-2y'+y=4$ στο $(-\infty,+\infty)$, τότε έχουμε τις διαδοχικές ισοδύναμες ισότητες

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=4$$

$$\big(f'(x)-f(x)\big)'-\big(f'(x)-f(x)\big)=4$$

$$f'(x)-f(x)=e^x\int_0^x 4e^{-t}\,dt+c_1e^x=-4+4e^x+c_1e^x$$

$$f'(x)-f(x)=-4+c_1e^x$$

$$f(x)=e^x\int_0^x e^{-t}\big(-4+c_1e^t\big)\,dt+c_2e^x=4+c_1xe^x+(c_2-4)e^x$$

$$f(x)=4+c_1xe^x+c_2e^x$$

με αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2.

Για να βρούμε τις λύσεις με $f(0) = 3$ και $f'(0) = -2$, θέτουμε $x = 0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε $3 = f(0) = 4 + c_2$. Κατόπιν παραγωγίζουμε τη γενική λύση, θέτουμε $x = 0$ και βρίσκουμε $-2 = f'(0) = c_2 + c_1$. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $c_1 = c_2 = -1$. Άρα υπάρχει μια μόνο λύση και είναι η $f(x) = 4 - xe^x - e^x$.

(3) Θα λύσουμε την $y'' + 2y' + 2 = \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$ στο οποίο η $y = \sin x$ είναι συνεχής.

Η $t^2 + 2t + 2 = 0$ έχει δυο μιγαδικές λύσεις, τις $-1 + i$ και $-1 - i$. Αν η $y = f(x)$ είναι η γενική λύση της $y'' + 2y' + 2y = \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$, τότε είναι $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = \sin x$ για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$. Πολλαπλασιάζουμε με τον e^x και ορίζουμε $g(x) = e^x f(x)$, οπότε έχουμε

$$g''(x) + g(x) = e^x \sin x.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\sin x$ και με $\cos x$ και βρίσκουμε

$$\big(g'(x) \sin x - g(x) \cos x\big)' = e^x (\sin x)^2 ,$$

$$\big(g'(x) \cos x + g(x) \sin x\big)' = e^x \sin x \cos x.$$

Επομένως, είναι

$$g'(x) \sin x - g(x) \cos x = \int_0^x e^t (\sin t)^2 \, dt + c_1 = \frac{e^x}{2} - \frac{e^x}{5} \sin(2x) - \frac{e^x}{10} \cos(2x) + c_1 ,$$

$$g'(x) \cos x + g(x) \sin x = \int_0^x e^t \sin t \cos t \, dt + c_2 = \frac{e^x}{10} \sin(2x) - \frac{e^x}{5} \cos(2x) + c_2 .$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη ισότητα με τον $-\cos x$ και τη δεύτερη με τον $\sin x$, προσθέτουμε και βρίσκουμε

$$g(x) = \frac{e^x}{5} \sin x - \frac{2e^x}{5} \cos x - c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

και, επομένως,

$$f(x) = \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x - c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \sin x$$

με αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2.

Για να βρούμε τις λύσεις με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$, θέτουμε $x = 0$ στον τύπο της γενικής λύσης και βρίσκουμε $1 = f(0) = -\frac{2}{5} - c_1$. Κατόπιν παραγωγίζουμε τη γενική λύση, θέτουμε $x = 0$ και βρίσκουμε $1 = f'(0) = \frac{1}{5} + c_1 + c_2$. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $c_1 = -\frac{7}{5}$ και $c_2 = \frac{11}{5}$. Άρα υπάρχει μια μόνο λύση και είναι η $f(x) = \frac{1}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x + \frac{7}{5} e^{-x} \cos x + \frac{11}{5} e^{-x} \sin x$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι για κάθε τιμή της σταθεράς c η $y = x \tan(x + c)$ είναι – στα διαστήματα που ορίζεται – λύση της $xy' - x^2 - y^2 - y = 0$.

2. Βρείτε τις λύσεις της $f(x) = 1 + \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt$ στο $(0,+\infty)$.

   (Υπόδειξη: Αφού μετασχηματίσετε κατάλληλα την εξίσωση, παραγωγίστε την για να απαλείψετε το ολοκλήρωμα.)

3. Αποδείξτε ότι όλες οι λύσεις $y = f(x)$ της $(x^2+1)y' = 1$ στο $(-\infty,+\infty)$ έχουν την ιδιότητα ότι τα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ υπάρχουν και είναι αριθμοί. Υπολογίστε το $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \lim_{x\to-\infty} f(x)$.

4. Αν ο $y = f(x)$ ικανοποιεί την $x + y^3 + cxy^3 = 0$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα I, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά, αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι λύση της $y^4 + 3x^2y' = 0$ στο I.

   (Υπόδειξη: Μετασχηματίστε την $x + y^3 + cxy^3 = 0$ έτσι ώστε όταν την παραγωγίσετε στη νέα μορφή της να απαλείψετε τη σταθερά c.)

5. Αν ο $y = f(x)$ ικανοποιεί την $x(x+y) = ce^y$ για κάθε x σε κάποιο διάστημα I, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά, αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι λύση της $x(x+y-1)y' = 2x + y$ στο I.

A. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με χωριζόμενες μεταβλητές.

1. Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις: για κάθε εξίσωση βρείτε όλες τις λύσεις της και τα αντίστοιχα διαστήματα. Προσέξτε: τα διαστήματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές λύσεις της *ίδιας* εξίσωσης μπορεί να είναι διαφορετικά.

$$y' = e^{-y}, \quad y^2y' = 1, \quad (1+x^2)yy' = 1 + y^2, \quad yy'\sqrt{1-x^2} = x,$$
$$xyy' = (1+x^2)(1+y^2), \quad x + yy' = x(xy'-y)y, \quad (1+x^2)y' = 1 + y^2,$$
$$y' = y^2, \quad y' = (y-1)(y-2), \quad (x-1)y' = xy, \quad (x^2-4)y' = y,$$
$$(x+1)y' + y^2 = 0, \quad y^2 + (y')^2 = 1.$$

B. Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

1. Ποια είναι η γενική λύση της $y' + ky = 0$ στο $(-\infty,+\infty)$;

2. Αποδείξτε ότι είναι $k > 0$ αν και μόνο αν *κάθε* λύση $y = f(x)$ της $y' + ky = 0$ στο $(-\infty,+\infty)$ έχει την ιδιότητα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. Για ποιους m *κάθε* λύση $y = f(x)$ της $y' + 3y = e^{mx}$ στο $(-\infty,+\infty)$ έχει την ιδιότητα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

4. Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης: για κάθε εξίσωση βρείτε όλες τις λύσεις και τα αντίστοιχα διαστήματα.

$$y' + y = xe^{2x}, \quad xy' - y = 1, \quad xy' - y = x, \quad y' + xy = x^3,$$
$$x(x-1)y' + 3y = x(x-2), \quad y' + y\tan x = \cos x, \quad y' + y\cot x = \cos x.$$

5. Βρείτε τις λύσεις της $f(x) = 1 - x\int_1^x f(t)\,dt$ στο $(0,+\infty)$.

6. Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις με κατάλληλη αντικατάσταση.

$$y' - x\cot y = \frac{x+1}{\sin y}\,, \quad yy' + (1+x^2)y^2 = e^x\,, \quad 1 + e^y + 2xe^y y' = 0.$$

7. **Διαφορικές εξισώσεις Bernoulli**. Αν $\alpha \neq 1$, η διαφορική εξίσωση

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

λύνεται όταν χρησιμοποιηθεί η αντικατάσταση $z = y^{1-\alpha}$.

Να λυθούν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

$$y' + y = e^x\sqrt{y}\,, \quad y - y' = xy^2\,, \quad xy' - y = x\sqrt{y}\,, \quad xy' + y = xy^2\log x.$$

8. **Διαφορικές εξισώσεις Riccati**. Αν η $y = f(x)$ είναι λύση της

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

και η $y = g(x)$ είναι λύση μιας κατάλληλης – ποιας; – απλής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, αποδείξτε ότι και η $y = f(x) + \frac{1}{g(x)}$ είναι λύση της $y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$.

Βρείτε δυο σταθερές λύσεις της $y' + 3y - y^2 = 2$. Από καθεμιά από αυτές τις λύσεις προσδιορίστε – σύμφωνα με το πρώτο μέρος – μια αντίστοιχη οικογένεια λύσεων της $y' + 3y - y^2 = 2$. Αποδείξτε ότι οι δυο αυτές οικογένειες λύσεων είναι ίδιες, δηλαδή ότι αποτελούνται από τις ίδιες λύσεις.

Λύστε την $y' + 3y - y^2 = 2$ ως εξίσωση με χωριζόμενες μεταβλητές. Τι παρατηρείτε;

Γ. Διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης.

1. Ποια είναι η γενική λύση της $y'' + ky' + ly = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$ (i) αν $k^2 - 4l > 0$, (ii) αν $k^2 - 4l = 0$ και (iii) αν $k^2 - 4l < 0$;

2. Βρείτε k και l ώστε η $y'' + ky' + ly = 0$ να έχει ως λύση

   (i) την $y = e^{-x} + 3e^{2x}$.

   (ii) την $y = (1 + 2x)e^x$.

   (iii) την $y = e^{-2x}\sin(3x)$.

   Ποια είναι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης σε κάθε περίπτωση;

3. Αποδείξτε ότι είναι $k > 0$ και $l > 0$ αν και μόνο αν *κάθε* λύση $y = f(x)$ της $y'' + ky' + ly = 0$ στο $(-\infty, +\infty)$ έχει την ιδιότητα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. Ποιες είναι οι λύσεις $y = f(x)$ της $y'' + ky' + ly = 0$ με την ιδιότητα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

5. Λύστε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις.

$$y'' - 4y' + 3y = e^x\,, \quad y'' + 6y' + 9y = xe^{3x}\,, \quad y'' - 2y' + 5y = \sin(2x).$$

6. Για ποιους m *κάθε* λύση $y = f(x)$ της $y'' + 4y' + 3y = e^{mx}$ έχει την ιδιότητα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

   Απαντήστε στο ίδιο ερώτημα για την $y'' + 6y' + 9y = e^{mx}$ καθώς και για την $y'' + 2y' + 5y = e^{mx}$.

   Τι συμβαίνει για τις υπόλοιπες τιμές του m;

8.6 Εναλλακτικοί ορισμοί μερικών στοιχειωδών συναρτήσεων, Ι.

Α. Λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση και δυνάμεις.

Ένας «δημοφιλής» εναλλακτικός ορισμός του λογαρίθμου ενός θετικού αριθμού είναι ο εξής:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad (x > 0).$$

Η συνάρτηση $y = \frac{1}{t}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[x, 1]$, αν $0 < x < 1$, και στο $[1, x]$, αν $x > 1$, οπότε είναι και ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα. Ξεκινώντας από αυτόν τον τύπο, μπορούμε να αποδείξουμε με διάφορους τρόπους όλες τις ιδιότητες των λογαρίθμων και της λογαριθμικής συνάρτησης.

Για παράδειγμα, επειδή η $y = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι η $y = \log x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $\frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$. Από την ίδια σχέση φαίνεται ότι η $y = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Ο τύπος $\log(ab) = \log a + \log b$ για $a, b > 0$ μπορεί να αποδειχτεί με δυο τρόπους. Μπορούμε να θεωρήσουμε την $y = h(x) = \log(xb) - \log x$ και να παρατηρήσουμε ότι $h'(x) = b\frac{1}{xb} - \frac{1}{x} = 0$, οπότε η $y = h(x)$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$. Επειδή, εξ ορισμού, είναι $\log 1 = 0$, έχουμε ότι $h(1) = \log b$ και, επομένως, είναι $\log(xb) - \log x = h(x) = h(1) = \log b$ για κάθε $x > 0$. Άρα με $x = a$ βρίσκουμε την $\log(ab) = \log a + \log b$. Επίσης, μπορούμε να κάνουμε το εξής. Γράφουμε $\log(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \int_1^a \frac{1}{t}\,dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,dt = \log a + \int_1^b \frac{1}{s}\,ds = \log a + \log b$, όπου για την προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $t = as$. Από την $\log(ab) = \log a + \log b$, με $b = \frac{1}{a}$ βρίσκουμε την $\log\frac{1}{a} = -\log a$. Τώρα, με την αρχή της επαγωγής είναι προφανές ότι για κάθε φυσικό n ισχύει $\log(2^n) = n\log 2$ και, επειδή $\log 2 > \log 1 = 0$, βλέπουμε ότι $\lim_{n\to+\infty}\log(2^n) = +\infty$. Επειδή η $y = \log x$ είναι αύξουσα, υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\log x$, και, επειδή $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, συνεπάγεται ότι $\lim_{x\to+\infty}\log x = \lim_{n\to+\infty}\log(2^n) = +\infty$. Κατόπιν, με αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε ότι $\lim_{x\to0+}\log x = \lim_{t\to+\infty}\log\frac{1}{t} = -\lim_{t\to+\infty}\log t = -\infty$. Τέλος, από τα δυο όρια καθώς $x \to 0+$ και $x \to +\infty$ συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $y = \log x$ στο $(0, +\infty)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$.

Τώρα, μπορούμε να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση ως την αντίστροφη της λογαριθμικής. Θεωρούμε, δηλαδή, την $y = e^x$ με πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ έτσι ώστε να είναι

$$y = e^x \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad x = \log y.$$

Επομένως, η $y = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα, παραγωγίσιμη στο $(-\infty, +\infty)$ και $\frac{d\,e^x}{dx} = \frac{1}{\frac{d\,\log y}{dy}\big|_{y=e^x}} = e^x$ για κάθε x. Υπάρχουν δυο τρόποι να αποδειχθεί η ισότητα $e^{a+b} = e^a e^b$ για κάθε a, b. Μπορούμε να γράψουμε $c = e^a$ και $d = e^b$, οπότε είναι $a + b = \log c + \log d = \log(cd)$ και, επομένως, $e^{a+b} = cd = e^a e^b$. Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε την $y = h(x) = e^{a+b-x}e^x$ και τότε είναι $h'(x) = -e^{a+b-x}e^x + e^{a+b-x}e^x = 0$ για κάθε x, οπότε η $y = h(x)$ είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα είναι $e^{a+b-x}e^x = h(x) = h(0) = e^{a+b}e^0 = e^{a+b}$ για κάθε x και, με $x = b$, βρίσκουμε την $e^{a+b} = e^a e^b$. Από αυτήν την ισότητα και από το ότι $e^0 = 1$ βρίσκουμε και την $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$.

Σ' αυτό το σημείο πρέπει να συνειδητοποιήσουμε ότι έχει μεν οριστεί το σύμβολο e^x αλλά δεν έχει οριστεί ο αριθμός e. Ορίζουμε, λοιπόν,

$$e = e^1 ,$$

και, επομένως, είναι $\log e = 1$.

Τέλος, ορίζουμε τη δύναμη ενός θετικού αριθμού a με οποιονδήποτε εκθέτη x με τον τύπο

$$a^x = e^{x \log a} .$$

Φυσικά, αν $a = e$, τότε ο a^x είναι εξ ορισμού ίσος με τον $e^{x \log e} = e^x$, χωρίς να προκύπτει αντίφαση. Επίσης, είναι $a^1 = e^{1 \log a} = e^{\log a} = a$.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις ιδιότητες των δυνάμεων: $a^{x+y} = e^{(x+y)\log a} = e^{x \log a + y \log a} = e^{x \log a} e^{y \log a} = a^x a^y$ και $(ab)^x = e^{x \log(ab)} = e^{x \log a + x \log b} = e^{x \log a} e^{x \log b} = a^x b^x$ και $a^{xy} = e^{xy \log a} = e^{x \log(e^{y \log a})} = e^{x \log(a^y)} = (a^y)^x$. Επίσης, επειδή η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσες, προκύπτει ότι, αν είναι $a > 1$ και $x > 0$, τότε είναι $\log a > \log 1 = 0$ και, επομένως, $a^x = e^{x \log a} > e^{0 \cdot 0} = e^0 = 1$. Από αυτήν την ιδιότητα προκύπτουν πολύ εύκολα – με καθαρά αλγεβρικό τρόπο – όλες οι ανισοτικές ιδιότητες των δυνάμεων.

Μπορεί, τώρα, να αναρωτηθεί κάποιος: πώς εξασφαλίζουμε ότι οι συναρτήσεις, που ορίστηκαν όπως μόλις περιγράψαμε, ταυτίζονται με τις συναρτήσεις που γνωρίζουμε; Αυτό μπορεί να απαντηθεί με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα, γνωρίζαμε ότι η αρχική λογαριθμική συνάρτηση ικανοποιεί την $\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ και ότι την ίδια ισότητα ικανοποιεί – εξ ορισμού – η νέα λογαριθμική συνάρτηση. Άρα οι δυο συναρτήσεις είναι ίδιες. Επίσης, και οι δυο λογαριθμικές συναρτήσεις $y = \log x$ (η αρχική και η νέα) έχουν ίδια παράγωγο $\frac{1}{x}$. Άρα διαφέρουν κατά σταθερή συνάρτηση και, επειδή, έχουν ίδια τιμή $\log 1 = 0$ στον 1, συνεπάγεται ότι ταυτίζονται. Από το ότι ταυτίζονται οι δυο λογαριθμικές συναρτήσεις προκύπτει ότι και οι αντίστροφές τους, δηλαδή η αρχική εκθετική συνάρτηση και η εκθετική συνάρτηση που ορίσαμε σ' αυτήν την ενότητα, ταυτίζονται. Μπορούμε, επίσης, να αποδείξουμε εξ αρχής ότι οι δυο εκθετικές συναρτήσεις ταυτίζονται – και, επομένως, ότι και οι αντίστροφές τους, οι λογαριθμικές, ταυτίζονται. Κι αυτό γίνεται με διάφορους τρόπους. Αν συμβολίσουμε $y = f_1(x)$ τη μια εκθετική συνάρτηση και $y = f_2(x)$ την άλλη και θεωρήσουμε την $y = h(x) = f_1(x) f_2(-x)$, τότε είναι $h'(x) = f_1{}'(x) f_2(-x) - f_1(x) f_2{}'(-x) = f_1(x) f_2(-x) - f_1(x) f_2(-x) = 0$ για κάθε x, οπότε η $y = h(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα είναι $f_1(x) f_2(-x) =$

$h(x) = h(0) = f_1(0)f_2(0) = 1 \cdot 1 = 1$ και, επομένως, $f_1(x) = f_2(x)$ για κάθε x. Δηλαδή, οι δυο εκθετικές συναρτήσεις ταυτίζονται. Ένας δεύτερος τρόπος, πιο κοντά στην ουσία αυτών των συναρτήσεων, είναι ο εξής. Αν ο a^x είναι όπως τον ορίσαμε σ΄ αυτήν την ενότητα, τότε, βάσει των ιδιοτήτων που αποδείξαμε λίγο πριν, για κάθε φυσικό n ισχύει $a^n = a^{1+\cdots+1} = a^1 \cdots a^1 = a \cdots a$ και, επομένως, ο a^n ταυτίζεται με την γνωστή *δύναμη του a με φυσικό εκθέτη*. Από αυτό εύκολα προκύπτει η ίδια ισότητα για ακέραιο εκθέτη. Κατόπιν, βλέπουμε ότι η εξίσωση $x^n = a$, με φυσικό n και $a > 0$, έχει τη λύση $x = a^{\frac{1}{n}}$ – με τον νέο ορισμό – διότι είναι $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$. Άρα ο $a^{\frac{1}{n}}$ ταυτίζεται με τη γνωστή μας ρίζα $\sqrt[n]{a}$. Τώρα, για κάθε ρητό $r = \frac{m}{n}$ σε ανάγωγη μορφή είναι – με τον νέο ορισμό – $a^r = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}m} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m$ και, επομένως, ο a^r ταυτίζεται με τον a^r, όπως αυτός είχε εξ αρχής οριστεί στο πρώτο κεφάλαιο. Τέλος, από τις ανισοτικές ιδιότητες των συναρτήσεων $y = a^x$ – είτε με τον νέο είτε με τον παλιό ορισμό – συνεπάγεται το εξής. Αν $y = f_1(x)$ είναι η $y = a^x$ με τον παλιό ορισμό και $y = f_2(x)$ είναι η $y = a^x$ με τον νέο ορισμό, τότε για $a > 1$ και για άρρητο x, ισχύει $f_1(s) < f_1(x) < f_1(t)$ και $f_2(s) < f_2(x) < f_2(t)$ για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$. Επειδή οι δυο συναρτήσεις έχουν ίδιες τιμές στους ρητούς, συνεπάγεται ότι οι αριθμοί $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ικανοποιούν την ίδια διπλή ανισότητα $f_1(s) < \xi < f_1(t)$ για όλους τους ρητούς s, t με $s < x < t$. Από το Θεώρημα 1.3 συνεπάγεται ότι είναι $f_2(x) = f_1(x)$. Άρα, αν $a > 1$, οι δυο ορισμοί του a^x έχουν το ίδιο αποτέλεσμα και για άρρητο εκθέτη x. Το ότι αυτό ισχύει και όταν $0 < a \leq 1$ είναι, τώρα, πολύ εύκολο να αποδειχθεί με καθαρά αλγεβρικό τρόπο.

Η επέκταση του ορισμού της δύναμης a^x για αρνητική βάση a και ρητό εκθέτη x γίνεται πολύ απλά και δε θα ασχοληθούμε περαιτέρω.

Παρατήρηση - αποτίμηση: Περιγράψαμε έναν, όπως είπαμε, «δημοφιλή» τρόπο ορισμού της λογαριθμικής συνάρτησης, της εκθετικής συνάρτησης και των δυνάμεων, ο οποίος διαθέτει, αναμφίβολα, μια κομψότητα. Η «συντομία» του τρόπου αυτού είναι, όμως, επιφανειακή! Οι αρχικοί ορισμοί που δόθηκαν στο Κεφάλαιο 1 βασίστηκαν σε διάφορα θεωρήματα που δεν αποδείχτηκαν. Οι ορισμοί που δόθηκαν μόλις τώρα σ΄ αυτήν την ενότητα βασίζονται, κι αυτοί, σε πολλά θεωρήματα που δεν έχουν αποδειχτεί – στα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις και κυρίως στο Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, στην ύπαρξη ορίου μονότονων συναρτήσεων και, φυσικά, στην ολοκληρωσιμότητα των συνεχών συναρτήσεων. Και οι ορισμοί του Κεφαλαίου 1 και οι ορισμοί αυτής της ενότητας βασίζονται, λοιπόν, σε θεωρήματα τα οποία δεν έχουμε αποδείξει και όλα αυτά βασίζονται, σε τελική ανάλυση, στη λεγόμενη Ιδιότητα Συνέχειας των πραγματικών αριθμών – με την οποία, καλώς ή κακώς, δεν ασχολούνται αυτές οι σημειώσεις. Η φύση, επομένως, των δυσκολιών των οποιωνδήποτε ορισμών των συγκεκριμένων συναρτήσεων είναι κοινή και το μόνο που επιτυγχάνουμε, αν δε δούμε τους ορισμούς στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 1, είναι η μετάθεση αντιμετώπισης των δυσκολιών σε κατοπινότερο στάδιο. Υπάρχουν, όμως, δυο ουσιαστικοί λόγοι που συνηγορούν υπέρ της πρώιμης παρουσίασης των συναρτήσεων αυτών. Ο ένας είναι ότι αποτελούν – μαζί με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις – τα κύρια παραδείγματα εφαρμογής των εννοιών του απειροστικού λογισμού και δεν είναι παιδαγωγικά σωστό να αναπτύσσεται η θεωρία «στα ύψη» χωρίς ουσιαστικά και ενδιαφέροντα παραδείγματα. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι είναι μάλλον μη φυσιολογικός εννοιολογικά ο ορισμός των δυνάμεων μέσω λογαρίθμων και, εν τέλει, μέσω ολοκληρωμάτων!

Β. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους.

Ένας αναλυτικός τρόπος ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών είναι ο εξής. Ορίζουμε πρώτα την τόξο-εφαπτόμενη ενός αριθμού x με τον τύπο

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt.$$

Η συνάρτηση $y=\frac{1}{t^2+1}$ είναι συνεχής στο $[0,x]$, αν $x>0$, και στο $[x,0]$, αν $x<0$, οπότε είναι και ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα. Λόγω της συνέχειας της $y=\frac{1}{x^2+1}$ στο $(-\infty,+\infty)$, η $y=\arctan x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και ισχύει $\frac{d\arctan x}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$ για κάθε x. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι η $y=\arctan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$. Η συνάρτηση είναι και περιττή, διότι $\arctan(-x)=\int_0^{-x}\frac{1}{t^2+1}\,dt=-\int_0^x\frac{1}{(-s)^2+1}\,ds=-\arctan x$. Κατόπιν, παρατηρούμε ότι είναι $\frac{1}{x^2+1}\le 1$ στο $[0,1]$ και $\frac{1}{x^2+1}\le\frac{1}{x^2}$ στο $[1,+\infty)$. Άρα για κάθε $x\ge 1$ είναι $\arctan x=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt+\int_1^x\frac{1}{t^2+1}\,dt\le\int_0^1 1\,dt+\int_1^x\frac{1}{t^2}\,dt=1+(1-\frac{1}{x})<2$. Αυτό σημαίνει ότι η $y=\arctan x$ είναι άνω φραγμένη στο $[1,+\infty)$ και, επειδή είναι και αύξουσα, συνεπάγεται ότι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\arctan x$ και είναι αριθμός. Ορίζουμε, τώρα, τον αριθμό π ως

$$\pi = 2\lim_{x\to+\infty}\arctan x.$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$ και $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=\lim_{t\to+\infty}\arctan(-t)=-\lim_{t\to+\infty}\arctan t=-\frac{\pi}{2}$ και, επομένως, το σύνολο τιμών της $y=\arctan x$ στο $(-\infty,+\infty)$ είναι το $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Μια προφανής τιμή της $y=\arctan x$ είναι η $\arctan 0=\int_0^0\frac{1}{t^2+1}\,dt=0$.

Μια χρήσιμη τιμή της $y=\arctan x$ προκύπτει ως εξής. Με την αλλαγή μεταβλητής $s=\frac{1}{t}$, βρίσκουμε $\int_1^x\frac{1}{t^2+1}\,dt=-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{s^2+1}\,ds=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{1}{s^2+1}\,ds$, οπότε $\frac{\pi}{2}=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{1}{t^2+1}\,dt=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt+\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{1}{t^2+1}\,dt=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt+\lim_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{1}{t^2+1}\,dt=2\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt$. Άρα είναι $\arctan 1=\int_0^1\frac{1}{t^2+1}\,dt=\frac{\pi}{4}$. Επιπλέον, είναι $\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

Τώρα, ορίζουμε ως $y=\tan x$ την αντίστροφη συνάρτηση της $x=\arctan y$. Δηλαδή, ορίζουμε

$$y=\tan x \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad x=\arctan y.$$

Η $y=\tan x$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ με παράγωγο $\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\frac{d\arctan y}{dy}\big|_{y=\tan x}}=(\tan x)^2+1$. Επειδή η $x=\arctan y$ είναι περιττή, συνεπάγεται ότι και η $y=\tan x$ είναι περιττή. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\tan 0=0$, $\tan\frac{\pi}{4}=1$ και $\tan(-\frac{\pi}{4})=-1$.

Καθώς ο αριθμός k διατρέχει το σύνολο $\mathbf{Z}$ των ακεραίων, τα διάφορα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ έχουν όλα μήκος π, είναι ξένα ανά δύο και για κάθε δυο διαδοχικές τιμές του ακεραίου, τις k και $k+1$, τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ και $\big(-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\big)$ έχουν κοινό το άκρο $\frac{\pi}{2}+k\pi=-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi$, δηλαδή είναι διαδοχικά. Ένα από αυτά τα διαστήματα είναι – για $k=0$ – το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ στο οποίο είναι ορισμένη η $y=\tan x$. Το διάστημα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ προκύπτει από το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με οριζόντια μεταφορά κατά $k\pi$. Ορίζουμε, λοιπόν, την $y=\tan x$ σε κάθε τέτοιο διάστημα με τον τύπο

$$\tan x=\tan(x-k\pi) \qquad \text{αν} \quad -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

Μ' αυτόν τον τρόπο η $y=\tan x$ ορίζεται στην ένωση όλων των διαστημάτων $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, όπου ο k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος, και είναι περιοδική με περίοδο π. Λόγω περιοδικότητας, είναι προφανές ότι το αριστερό πλευρικό όριο της $y=\tan x$ σε κάθε σημείο $\frac{\pi}{2}+k\pi$ είναι το ίδιο με το αριστερό πλευρικό της όριο στο $\frac{\pi}{2}$, δηλαδή $+\infty$. Ομοίως, το δεξιό πλευρικό όριο της $y=\tan x$ σε κάθε σημείο $\frac{\pi}{2}+k\pi$ είναι το ίδιο με το δεξιό πλευρικό της όριο στο $-\frac{\pi}{2}$, δηλαδή $-\infty$. Επίσης, πάλι λόγω περιοδικότητας, η σχέση $\frac{d\tan x}{dx}=(\tan x)^2+1$ ισχύει σε όλα τα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$.

Παρατηρούμε, τώρα, ότι ο $\frac{x}{2}$ ανήκει σε οποιοδήποτε από τα παραπάνω διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$ αν και μόνο αν ο x ανήκει σε οποιοδήποτε από τα διαστήματα $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$. Βάσει της παρατήρησης αυτής, ορίζουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $y=\cos x$ και $y=\sin x$ στα διαστήματα $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$, όπου ο k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος, με τους τύπους

$$\cos x=\frac{1-(\tan\frac{x}{2})^2}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}, \qquad \sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}.$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες σε κάθε $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$ και με λίγες απλές πράξεις, βλέπουμε ότι είναι $\frac{d\cos x}{dx}=-\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}=-\sin x$ και $\frac{d\sin x}{dx}=\frac{1-(\tan\frac{x}{2})^2}{1+(\tan\frac{x}{2})^2}=\cos x$.

Όπως και με τα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, βλέπουμε ότι καθώς ο ακέραιος k διατρέχει το σύνολο $\mathbf{Z}$, τα διαστήματα $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$ έχουν όλα μήκος 2π, είναι ξένα ανά δύο και για κάθε δυο διαδοχικές τιμές του ακεραίου, τις k και $k+1$, τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\pi+k2\pi, \pi+k2\pi)$ και $\big(-\pi+(k+1)2\pi, \pi+(k+1)2\pi\big)$ έχουν κοινό το άκρο $\pi+k2\pi=-\pi+(k+1)2\pi$, δηλαδή είναι διαδοχικά. Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει τις συναρτήσεις $y=\cos x$ και $y=\sin x$ στο $(-\infty,+\infty)$ εκτός από τα σημεία $\pi+k2\pi$, για οποιονδήποτε ακέραιο k.

Χρησιμοποιώντας τα πλευρικά όρια της $y=\tan x$ σε κάθε $\frac{\pi}{2}+k\pi$, υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια των $y=\cos x$ και $y=\sin x$ σε κάθε $\pi+k2\pi$ και βρίσκουμε ότι η $y=\cos x$ έχει όριο (δηλαδή έχει ίσα πλευρικά όρια) στον $\pi+k2\pi$ το οποίο είναι ίσο με -1. Ομοίως, η $y=\sin x$ έχει όριο (δηλαδή έχει ίσα πλευρικά όρια) στον $\pi+k2\pi$ το οποίο είναι ίσο με 0. Ορίζουμε, λοιπόν, $\cos(\pi+k2\pi)=-1$ και $\sin(\pi+k2\pi)=0$ για κάθε ακέραιο k και, τώρα, οι συναρτήσεις $y=\cos x$ και $y=\sin x$ είναι ορισμένες και συνεχείς σε ολόκληρο το $(-\infty,+\infty)$.

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας τον Πρώτο Κανόνα του l' Hopitâl, υπολογίζουμε ότι σε κάθε $\xi = \pi + k2\pi$ είναι $\lim_{x\to\xi} \frac{\cos x - \cos\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{-\sin x}{1} = 0 = -\sin\xi$ και $\lim_{x\to\xi} \frac{\sin x - \sin\xi}{x-\xi} = \lim_{x\to\xi} \frac{\cos x}{1} = -1 = \cos\xi$. Άρα οι $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι παραγωγίσιμες στον $\xi = \pi + k2\pi$ και ισχύει $\frac{d\cos x}{dx}\big|_{x=\xi} = -\sin\xi$ και $\frac{d\sin x}{dx}\big|_{x=\xi} = \cos\xi$. Επομένως, οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $(-\infty, +\infty)$ και είναι $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ και $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$.

Από τον ορισμό των $y = \cos x$ και $y = \sin x$ και από το ότι η $y = \tan x$ είναι περιοδική με περίοδο π βλέπουμε ότι οι $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π. Επίσης, από το ότι η $y = \tan x$ είναι περιττή, αποδεικνύεται αμέσως ότι η $y = \cos x$ είναι άρτια και η $y = \sin x$ είναι περιττή.

Ξεκινώντας από τις γνωστές τιμές της $y = \tan x$, βρίσκουμε τις: $\cos 0 = 1$, $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$ και $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$.

Από το ότι η $y = \tan x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και από τις τιμές της στους $-\frac{\pi}{4}$, 0 και $\frac{\pi}{4}$, εύκολα βγάζουμε συμπεράσματα για το πρόσημο των $y = \cos x$ και $y = \sin x$ και, μέσω των παραγώγων τους, για τα διαστήματα μονοτονίας τους.

Τώρα πια μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις βασικές ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων· για παράδειγμα, την $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$. Θεωρούμε την $y = h(x) = \cos(a+b-x)\cos x - \sin(a+b-x)\sin x$ και βρίσκουμε ότι $h'(x) = \sin(a+b-x)\cos x - \cos(a+b-x)\sin x + \cos(a+b-x)\sin x - \sin(a+b-x)\cos x = 0$, οπότε η $y = h(x)$ είναι σταθερή στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα είναι $\cos(a+b-x)\cos x - \sin(a+b-x)\sin x = h(x) = h(0) = \cos(a+b)$ για κάθε x. Με $x = b$ βρίσκουμε την $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$. Άρα προκύπτουν και οι $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ και $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$. Από την προτελευταία ισότητα βρίσκουμε την $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$.

Τέλος, υπάρχουν διάφοροι τρόποι να αποδειχθεί ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως ορίστηκαν αρχικά στο Κεφάλαιο 1, και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως ορίστηκαν σ' αυτήν την ενότητα, είναι ίδιες. Ένας τρόπος είναι ο εξής. Αν $y = c_1(x)$ και $y = s_1(x)$ είναι το ζευγάρι $y = \cos x$ και $y = \sin x$ με τον αρχικό ορισμό και $y = c_2(x)$ και $y = s_2(x)$ είναι το ίδιο ζευγάρι με τον νέο ορισμό, τότε θεωρούμε την $y = h(x) = (c_1(x) - c_2(x))^2 + (s_1(x) - s_2(x))^2$ και βρίσκουμε ότι είναι $h'(x) = 2(c_1(x)-c_2(x))(-s_1(x)+s_2(x)) + 2(s_1(x)-s_2(x))(c_1(x)-c_2(x) = 0$ για κάθε x. Άρα η $y = h(x)$ είναι σταθερή και, επομένως, είναι $(c_1(x) - c_2(x))^2 + (s_1(x) - s_2(x))^2 = h(x) = h(0) = (1-1)^2 + (0-0)^2 = 0$ για κάθε x. Άρα είναι $c_1(x) = c_2(x)$ και $s_1(x) = s_2(x)$ για κάθε x.

Παρατήρηση - αποτίμηση: Στο Κεφάλαιο 1 είδαμε έναν ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών ο οποίος δεν είναι επαρκής από την αναλυτική σκοπιά, επειδή εξαρτάται από γεωμετρικές έννοιες και όχι αποκλειστικά από τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών. Δυστυχώς, κάθε αναλυτικός ορισμός των τριγωνομετρικών αριθμών χρειάζεται αρκετή προετοιμασία και δεν είναι δυνατό να αναπτυχθεί στα πλαίσια ενός εισαγωγικού κεφαλαίου όπως το Κεφάλαιο 1 αυτών των σημειώσεων.

Εκτός από τον ορισμό που είδαμε μέσω της $y = \arctan x = \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με την $y = \arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$. Η ανάπτυξη θα ήταν περίπου ίδια.

Υπάρχει και ένας εντελώς διαφορετικός τρόπος ορισμού των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τον οποίο θα μελετήσουμε στο Κεφάλαιο 10.

Κεφάλαιο 9

Μερικά ζητήματα προσέγγισης.

Κατά προσέγγιση υπολογισμός τιμών συνάρτησης μέσω του τύπου του Taylor είτε με σφάλμα τύπου Lagrange είτε με σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου. Κατά προσέγγιση υπολογισμός λύσεων εξισώσεων με την επαναληπτική διαδικασία του Newton. Κατά προσέγγιση υπολογισμός ολοκληρωμάτων Riemann: οι μέθοδοι των ορθογωνίων, των τραπεζίων, των εφαπτομένων και του Simpson.

9.1 Ο τύπος του Taylor.

Αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στον ξ, τότε $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ ή, με άλλα λόγια, ο $f(x)$ είναι *περίπου ίσος* με τον $f(\xi)$ όταν ο x είναι πολύ κοντά στον ξ. Συμβολικά:

$$f(x) \approx f(\xi) \quad (x \text{ πολύ κοντά στον } \xi).$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον $f(\xi)$ αν είναι γνωστός – δηλαδή αν υπολογίζεται εύκολα – ως προσέγγιση του $f(x)$.

Παράδειγμα: Επειδή ο $4,00001$ είναι πολύ κοντά στον 4 και η $y = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στον 4, μπορούμε να πούμε ότι $\sqrt{4,00001} \approx \sqrt{4} = 2$.

Είναι, προφανώς, πολύ χρήσιμο αν, εκτός από τον $f(\xi)$, γνωρίζουμε και μια εκτίμηση για τη διαφορά $f(x) - f(\xi)$ ώστε να έχουμε έναν έλεγχο του σφάλματος που κάνουμε προσεγγίζοντας τον $f(x)$ με τον $f(\xi)$. Αυτό το πετυχαίνουμε αν έχουμε πληροφορίες για την παράγωγο της συνάρτησης στο διάστημα ανάμεσα στα σημεία x και ξ. Πράγματι, αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα x και ξ και έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα με τα ίδια άκρα, τότε υπάρχει κάποιος η γνησίως ανάμεσα στους x και ξ ώστε να είναι $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = f'(\eta)$ ή, ισοδύναμα,

$$f(x) = f(\xi) + f'(\eta)(x - \xi).$$

Αν τώρα, για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι οι l και u είναι κάτω φράγμα και άνω φράγμα, αντιστοίχως, της παραγώγου στο ανοικτό διάστημα με άκρα x και ξ, τότε συμπεραίνουμε ότι $l(x-\xi) \le f(x) - f(\xi) \le u(x-\xi)$, αν $x > \xi$, και $u(x-\xi) \le f(x) - f(\xi) \le l(x-\xi)$, αν $x < \xi$. Ειδικώτερα, αν ο $M \ge 0$ είναι φράγμα της απόλυτης τιμής της παραγώγου, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το μέγεθος $|f(x) - f(\xi)| = |f'(\eta)||x-\xi|$ του σφάλματος δεν είναι μεγαλύτερο από την ποσότητα $M|x-\xi|$.

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι ο $\sqrt{4,00001}$ είναι περίπου ίσος με τον $\sqrt{4} = 2$. Η παράγωγος της $y = \sqrt{x}$ είναι η $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ και είναι $0 < \frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ για κάθε $x \ge 4$, οπότε και για κάθε x ανάμεσα στον 4 και στον 4,00001. Επομένως, $0 \le \sqrt{4,00001} - 2 \le \frac{1}{4}(4,00001-4) = 0,0000025$. Άρα το σφάλμα που κάνουμε προσεγγίζοντας τον $\sqrt{4,00001}$ με τον $\sqrt{4} = 2$ είναι μη αρνητικό και όχι μεγαλύτερο από 0,0000025. Μάλιστα, από τη σχέση $2 \le \sqrt{4,00001} \le 2 + 0,0000025$ καταλαβαίνουμε ότι ο 2,00000 είναι προσέγγιση του $\sqrt{4,00001}$ με ακρίβεια έως και πέμπτου δεκαδικού ψηφίου.

Αν η $y = f(x)$ έχει παράγωγο και στον ξ (εκτός από τα σημεία του ανοικτού διαστήματος με άκρα x και ξ) και αν η παράγωγος είναι συνεχής στον ξ, τότε ο $f'(\eta)$, που εμφανίζεται στην ισότητα $f(x) = f(\xi) + f'(\eta)(x-\xi)$, είναι περίπου ίσος με τον $f'(\xi)$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)$$

και έχουμε μια ακόμη προσέγγιση του $f(x)$.

Παράδειγμα: Εφαρμόζοντας την τελευταία ισότητα στην $y = \sqrt{x}$, βρίσκουμε $\sqrt{4,00001} \approx 2 + \frac{1}{4}(4,00001-4) = 2,0000025$.

Μέχρι τώρα έχουν προκύψει δυο προσεγγίσεις του $\sqrt{4,00001}$, ο 2 και ο 2,0000025, και γνωρίζουμε ότι ο $\sqrt{4,00001}$ είναι ανάμεσα σ' αυτές τις δυο τιμές. Πώς θα αναγνωρίσουμε ποια από τις δυο αυτές τιμές είναι καλύτερη προσέγγιση του $\sqrt{4,00001}$ και πώς θα πετύχουμε *με κάποιο μεθοδικό τρόπο* καλύτερες προσεγγίσεις;

Αν στη σχέση $f(x) = f(\xi) + f'(\eta)(x-\xi)$ αντικαταστήσουμε τον $f'(\eta)$ με τον $f'(\frac{\xi+x}{2})$ αντί με τον $f'(\xi)$, τότε έχουμε $f(x) \approx f(\xi) + f'(\frac{\xi+x}{2})(x-\xi)$. Τώρα, υπάρχει κάποιος ζ γνησίως ανάμεσα στους ξ και $\frac{\xi+x}{2}$ ώστε να είναι $f'(\frac{\xi+x}{2}) = f'(\xi) + f''(\zeta)(\frac{\xi+x}{2} - \xi) = f'(\xi) + f''(\zeta)\frac{x-\xi}{2}$. Για να γίνει αυτό πρέπει να υποθέσουμε, φυσικά, ότι η πρώτη παράγωγος είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα ξ και $\frac{\xi+x}{2}$ και ότι υπάρχει η δεύτερη παράγωγος στο ανοικτό διάστημα με τα ίδια άκρα. Έχουμε, λοιπόν, ότι $f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\zeta)}{2}(x-\xi)^2$. Αν, επιπλέον, η δεύτερη παράγωγος είναι και συνεχής στον ξ, τότε είναι $f''(\zeta) \approx f''(\xi)$, οπότε

$$f(x) \approx f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 .$$

Έχουμε, λοιπόν, μέχρι τώρα τριών τύπων προσεγγίσεις του $f(x)$ όταν ο x είναι κοντά στον ξ:

$$f(x) \approx \begin{cases} f(\xi), \\ f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi), \\ f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 . \end{cases}$$

Για τον πρώτο τύπο προσέγγισης είδαμε και τρόπους εκτίμησης του σφάλματος βάσει φραγμάτων της πρώτης παραγώγου. Αυτά τώρα θα τα γενικεύσουμε.

Θεώρημα 9.1 ***Θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange.*** *Έστω φυσικός n και διάστημα I που περιέχει τον ξ. Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ έχει παραγώγους τάξης μέχρι και n συνεχείς στο I (δηλαδή και στα πιθανά άκρα του) και ότι υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+1$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του I. Τότε για κάθε x στο I υπάρχει κάποιος η γνησίως ανάμεσα στους x και ξ ώστε να είναι*

$$\boxed{f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1} .}$$

Αν, επίσης, ισχύει $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I, τότε

$$\boxed{\left| f(x) - \left(f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \right) \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-\xi|^{n+1}}$$

για κάθε x στο I.

Η παράσταση $f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$ ονομάζεται **προσέγγιση Taylor τάξης** n της $y = f(x)$ στο διάστημα I και ο $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$ ονομάζεται **σφάλμα τάξης** n **τύπου Lagrange**. Η προσέγγιση Taylor τάξης n είναι πολυώνυμο του x βαθμού $\leq n$.

Αν $n = 0$ τότε, με την παραδοχή ότι παράγωγος τάξης 0 είναι η ίδια η συνάρτηση, η ισότητα στο Θεώρημα του Taylor γράφεται $f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\eta)}{1!}(x-\xi)$ και δεν είναι τίποτε άλλο από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Το δεύτερο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 9.1 μας λέει ότι είναι

$$f(x) - \left(f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \right) = \mathrm{O}\left((x-\xi)^{n+1}\right)$$

κοντά στον ξ. Καλό θα ήταν να αντιπαραβάλετε αυτό το αποτέλεσμα με τα αποτελέσματα των ασκήσεων Α11 της ενότητας 6.12 και Β7 της ενότητας 6.13.

Απόδειξη: Για την απόδειξη του Θεωρήματος 9.1 θεωρούμε σταθερούς τους x και ξ και ορίζουμε τον αριθμό A μέσω της $f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{A}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$. Κατόπιν θεωρούμε τη συνάρτηση

$$y = g(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$$

με ανεξάρτητη μεταβλητή t στο κλειστό διάστημα με άκρα x και ξ. Η $y = g(t)$ είναι συνεχής στο κλειστό αυτό διάστημα και έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα με τα ίδια άκρα ίση με

$$g'(t) = \frac{A - f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,.$$

Προφανώς, είναι $g(x) = 0$ και, βάσει του ορισμού του A, είναι $g(\xi) = 0$. Άρα υπάρχει η ανάμεσα στους x και ξ ώστε να είναι $g'(\eta) = 0$, οπότε $A = f^{(n+1)}(\eta)$. Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του A στην ισότητα που τον έχει εξ αρχής καθορίσει, παίρνουμε την ισότητα του Θεωρήματος του Taylor. Η ανισότητα προκύπτει από την ισότητα και την $|f^{(n+1)}(\eta)| \le M$.

Παράδειγμα: Έχουμε ήδη βρει την εκτίμηση $0,0000025$ για το σφάλμα της προσέγγισης του $\sqrt{4,00001}$ με τον $\sqrt{4} = 2$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.1 στην $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4,00001]$ με $\xi = 4$, $x = 4,00001$ και $n = 1$ και βρίσκουμε ότι είναι $\sqrt{4,00001} = \sqrt{4} + \frac{1}{1!}\frac{1}{2\sqrt{4}}(4,00001 - 4) - \frac{1}{2!}\frac{1}{4\sqrt{\eta^3}}(4,00001 - 4)^2 = 2,0000025 - \frac{10^{-10}}{8\sqrt{\eta^3}}$ για κάποιον η με $4 < \eta < 4,00001$. Επειδή $0 < \frac{10^{-10}}{8\sqrt{\eta^3}} < \frac{10^{-10}}{8\sqrt{4^3}} = 0,0000000000015625$, συνεπάγεται ότι $2,0000024999984375 < \sqrt{4,00001} < 2,0000025$. Αυτό σημαίνει ότι ο $2,00000249999$ προσεγγίζει τον $\sqrt{4,00001}$ με ακρίβεια έως και ενδέκατου δεκαδικού ψηφίου.

Αν θέλουμε ακόμη καλύτερη προσέγγιση, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 9.1 με $n = 2$. Τότε $\sqrt{4,00001} = \sqrt{4} + \frac{1}{1!}\frac{1}{2\sqrt{4}}(4,00001 - 4) - \frac{1}{2!}\frac{1}{4\sqrt{4^3}}(4,00001 - 4)^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8\sqrt{\eta^5}}(4,00001 - 4)^3 = 2,0000024999984375 + \frac{10^{-15}}{16\sqrt{\eta^5}}$ για κάποιον η με $4 < \eta < 4,00001$. Επειδή $0 < \frac{10^{-15}}{16\sqrt{\eta^5}} < \frac{10^{-15}}{16\sqrt{4^5}} = 0,000000000000000001953125$, έχουμε $2,0000024999984375 < \sqrt{4,00001} < 2,000002499998437501953125$. Επομένως, ο $2,00000249999843750$ προσεγγίζει τον $\sqrt{4,00001}$ με ακρίβεια έως και δέκατου έβδομου δεκαδικού ψηφίου.

Θεώρημα 9.2 *Θεώρημα του Taylor με σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου.* *Έστω φυσικός n και διάστημα I που περιέχει τον ξ. Υποθέτουμε ότι η $y = f(x)$ έχει παραγώγους τάξης μέχρι και $n+1$ συνεχείς στο I (δηλαδή και στα πιθανά άκρα του). Τότε για κάθε x στο I είναι*

$$\boxed{f(x) = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.}$$

Ο $\frac{1}{n!}\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$ ονομάζεται **σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου**.

Αν $n = 0$, τότε η ισότητα στο Θεώρημα του Taylor γράφεται $f(x) = f(\xi) + \frac{1}{0!}\int_\xi^x f'(t)\,dt$ και δεν είναι τίποτε άλλο από το (ii) της Πρότασης 8.3.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη στο $\int_\xi^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόστε το Θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange στην $y = \sqrt{x}$ στο διάστημα $[4, 4,00001]$ με $\xi = 4$ και $x = 4,00001$.

Ποιον n πρέπει να χρησιμοποιήσετε ώστε να προσεγγίσετε τον $\sqrt{4,00001}$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

2. Προσαρμόστε την προηγούμενη άσκηση στην προσέγγιση των $\sin(1^o)$ και $\sin(31^o)$ με ακρίβεια έως και χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου. ($1^o = 0 + \frac{\pi}{180}$, $31^o = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$.)

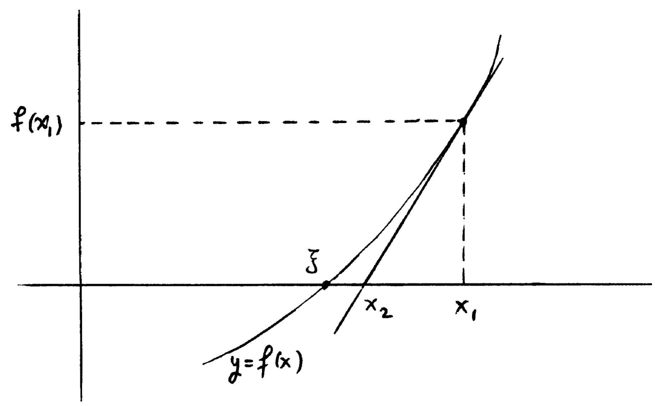
3. $^{(*)}$ Στο Θεώρημα του Taylor με σφάλμα τύπου Lagrange $\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}$ ο η εξαρτάται, φυσικά, από τον x. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει η παράγωγος τάξης $n+2$ της $y = f(x)$ στο διάστημα I και είναι συνεχής στον ξ, τότε είναι $\lim_{x\to\xi} \frac{\eta-\xi}{x-\xi} = \frac{1}{n+2}$ ή, με άλλα λόγια, $\eta - \xi \approx \frac{x-\xi}{n+2}$.

9.2 Προσεγγιστική επίλυση εξισώσεων.

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$f(x) = 0,$$

όπου η $y = f(x)$ είναι ορισμένη στο διάστημα (a, b) και ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι το (a, b) περιέχει μια τουλάχιστον λύση ξ της εξίσωσης αυτής. Για παράδειγμα, αν η $y = f(x)$ είναι συνεχής στο (a, b) και μπορούμε να βρούμε δυο σημεία του (a, b) στα οποία οι τιμές της $y = f(x)$ είναι ετερόσημες, τότε από το Θεώρημα του Bolzano γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον λύση της $f(x) = 0$ στο (a, b). Το πρόβλημα που θα μελετήσουμε τώρα είναι πώς θα προσεγγίσουμε την άγνωστη λύση ξ.



Σχήμα 9.1: Από την πρώτη στη δεύτερη προσέγγιση.

Θεωρούμε έναν x_1 στο (a, b) ο οποίος είναι *αρκετά κοντά* στον ξ, δηλαδή $\xi \approx x_1$, και το αντίστοιχο σημείο $(x_1, f(x_1))$ στο γράφημα της $y = f(x)$. Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στον x_1, τότε υπάρχει η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα στο σημείο $(x_1, f(x_1))$ και η εξίσωσή της είναι $y = f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$. Σύμφωνα με την *προσεγγιστική ισότητα* $0 = f(\xi) \approx f(x_1) + f'(x_1)(\xi - x_1)$ που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, βρίσκουμε ότι

$$\xi \approx x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Παρατηρήστε ότι το σημείο $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ είναι το σημείο τομής του x-άξονα και της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της $y = f(x)$ στο σημείο $(x_1, f(x_1))$.

Ξεκινήσαμε με τον x_1, περίπου ίσο με τον (άγνωστο) ξ, και βρήκαμε τον x_2, επίσης περίπου ίσο με τον ξ. Αν επαναλάβουμε αυτή την κατασκευή, βρίσκουμε τον $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ από τον x_2, τον $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$ από τον x_3 και ούτω καθ' εξής. Δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο μια ακολουθία αριθμών, η (x_n). Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **επαναληπτική διαδικασία του Newton.** *Υπό ορισμένες προϋποθέσεις*, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στη λύση ξ και, επιπλέον, μπορούμε να βρούμε εκτίμηση του σφάλματος $x_n - \xi$.

Πρόταση 9.1 *Έστω ότι η $y = f(x)$ έχει δεύτερη παράγωγο στο διάστημα (a, b) και $0 < m \le |f'(x)|$ και $|f''(x)| \le M$ για κάθε x στο (a, b). Θεωρούμε θετικό αριθμό $\mu < \frac{m}{M}$, έτσι ώστε κάποιο διάστημα $[c-\mu, c+\mu]$ να περιέχεται στο (a, b), και τον αριθμό $\nu = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{4M\mu}{m} + 1} - \mu - \frac{m}{M}$. Για τον ν ισχύει $0 < \nu < \mu$ και υποθέτουμε ότι στο διάστημα $[c - \nu, c + \nu]$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Αν αρχίσει η επαναληπτική διαδικασία του Newton με οποιονδήποτε x_1 στο $[c - \mu, c + \mu]$, τότε κάθε επόμενος x_n ανήκει στο $[c - \mu, c + \mu]$ και είναι

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi.$$

Επίσης, ισχύει

$$|x_n - \xi| \le \frac{2m}{M}\Big(\frac{M\mu}{m}\Big)^{2^{n-1}}$$

για κάθε n.

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιονδήποτε x_1 στο $[c - \mu, c + \mu]$ και τον $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1, υπάρχει η ανάμεσα στους x_1 και ξ ώστε $0 = f(\xi) = f(x_1) + f'(x_1)(\xi - x_1) + \frac{f''(\eta)}{2}(\xi - x_1)^2$ και, επομένως, $x_2 = x_1 + (\xi - x_1) + \frac{f''(\eta)}{2f'(x_1)}(\xi - x_1)^2$ ή, ισοδύναμα, $x_2 - \xi = \frac{f''(\eta)}{2f'(x_1)}(x_1 - \xi)^2$. Άρα $|x_2 - \xi| = \frac{|f''(\eta)|}{2|f'(x_1)|}|x_1 - \xi|^2 \le \frac{M}{2m}|x_1 - \xi|^2$. Επειδή ο x_1 ανήκει στο $[c-\mu, c+\mu]$ και ο ξ ανήκει στο $[c-\nu, c+\nu]$, συνεπάγεται ότι $|x_1-\xi| \le \mu+\nu$, οπότε $|x_2-\xi| \le \frac{M}{2m}(\mu+\nu)^2$. Άρα $|x_2 - c| \le |x_2 - \xi| + |\xi - c| \le \frac{M}{2m}(\mu+\nu)^2 + \nu = \mu$ και, επομένως, ο x_2 ανήκει στο $[c - \mu, c + \mu]$. Είναι φανερό ότι, αν εφαρμόσουμε τον ίδιο ακριβώς συλλογισμό στους x_2 και x_3, θα αποδειχθεί ότι και ο x_3 ανήκει στο $[c - \mu, c + \mu]$ οπότε, επαγωγικά, όλοι οι x_n ανήκουν στο $[c-\mu, c+\mu]$. Επίσης, έχουμε ότι $|x_n-\xi| \le \frac{M}{2m}|x_{n-1}-\xi|^2$ για κάθε $n \ge 2$. Από την ανισότητα αυτή και από την $|x_1 - \xi| \le \mu + \nu \le 2\mu$ αποδεικνύεται πολύ εύκολα με την αρχή της επαγωγής η $|x_n - \xi| \le \frac{2m}{M}\big(\frac{M\mu}{m}\big)^{2^{n-1}}$ για κάθε $n \ge 1$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ και $0 \le \frac{M\mu}{m} < 1$, συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{2m}{M}\big(\frac{M\mu}{m}\big)^{2^{n-1}} = 0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$.

Η ακολουθία (x_n) συγκλίνει εξαιρετικά γρήγορα στον ξ. Πράγματι, η μείωση του $\left(\frac{M\mu}{m}\right)^{2^{n-1}}$ και, επομένως, και του $|x_n - \xi|$ είναι *υπερ-εκθετική*, αφού η αύξηση του 2^{n-1} είναι εκθετική. Αυτό είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα της επαναληπτικής διαδικασίας του Newton, διότι σε σχετικά λίγα βήματα, δηλαδή με σχετικά μικρό n, πετυχαίνουμε πολύ καλή προσέγγιση του ξ.

Ο ξ στο (a, b) για τον οποίο είναι $f(\xi) = 0$ είναι μοναδικός. Πράγματι, αν υπήρχαν ξ_1 και ξ_2 στο (a, b) με $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$, τότε θα υπήρχε κάποιος η ανάμεσά τους ώστε να είναι $f'(\eta) = 0$ και αυτό αντιφάσκει με το ότι $0 < m \leq |f'(\eta)|$.

Πρακτικά, η Πρόταση 9.1 εφαρμόζεται ως εξής. Έχουμε το διάστημα (a, b) και τους αριθμούς m και M. Βρίσκουμε a_1 και b_1 με $a < a_1 < b_1 < b$ ώστε οι τιμές της $y = f(x)$ στους a_1, b_1 να έχουν αντίθετο πρόσημο – οπότε ο ξ είναι ανάμεσα στους a_1, b_1. Επιλέγουμε θετικό $\mu < \min\{\frac{m}{M}, a_1 - a, b - b_1\}$. Έτσι, για κάθε c στο $[a_1, b_1]$ (το οποίο θα επιλέξουμε σε λίγο) το διάστημα $[c-\mu, c+\mu]$ περιέχεται στο (a, b). Κατόπιν βρίσκουμε τον $\nu = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{4M\mu}{m} + 1} - \mu - \frac{m}{M}$ και χωρίζουμε το διάστημα $[a_1, b_1]$ σε διαδοχικά υποδιαστήματα μήκους $\leq 2\nu$. Για ένα ακριβώς από αυτά τα υποδιαστήματα, ας το ονομάσουμε I, ισχύει ότι οι τιμές της $y = f(x)$ στα άκρα του είναι ετερόσημες, οπότε ο ξ ανήκει στο I. Αν ονομάσουμε c το μέσο του I, τότε το I περιέχεται στο $[c-\nu, c+\nu]$, οπότε ο ξ ανήκει στο $[c-\nu, c+\nu]$, και το $[c-\mu, c+\mu]$ περιέχεται στο (a, b). Τέλος, αρχίζουμε την επαναληπτική διαδικασία του Newton με οποιοδήποτε x_1 στο $[c - \mu, c + \mu]$.

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόστε την επαναληπτική διαδικασία του Newton στην εξίσωση $x^2 - 2 = 0$ για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{2}$ στο διάστημα $[1, 2]$.

   Ξεκινήστε με $x_1 = 2$ και βρείτε τους x_2, x_3, x_4. Εκτιμήστε για καθέναν από αυτούς το σφάλμα σε σχέση με την αληθινή τιμή του $\sqrt{2}$.

   Ποιος πρέπει να είναι ο n ώστε ο x_n να προσεγγίζει τον $\sqrt{2}$ με ακρίβεια έως εκατοντάκις χιλιοστού δεκαδικού ψηφίου;

9.3 Προσεγγιστική ολοκλήρωση Riemann.

Στην ενότητα αυτή θα δούμε μερικές μεθόδους προσεγγιστικού υπολογισμού ολοκληρωμάτων.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$. Διαμερίζουμε το $[a, b]$ σε n ισομήκη διαστήματα με τα διαιρετικά σημεία

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad (0 \leq k \leq n).$$

Φυσικά, κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ έχει μήκος $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ θεωρούμε και το αντίστοιχο μέσο του, $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$, το οποίο συμβολίζουμε

$$x_{\frac{2k-1}{2}} = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} = a + \Big(k-\frac{1}{2}\Big)\frac{b-a}{n}\,.$$

Έχουμε, λοιπόν, τα διαδοχικά σημεία

$$x_0\,, x_{\frac{1}{2}}\,, x_1\,, \dots\,, x_{k-1}\,, x_{\frac{2k-1}{2}}\,, x_k\,, \dots\,, x_{n-1}\,, x_{\frac{2n-1}{2}}\,, x_n$$

και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές $y_i = f(x_i)$ της $y = f(x)$ σε όλα αυτά τα σημεία:

$$y_0\,, y_{\frac{1}{2}}\,, y_1\,, \dots\,, y_{k-1}\,, y_{\frac{2k-1}{2}}\,, y_k\,, \dots\,, y_{n-1}\,, y_{\frac{2n-1}{2}}\,, y_n\,.$$

Όλες οι μέθοδοι που θα αναπτύξουμε προσεγγίζουν το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ με κάποιες συγκεκριμένες απλές παραστάσεις των παραπάνω τιμών της $y = f(x)$ και, συγχρόνως, παρέχουν αντίστοιχες εκτιμήσεις για τα σφάλματα των προσεγγίσεων. Η ουσία όλων αυτών των μεθόδων είναι η προσέγγιση της $y = f(x)$ σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ με κατάλληλη πολυωνυμική συνάρτηση και η συνεπαγώμενη προσέγγιση του $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$ με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της πολυωνυμικής συνάρτησης. Κάθε μέθοδος χρησιμοποιεί τον δικό της τύπο πολυωνυμικής συνάρτησης, τον ίδιο σε κάθε υποδιάστημα: η *μέθοδος των ορθογωνίων* χρησιμοποιεί σταθερές συναρτήσεις, η *μέθοδος των τραπεζίων* και η *μέθοδος των εφαπτομένων* χρησιμοποιούν πολυώνυμα πρώτου βαθμού και, τέλος, η *μέθοδος του Simpson* χρησιμοποιεί πολυώνυμα τρίτου βαθμού σε κάθε υποδιάστημα.

Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος n των υποδιαστημάτων του $[a, b]$ τόσο καλύτερη είναι η προσέγγιση του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)\,dx$, δηλαδή τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα που κάνουμε προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα με την παράσταση που προκύπτει από την αντίστοιχη μέθοδο. Κάθε μέθοδος δίνει μια εκτίμηση για το σφάλμα η οποία έχει τη μορφή

$$|\text{σφάλμα}| \leq c\frac{(b-a)^{m+2}M_{m+1}}{n^{m+1}} = c(b-a)M_{m+1}{h_n}^{m+1}\,,$$

όπου $h_n = \frac{b-a}{n}$ είναι το κοινό μήκος των υποδιαστημάτων, c είναι κάποιος συγκεκριμένος αριθμός, m είναι ο βαθμός των πολυωνύμων που χρησιμοποιούνται από τη μέθοδο και M_{m+1} είναι ένα φράγμα της παραγώγου τάξης $m+1$ της $y = f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$. Είναι φανερό ότι το σφάλμα συγκλίνει στον 0 όταν ο n αυξάνει απεριόριστα ή, ισοδύναμα, όταν $\lim_{n\to+\infty} h_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} = 0$. Είναι, επίσης, φανερό ότι τα μεγαλύτερα σφάλματα προκύπτουν από τη μέθοδο των ορθογωνίων, τα μικρότερα από τη μέθοδο του Simpson και ότι από τις άλλες δυο μεθόδους προκύπτουν ενδιάμεσα σφάλματα. Βέβαια, αυτή η «ιεράρχηση» των μεθόδων αντισταθμίζεται (εν μέρει) από τον αριθμό των παραγώγων της $y = f(x)$ που η κάθε μέθοδος χρησιμοποιεί.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάθε μέθοδο ως εξής. Για απλούστευση των συμβόλων, αντί να παρουσιάσουμε την ιδέα της μεθόδου – τύπους πολυωνυμικών συναρτήσεων, προσεγγίσεις, εκτιμήσεις σφαλμάτων – σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ ξεχωριστά, θα κάνουμε όλους τους υπολογισμούς στο διάστημα $[a, b]$ και μετά θα εφαρμόσουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$. Τέλος, θα προσθέσουμε τις προσεγγίσεις καθώς και τις εκτιμήσεις των σφαλμάτων για όλα τα υποδιαστήματα.

Α. Η μέθοδος των ορθογωνίων.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ με $|f'(x)| \leq M_1$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε είναι

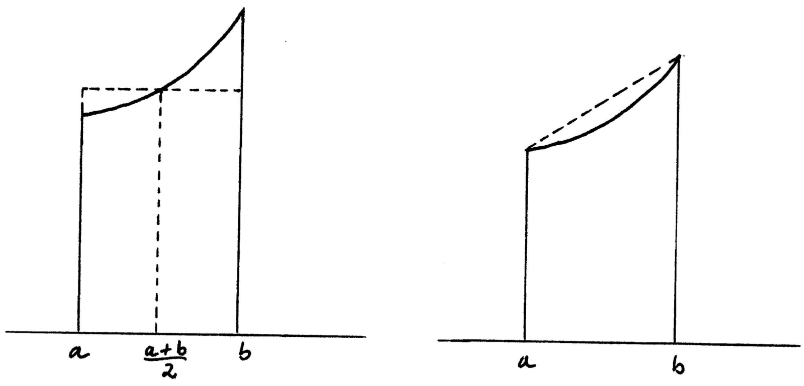
$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)\Big| \leq \frac{(b-a)^2 M_1}{4}\,.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη προσεγγίζουμε την $y = f(x)$ με τη σταθερή συνάρτηση (πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 0) $y = p(x) = f(\frac{a+b}{2})$. Αυτό γίνεται ως εξής. Για κάθε x στο $[a, b]$ υπάρχει ξ ανάμεσα στους x και $\frac{a+b}{2}$ ώστε $f(x) - p(x) = f(x) - f(\frac{a+b}{2}) = f'(\xi)(x - \frac{a+b}{2})$. Άρα $|f(x)-p(x)| \leq M_1|x-\frac{a+b}{2}|$ για κάθε x στο $[a, b]$. Παρατηρώντας ότι $\int_a^b p(x)\,dx = f(\frac{a+b}{2})(b-a)$, έχουμε $\big|\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2})(b-a)\big| = \big|\int_a^b (f(x)-p(x))\,dx\big| \leq M_1 \int_a^b |x-\frac{a+b}{2}|\,dx = \frac{(b-a)^2 M_1}{4}$.

Πρόταση 9.2 *Αν η $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $|f'(x)| \leq M_1$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε είναι*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \Big(y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}\Big)\frac{b-a}{n}\,.}$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha| \leq \frac{1}{4}\frac{(b-a)^2 M_1}{n}$.



Σχήμα 9.2: Οι μέθοδοι των ορθογωνίων και των τραπεζίων.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$, βρίσκουμε ότι είναι $\big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - y_{\frac{2k-1}{2}}\frac{b-a}{n}\big| \leq \frac{(b-a)^2 M_1}{4n^2}$. Από την ισότητα $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$ και από την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών βρίσκουμε $\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}\big)\frac{b-a}{n}\big| \leq n\frac{(b-a)^2 M_1}{4n^2} = \frac{(b-a)^2 M_1}{4n}$.

Β. Η μέθοδος των τραπεζίων.

Τώρα, έστω ότι η $y = f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $|f''(x)| \le M_2$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε ισχύει

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a)\Big| \le \frac{(b - a)^3 M_2}{12}\,.$$

Απόδειξη: Προσεγγίζουμε την $y = f(x)$ με πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 1, η οποία ταυτίζεται με την $y = f(x)$ στα άκρα a και b του διαστήματος. Ο τύπος της συνάρτησης αυτής είναι $y = p(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ και η προσέγγιση γίνεται ως εξής. Για κάθε x στο (a, b) προσδιορίζουμε τον αριθμό c από την ισότητα $f(x) - p(x) = c(x - a)(x - b)$. Ορίζουμε την $y = g(t) = f(t) - p(t) - c(t - a)(t - b)$ για κάθε t στο $[a, b]$. Τότε $g(a) = g(x) = g(b) = 0$, οπότε υπάρχει ξ στο (a, x) και η στο (x, b) ώστε $g'(\xi) = g'(\eta) = 0$. Άρα υπάρχει ζ στο (ξ, η) και, επομένως, στο (a, b) ώστε $g''(\zeta) = 0$. Όμως, $g''(t) = f''(t) - 2c$, οπότε $c = \frac{f''(\zeta)}{2}$. Έχουμε, λοιπόν, ότι για κάθε x στο (a, b) υπάρχει ζ στο (a, b) ώστε $f(x) - p(x) = \frac{f''(\zeta)}{2}(x - a)(x - b)$. Άρα για κάθε x στο (a, b) είναι $|f(x) - p(x)| \le \frac{M_2}{2}(x - a)(b - x)$. Αυτή η ανισότητα ισχύει, φυσικά, και για $x = a$ και $x = b$. Παρατηρώντας ότι $\int_a^b p(x)\,dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b - a)$, έχουμε $\big| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b - a)\big| = \big| \int_a^b (f(x) - p(x))\,dx\big| \le \frac{M_2}{2}\int_a^b (x - a)(b - x)\,dx = \frac{(b-a)^3 M_2}{12}$.

Πρόταση 9.3 *Αν η $y = f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $|f''(x)| \le M_2$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \Big(\frac{y_0}{2} + y_1 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\Big)\frac{b - a}{n}\,.}$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\text{σφάλμα}| \le \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3 M_2}{n^2}$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ την προηγούμενη ανισότητα, βρίσκουμε ότι είναι $\big| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{y_{k-1}+y_k}{2}\frac{b-a}{n}\big| \le \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^3}$. Αθροίζοντας τα ολοκληρώματα σε όλα τα υποδιαστήματα και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών, βρίσκουμε $\big| \int_a^b f(x)\,dx - \big(\frac{y_0+y_1}{2} + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\big)\frac{b-a}{n}\big| \le n\frac{(b-a)^3 M_2}{12n^3} = \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}$.

Γ. Η μέθοδος των εφαπτομένων.

Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και $|f''(x)| \le M_2$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε είναι

$$\Big| \int_a^b f(x)\,dx - f\Big(\frac{a + b}{2}\Big)(b - a)\Big| \le \frac{(b - a)^3 M_2}{24}\,.$$

Απόδειξη: Τώρα προσεγγίζουμε την $y = f(x)$ με πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού 1, η οποία ταυτίζεται με την $y = f(x)$ στο σημείο $\frac{a+b}{2}$ και έχει την ίδια παράγωγο με την $y = f(x)$ στο ίδιο σημείο. Η συνάρτηση αυτή έχει τύπο $y = p(x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2})$ και η προσέγγιση γίνεται μέσω του τύπου του Taylor. Πράγματι, για κάθε x στο $[a, b]$ υπάρχει ξ ανάμεσα στους x και $\frac{a+b}{2}$ ώστε $f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - \frac{a+b}{2})^2$ και, επομένως, $|f(x) - p(x)| \le \frac{M_2}{2}(x - \frac{a+b}{2})^2$. Επειδή $\int_a^b p(x)\,dx = f(\frac{a+b}{2})(b - a)$, συνεπάγεται $\big| \int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2})(b - a)\big| = \big| \int_a^b (f(x) - p(x))\,dx\big| \le \frac{M_2}{2}\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2\,dx = \frac{(b-a)^3 M_2}{24}$.

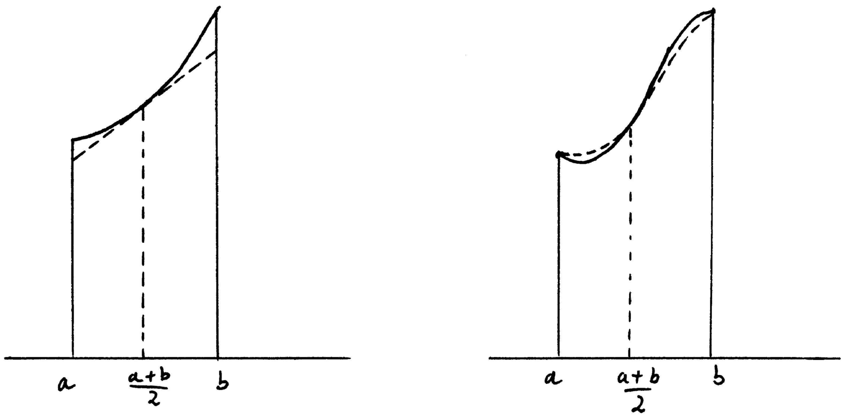
Πρόταση 9.4 *Αν η $y = f(x)$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $|f''(x)| \le M_2$ για κάθε x στο $[a, b]$, τότε*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \Big(y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}\Big)\frac{b-a}{n}\,.}$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\text{σφάλμα}| \le \frac{1}{24}\frac{(b-a)^3 M_2}{n^2}$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε την προηγούμενη ανισότητα σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ και βρίσκουμε ότι $\big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - y_{\frac{2k-1}{2}}\frac{b-a}{n}\big| \le \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^3}$. Τέλος, από την τριγωνική ανισότητα των απόλυτων τιμών βρίσκουμε $\big|\int_a^b f(x)\,dx - \big(y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}\big)\frac{b-a}{n}\big| \le n\frac{(b-a)^3 M_2}{24n^3} = \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}$.

Δ. Η μέθοδος του Simpson.



Σχήμα 9.3: Οι μέθοδοι των εφαπτομένων και του Simpson.

Τώρα, έστω ότι η $y = f(x)$ είναι τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και $|f^{(4)}(x)| \le M_4$ για κάθε x στο $[a, b]$. Τότε είναι

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)\frac{b-a}{6}\Big| \le \frac{(b-a)^5 M_4}{2880}\,.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε την πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού, η οποία ταυτίζεται με την $y = f(x)$ στα σημεία a, $\frac{a+b}{2}$ και b και η παράγωγός της στον $\frac{a+b}{2}$ ταυτίζεται με την παράγωγο της $y = f(x)$ στο ίδιο σημείο. Ο τύπος της είναι $y = p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)(x-\frac{a+b}{2}) + c_3(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)$, όπου οι αριθμοί c_0, c_1, c_2, c_3 υπολογίζονται διαδοχικά από τις ισότητες $c_0 = f(a)$, $c_0 + c_1(\frac{a+b}{2} - a) = f(\frac{a+b}{2})$, $c_0 + c_1(b-a) + c_2(b-a)(b-\frac{a+b}{2}) = f(b)$ και $c_1 + c_2(\frac{a+b}{2} - a) + c_3(\frac{a+b}{2} - a)(\frac{a+b}{2} - b) = f'(\frac{a+b}{2})$. Τώρα προσεγγίζουμε την $y = f(x)$ με την $y = p(x)$ ως εξής. Θεωρούμε τυχόν x στο (a, b) με $x \ne \frac{a+b}{2}$ και ορίζουμε τον αριθμό c μέσω της $f(x) - p(x) = c(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$. Η $y = g(t) = f(t) - p(t) - c(t-a)(t-\frac{a+b}{2})^2(t-b)$

που ορίζεται στο $[a,b]$ ικανοποιεί τις $g(a) = g(\frac{a+b}{2}) = g(x) = g(b) = 0$ και $g'(\frac{a+b}{2}) = 0$. Επομένως, αν $a < x < \frac{a+b}{2}$, υπάρχουν ξ στο (a,x), η στο $(x, \frac{a+b}{2})$ και ζ στο $(\frac{a+b}{2}, b)$ ώστε $g'(\xi) = g'(\eta) = g'(\zeta) = 0$. Αυτά μαζί με την $g'(\frac{a+b}{2}) = 0$ συνεπάγονται ότι υπάρχουν κ στο (ξ,η), λ στο $(\eta, \frac{a+b}{2})$ και μ στο $(\frac{a+b}{2}, \zeta)$ ώστε $g''(\kappa) = g''(\lambda) = g''(\mu) = 0$. Άρα υπάρχουν ν στο (κ,λ) και ρ στο (λ,μ) ώστε $g^{(3)}(\nu) = g^{(3)}(\rho) = 0$ και, τέλος (!), υπάρχει σ στο (ν,ρ) ώστε $g^{(4)}(\sigma) = 0$. Όμως, ένας απλός υπολογισμός δίνει ότι $g^{(4)}(\sigma) = f^{(4)}(\sigma) - 24c$ και, επομένως, $c = \frac{f^{(4)}(\sigma)}{24}$. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και αν $\frac{a+b}{2} < x < b$ και συμπεραίνουμε ότι για κάθε x στο (a,b) με $x \neq \frac{a+b}{2}$ υπάρχει σ στο (a,b) ώστε να είναι $f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\sigma)}{24}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(x-b)$, οπότε $|f(x) - p(x)| \leq \frac{M_4}{24}(x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(b-x)$. Αυτό ισχύει και για $x = a$, $x = \frac{a+b}{2}$ και $x = b$. Με απλές πράξεις βρίσκουμε $\int_a^b p(x)\,dx = \frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}(b-a)$. Επομένως, $\big|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}(b-a)\big| = \big|\int_a^b (f(x)-p(x))\,dx\big| \leq \frac{M_4}{24}\int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})^2(b-x)\,dx = \frac{(b-a)^5 M_4}{2880}$.

Πρόταση 9.5 *Αν η $y = f(x)$ είναι τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$ για κάθε x στο $[a,b]$, τότε*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0 + y_n + 2(y_1 + \cdots + y_{n-1}) + 4\big(y_{\frac{1}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}\big)}{6}\,\frac{b-a}{n}}\,.$$

Για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής ισχύει: $|\text{σφάλμα}| \leq \frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5 M_4}{n^4}$.

Απόδειξη: Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx - \frac{y_{k-1}+4y_{\frac{2k-1}{2}}+y_k}{6}\,\frac{b-a}{n}\Big| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{2880 n^5}$ οπότε, προσθέτοντας και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, βρίσκουμε ότι $\Big|\int_a^b f(x)\,dx - \Big(\frac{y_0+4y_{\frac{1}{2}}+y_1}{6} + \cdots + \frac{y_{n-1}+4y_{\frac{2n-1}{2}}+y_n}{6}\Big)\frac{b-a}{n}\Big| \leq n\frac{(b-a)^5 M_4}{2880 n^5} = \frac{(b-a)^5 M_4}{2880 n^4}$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $y = p(x)$ βαθμού ≤ 3 ισχύει $\int_a^b p(x)\,dx = \big(p(a) + 4p(\frac{a+b}{2}) + p(b)\big)\frac{b-a}{6}$.

2. Προσεγγίστε τον $\log 2$ με ακρίβεια έως και πέμπτου δεκαδικού ψηφίου χρησιμοποιώντας την ισότητα $\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ και τη μέθοδο του Simpson.

3. Προσεγγίστε τον π με ακρίβεια έως και πέμπτου δεκαδικού ψηφίου χρησιμοποιώντας την ισότητα $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx$ και τη μέθοδο του Simpson.

Κεφάλαιο 10

Σειρές.

Σειρές (αριθμών). Σύγκλιση και απόκλιση σειράς, άθροισμα σειράς. Η γεωμετρική σειρά. Σειρές και αλγεβρικές πράξεις. Σύγκριση σειρών. Σειρές με μη αρνητικούς όρους. Ολοκληρωτικό κριτήριο. Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy. p-αδικά αναπτύγματα αριθμών. Κριτήρια εναλλασσόμενων προσήμων, απόλυτης σύγκλισης, λόγου, ρίζας. Δυναμοσειρές, διάστημα σύγκλισης και ακτίνα σύγκλισης δυναμοσειράς. Παραδείγματα δυναμοσειρών. Σειρά Taylor συνάρτησης. Παραδείγματα: η εκθετική σειρά και οι σειρές του συνημιτόνου, του ημιτόνου, της λογαριθμικής συνάρτησης, της τόξο-εφαπτομένης και της δύναμης (επέκταση του δυωνυμικού τύπου του Newton). Κι άλλοι εναλλακτικοί ορισμοί των στοιχειωδών συναρτήσεων: λογαριθμική, εκθετική, δυνάμεις, τριγωνομετρικές.

10.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες.

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία (x_n), σχηματίζουμε τα διαδοχικά αθροίσματα

$$s_1 = x_1\,,\ s_2 = x_1 + x_2\,,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3\,,\ \ldots\ , s_n = x_1 + \cdots + x_n\,,\ \ldots$$

και δημιουργούμε με αυτόν τον τρόπο μια νέα ακολουθία (s_n).

Το σύμβολο

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \text{ή} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots$$

ονομάζεται **σειρά της** (x_n) ή, πιο απλά, **σειρά των** x_n (*θα προτιμάμε τη δεύτερη ονομασία*). Ο x_n ονομάζεται n**-οστός όρος** ή n**-οστός προσθετέος** της σειράς και ο s_n ονομάζεται n**-οστό μερικό άθροισμα** της σειράς των x_n .

Το σύμβολο του δείκτη δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι η ίδια με την $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ και με την $\sum_{j=1}^{+\infty} x_j$.

Παραδείγματα: (1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ ή $1+1+1+\cdots+1+\cdots$. Αυτή δημιουργείται από τη σταθερή ακολουθία (1) και τα μερικά αθροίσματα είναι οι $s_1 = 1$,

$s_2 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$ και, γενικότερα, $s_n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = n$ για κάθε $n \geq 1$.

(2) **Η γεωμετρική σειρά με λόγο** a είναι η $1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a^{n-1}$ ή $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + \cdots$. Αυτή δημιουργείται από τη γεωμετρική πρόοδο (a^n) και έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + a$, $s_3 = 1 + a + a^2$ και, γενικότερα, $s_n = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$.

(3) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ή $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$, όπου ο p είναι οποιοσδήποτε αριθμός. Η σειρά αυτή δημιουργείται από την ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ και έχει μερικά αθροίσματα $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2^p}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}$ και, γενικότερα, $s_n = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p}$ για κάθε $n \geq 1$.

Η ειδική περίπτωση $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ονομάζεται **αρμονική σειρά**.

Αν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει σε κάποιον αριθμό s, τότε λέμε ότι **η σειρά συγκλίνει**, ονομάζουμε τον s **άθροισμα της σειράς** και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s\,.$$

Αν η (s_n) δε συγκλίνει, τότε λέμε ότι **η σειρά αποκλίνει**. Ειδικώτερα, αν η (s_n) αποκλίνει είτε στο $+\infty$ είτε στο $-\infty$, τότε λέμε ότι **η σειρά αποκλίνει στο** $+\infty$ ή **στο** $-\infty$, αντιστοίχως, ονομάζουμε το $+\infty$ ή το $-\infty$ **άθροισμα της σειράς** και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty \qquad \text{ή} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = -\infty\,.$$

Παρατηρήστε ότι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, τότε η σειρά έχει άθροισμα και αυτό είναι αριθμός ή $\pm\infty$, αντιστοίχως. Αν η σειρά αποκλίνει, αλλά δεν αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε η σειρά *δεν έχει άθροισμα*.

Παρατηρήστε, επίσης, ότι το σύμβολο $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει διπλό περιεχόμενο. Αφ' ενός συμβολίζει τη σειρά, ανεξάρτητα από το αν αυτή συγκλίνει ή αποκλίνει. Αφ' ετέρου, στην περίπτωση που η (s_n) συγκλίνει ή αποκλίνει στο $\pm\infty$, συμβολίζει το άθροισμα της σειράς, δηλαδή το όριο της (s_n).

Παραδείγματα: (1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$, διότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Επομένως, το άθροισμα της σειράς είναι

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty.}$$

(2) Για τη γεωμετρική σειρά με λόγο a γνωρίζουμε ήδη το αποτέλεσμα. Το άθροισμα της σειράς είναι

$$\boxed{1+\sum_{n=2}^{+\infty} a^{n-1} \begin{cases} = +\infty, & \text{αν } a \geq 1, \\ = \frac{1}{1-a}\,, & \text{αν } -1 < a < 1, \\ \text{δεν υπάρχει}, & \text{αν } a \leq -1. \end{cases}}$$

Πρόταση 10.1 *Αν η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει, τότε είναι* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Απόδειξη: Σχηματίζουμε τα μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι ο αριθμός s, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$. Παρατηρούμε, όμως, ότι είναι $x_n = s_n - s_{n-1}$ για κάθε $n \geq 2$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = s - s = 0$.

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$ αποκλίνει διότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Λίγο παρακάτω θα δούμε κάποιο παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ (συγκεκριμένα: την αρμονική σειρά) για την οποία ισχύει $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ ενώ η σειρά δε συγκλίνει. Δηλαδή, δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 10.1.

Πρόταση 10.2 ***Άθροισμα σειρών.*** *Αν οι σειρές* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *έχουν άθροισμα και το* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ *έχει άθροισμα και*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.}$$

Απόδειξη: Σχηματίζουμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ των δυο σειρών, οπότε είναι $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Τώρα, το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ είναι το

$$u_n = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = s_n + t_n\,.$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n + \lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + y_n)$ έχει άθροισμα ίσο με $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Πρόταση 10.3 ***Γινόμενο σειράς και αριθμού.*** *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *έχει άθροισμα, ο* λ *είναι αριθμός και το* $\lambda\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *δεν είναι απροσδιόριστη μορφή, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n)$ *έχει άθροισμα και*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n) = \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \qquad \Big(\lambda \neq 0 \text{ αν } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \pm\infty\Big)\,.}$$

Απόδειξη: Αν $s_n = x_1 + \cdots + x_n$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n)$ είναι

$$w_n = \lambda x_1 + \cdots + \lambda x_n = \lambda(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda s_n\,.$$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} w_n = \lim_{n\to+\infty}(\lambda s_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} s_n = \lambda\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n)$ έχει άθροισμα ίσο με $\lambda\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

Μπορούμε να συνδυάσουμε τα δυο τελευταία αποτελέσματα ως εξής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \mu \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.$$

Επίσης, είναι προφανές ότι το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται με την αρχή της επαγωγής και για περισσότερες από δυο σειρές.

Πρόταση 10.4 ***Σύγκριση σειρών, Ι.*** *Αν οι σειρές* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *και* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *έχουν άθροισμα και ισχύει* $x_n \leq y_n$ *για κάθε* $n \geq 1$, *τότε*

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.}$$

Απόδειξη: Σχηματίζουμε τα n-οστά μερικά αθροίσματα $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ και $t_n = y_1 + \cdots + y_n$ των δυο σειρών, οπότε είναι $\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Τώρα, είναι

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \leq y_1 + \cdots + y_n = t_n$$

για κάθε n, οπότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \leq \lim_{n\to+\infty} t_n = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίζοντας τα μερικά αθροίσματα των παρακάτω σειρών βρείτε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{2}\Big),\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n^2\,.$$

2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2n+1}\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n}\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\sin\frac{1}{n}\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

(Υπόδειξη: Υπολογίστε το όριο του n-οστού όρου κάθε σειράς.)

3. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^{n+2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{n-3},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-4},\quad \sum_{n=3}^{+\infty}\Big(-\frac{2}{3}\Big)^n,$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty}(-3)^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+2^{\frac{n}{2}}}{2^n}\,.$$

4. Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται **τηλεσκοπική σειρά**.

   Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς αυτής και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός. Τι σχέση υπάρχει ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$;

   Εξετάστε τις παρακάτω σειρές ως προς τη σύγκλιση και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n}{n+1}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}\big)\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big((-1)^{n-1}\frac{n}{n+1} - (-1)^n\frac{n+1}{n+2}\Big)\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\,.$$

5. Ξαναδείτε τις ασκήσεις B11 και B12 της ενότητας 2.4 στο πλαίσιο, τώρα, των σειρών.

10.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους.

Θεώρημα 10.1 *Αν είναι $x_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ έχει άθροισμα και αυτό είναι είτε $+\infty$ είτε μη αρνητικός αριθμός. Δηλαδή είναι $0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \leq +\infty$.*

Ειδικώτερα: αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη, τότε η σειρά συγκλίνει και, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Απόδειξη: Επειδή είναι $x_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$, συνεπάγεται ότι $s_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} = s_n + x_{n+1} \geq s_n$ για κάθε $n \geq 1$. Άρα η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι είτε $+\infty$ είτε αριθμός. Μάλιστα, επειδή ισχύει $s_n = x_1 + \cdots + x_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$, συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n \geq 0$. Επίσης, αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη, τότε το $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$ είναι αριθμός ενώ, αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Πρέπει να τονιστεί ότι *κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ με μη αρνητικούς όρους έχει άθροισμα* και το άθροισμα αυτό είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$. Επομένως, το ότι μια τέτοια σειρά συγκλίνει *ισοδυναμεί* με το να ισχύει $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$.

Πρόταση 10.5 ***Σύγκριση σειρών, ΙΙ.*** (1) *Έστω $0 \leq x_n \leq y_n$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε είναι*

$$\boxed{0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} y_n \,.}$$

Αν, επιπλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *συγκλίνει, τότε και η* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει.*
(2) *Έστω* $x_n \geq 0$ *και* $y_n > 0$ *για κάθε* $n \geq 1$ *και η ακολουθία* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ *συγκλίνει ή, πιο γενικά, είναι φραγμένη. Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ *συγκλίνει, τότε και η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη: Για την απόδειξη του (1) παρατηρούμε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ έχουν άθροισμα, οπότε από την Πρόταση 10.4 συνεπάγεται ότι $0 \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n < +\infty$, οπότε από την προηγούμενη ανισότητα συνεπάγεται ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.

Τώρα, το (2) είναι εφαρμογή του (1). Από την υπόθεση, υπάρχει κάποιος αριθμός u ώστε να είναι $\frac{x_n}{y_n} \le u$ και, επομένως, $0 \le x_n \le u y_n$ για κάθε $n \ge 1$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (u y_n)$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει.

Παραδείγματα: (1) Για να μελετήσουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ τη συγκρίνουμε με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}}$. Ο λόγος που σκεφτόμαστε αυτήν τη συγκεκριμένη σειρά είναι ότι οι «μεγάλοι» όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ είναι ο 2^n και ο 3^{n-1} , αντιστοίχως.

Είναι $\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n} = \frac{2^n}{3^{n-1}} \frac{1+3\cdot 2^{-n}}{1+3n3^{-n}}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}}{\frac{2^n}{3^{n-1}}} = 1$. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^{n-1}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+3}{3^{n-1}+n}$ συγκλίνει.

(2) Θα αποδείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι για κάθε φυσικό $n \ge 2$ ισχύει

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n \ge 1 \cdot \underbrace{2 \cdots 2}_{n-1} = 2^{n-1}$$

και ότι η ίδια ανισότητα $n! \ge 2^{n-1}$ ισχύει και για $n = 1$ ως ισότητα. Επομένως, ισχύει $0 \le \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ για κάθε $n \ge 1$. Άρα είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 2 < +\infty$ και, επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} < +\infty$.

Είναι αξιοσημείωτο το ότι το άθροισμα της σειράς αυτής είναι ένας πολύ γνωστός μας αριθμός. Είναι:

$$\boxed{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.}$$

Απόδειξη: Έστω $s_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ και $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Τότε, σύμφωνα με τον δυωνυμικό τύπο του Newton,

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$\cdots + \frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big).$$

Επειδή όλες οι παρενθέσεις είναι θετικές και μικρότερες από τον 1, συνεπάγεται $t_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 1 + s_n$ για κάθε $n \geq 1$. Ακόμη, αν $1 \leq k \leq n$, παραλείποντας τους (θετικούς) όρους μετά από τον k-οστό, βρίσκουμε

$$t_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{k!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\dots\Big(1-\frac{k-1}{n}\Big).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} = 1 + s_k$ για κάθε $k \geq 1$ και, με αλλαγή συμβολισμού, $e \geq 1 + s_n$ για κάθε $n \geq 1$.

Άρα είναι $t_n \leq 1 + s_n \leq e$ για κάθε $n \geq 1$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty} s_n = e - 1$. Επειδή ο s_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$, συνεπάγεται ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e - 1$.

Αξίζει να κάνουμε σ' αυτό το σημείο μια μικρή παράκαμψη για να αποδείξουμε κάτι που είχαμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 2 όταν ορίσαμε τον αριθμό e:

Ο e δεν είναι ρητός.

Έστω ότι ο e *είναι* ρητός και συγκεκριμένα $e = \frac{m}{n}$ με φυσικούς m, n. Τότε είναι

$$(n-1)!m = n!e = n!1 + \frac{n!}{1!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots .$$

Παρατηρούμε ότι καθένας από τους αριθμούς $(n-1)!m$, $n!1$, $\frac{n!}{1!}$, ..., $\frac{n!}{n!}$ είναι ακέραιος, οπότε το άθροισμα $s = \frac{n!}{(n+1)!} + \frac{n!}{(n+2)!} + \frac{n!}{(n+3)!} + \cdots$ είναι ακέραιος. Όμως,

$$\begin{aligned} 0 < s &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots \\ &\leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots = \frac{1}{n+1}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} \\ &< 1 \end{aligned}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο διότι δεν υπάρχει ακέραιος ανάμεσα στους 0 και 1.

Θα δούμε, τώρα, στις Προτάσεις 10.6 και 10.7 δυο κριτήρια σύγκλισης για σειρές *με μη αρνητικούς όρους οι οποίοι φθίνουν*.

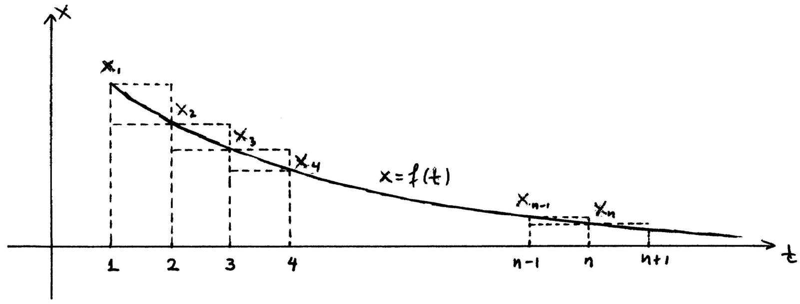
Πρόταση 10.6 ***Ολοκληρωτικό κριτήριο***. *Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και ότι είναι $x_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια συνάρτηση $x = f(t)$ φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$ με την ιδιότητα: $f(n) = x_n$ για κάθε $n \geq 1$. Τότε υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ και η τιμή του είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$ και*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt < +\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = +\infty$ αν και μόνο αν $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$.

Επιπλέον, ισχύει

$$\boxed{\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leq x_1 + \cdots + x_n \leq x_1 + \int_1^n f(t)\,dt}$$

για κάθε φυσικό n καθώς και

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le x_1 + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt.}$$



Σχήμα 10.1: Το ολοκληρωτικό κριτήριο.

Απόδειξη: Παίρνουμε οποιονδήποτε $t \ge 1$ και οποιονδήποτε φυσικό $n \ge t$ (για παράδειγμα, τον $[t]+1$). Επειδή η $x = f(t)$ είναι φθίνουσα, ισχύει $f(t) \ge f(n) = x_n \ge 0$. Αφού, λοιπόν, ισχύει $f(t) \ge 0$ για κάθε $t \ge 1$, συνεπάγεται ότι $\int_1^{u_2} f(t)\,dt - \int_1^{u_1} f(t)\,dt = \int_{u_1}^{u_2} f(t)\,dt \ge 0$ για κάθε u_1 και u_2 με $1 \le u_1 < u_2$. Άρα το αόριστο ολοκλήρωμα $F(u) = \int_1^u f(t)\,dt$ είναι αύξουσα συνάρτηση του u στο $[1,+\infty)$ και, επομένως, υπάρχει το όριο $\lim_{u\to+\infty} F(u) = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u f(t)\,dt$, δηλαδή το $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, και η τιμή του είναι είτε αριθμός είτε $+\infty$.

Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε φυσικό k και για κάθε t στο $[k,k+1]$ ισχύει $f(k+1) \le f(t) \le f(k)$, οπότε $f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le f(k)$ ή, ισοδύναμα, $x_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(t)\,dt \le x_k$. Προσθέτουμε τις αριστερές ανισότητες για $k = 1,\dots,n-1$ και τις δεξιές ανισότητες για $k = 1,\dots,n$ και βρίσκουμε ότι $x_2 + \cdots + x_n \le \int_1^n f(t)\,dt$ και $\int_1^{n+1} f(t)\,dt \le x_1 + \cdots + x_n$, αντιστοίχως. Επομένως, $\int_1^{n+1} f(t)\,dt \le x_1 + \cdots + x_n \le x_1 + \int_1^n f(t)\,dt$.

Παίρνοντας όρια των τριών μελών της ανισότητας αυτής όταν $n \to +\infty$, καταλήγουμε στην $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le x_1 + \int_1^{+\infty} f(t)\,dt$. Τώρα τα (i) και (ii) είναι άμεση συνέπεια της τελευταίας ανισότητας.

Παραδείγματα: (1) Θα μελετήσουμε την *πολύ σημαντική* σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, όπου p είναι οποιοσδήποτε αριθμός.

Η σειρά αυτή είναι σειρά μη αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα το οποίο είναι είτε μη αρνητικός αριθμός είτε $+\infty$.

Αν $p \le 0$, τότε είναι $\frac{1}{n^p} \ge 1$ για κάθε $n \ge 1$ και, επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \ge \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$. Άρα στην περίπτωση αυτή η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Έστω $p > 0$. Τότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα και έχει θετικούς όρους. Θεωρούμε και την $x = f(t) = \frac{1}{t^p}$, η οποία είναι φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και, προφανώς, ισχύει $f(n) = \frac{1}{n^p}$ για κάθε φυσικό n. Γνωρίζουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,dt = +\infty$, αν $0 < p \le 1$, και $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p}\,dt = \frac{1}{p-1} < +\infty$, αν $p > 1$. Επομένως,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\quad\begin{cases}<+\infty\,, & \text{αν } p>1,\\ =+\infty\,, & \text{αν } p\le 1.\end{cases}}$$

Ειδικώτερα, η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει στο $+\infty$ ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Επιπλέον, έχουμε και τις εκτιμήσεις

$$\frac{1}{p-1}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\le 1+\frac{1}{p-1}\qquad(p>1),$$

$$\log(n+1)\le 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\le 1+\log n$$

και

$$\frac{(n+1)^{1-p}-1}{1-p}\le 1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\le 1+\frac{n^{1-p}-1}{1-p}\qquad(0\le p<1).$$

Τώρα βλέπουμε ότι η αρμονική σειρά, όπως και κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ με $0<p\le 1$, είναι παράδειγμα σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ η οποία δε συγκλίνει αλλά για την οποία ισχύει $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$.

Οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ είναι σημαντικές *και* διότι χρησιμεύουν ως «πρότυπα» σύγκρισης για πολλές άλλες σειρές τη σύγκλιση των οποίων θέλουμε να μελετήσουμε.

(2) Συγκρίνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ με την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-1}$ η οποία αποκλίνει. Σκεφτόμαστε την αρμονική σειρά διότι οι «μεγάλοι» όροι στον αριθμητή και στον παρονομαστή του $\frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ είναι ο $2n$ και ο n^2, αντιστοίχως. Επειδή $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-1}}{\frac{2n-1}{n^2+3n+1}}=\frac{1}{2}$, η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^2+3n+1}$ αποκλίνει.

(3) Συγκρίνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-\frac{3}{2}}$ η οποία συγκλίνει. Επειδή $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}}{n^{-\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+3}$ συγκλίνει.

Πρόταση 10.7 ***Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.*** *Έστω ότι η ακολουθία (x_n) είναι φθίνουσα και ότι είναι $x_n\ge 0$ για κάθε $n\ge 1$. Τότε*
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n<+\infty$ *αν και μόνο αν* $\sum_{k=1}^{+\infty}2^k x_{2^k}<+\infty$,
(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n=+\infty$ *αν και μόνο αν* $\sum_{k=1}^{+\infty}2^k x_{2^k}=+\infty$.

Απόδειξη: Είναι σαφές ότι και οι δυο σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ και $\sum_{k=1}^{+\infty}2^k x_{2^k}$ έχουν άθροισμα, αφού είναι σειρές με μη αρνητικούς όρους.

Κάθε φυσικός $n\ge 2$ βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2, έστω $2^k\le n<2^{k+1}$. Χρησιμοποιώντας ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, βλέπουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}x_1+\cdots+x_n &= x_1+(x_2+x_3)+(x_4+x_5+x_6+x_7)+\cdots\\ &\qquad\cdots+(x_{2^{k-1}}+\cdots+x_{2^k-1})+(x_{2^k}+\cdots+x_n)\\ &\le x_1+2x_2+4x_4+\cdots+2^{k-1}x_{2^{k-1}}+2^k x_{2^k}\le x_1+\sum_{k=1}^{+\infty}2^k x_{2^k}\,.\end{aligned}$$

Καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le x_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$.
Επίσης,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \cdots + 2^k x_{2^k} &\le 2x_1 + 2x_2 + 2(x_3 + x_4) + \cdots + 2(x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}) \\ &= 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}) \le 2\sum_{n=1}^{+\infty} x_n . \end{aligned}$$

Καθώς $k \to +\infty$, βρίσκουμε $2x_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k} \le 2\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.
Συμπεραίνουμε ότι

$$x_1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k} \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le x_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k} .$$

Άρα τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k x_{2^k}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ είναι είτε και τα δυο αριθμοί είτε και τα δυο $+\infty$.

Παράδειγμα: Θα ξαναδούμε το παράδειγμα της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Κατ΄ αρχάς η περίπτωση $p \le 0$ είναι απλή: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \ge \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty$, οπότε στην περίπτωση αυτή η σειρά έχει άθροισμα $+\infty$.

Έστω $p > 0$, οπότε η ακολουθία $(\frac{1}{n^p})$ είναι φθίνουσα με μη αρνητικούς όρους. Εξετάζουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$. Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με λόγο $\frac{1}{2^{p-1}}$ και συγκλίνει, αν $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ ή, ισοδύναμα, αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $\frac{1}{2^{p-1}} \ge 1$ ή, ισοδύναμα, αν $0 < p \le 1$.

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει, αν $p > 1$, και αποκλίνει στο $+\infty$, αν $p \le 1$.

Ασκήσεις.

1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές εφαρμόζοντας την Πρόταση 10.5.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n} + 2n + 1}{2n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^4 - n^2 + 4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{1+n^2} - n), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - \cos\frac{1}{n}\Big), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n\Big(1 - \cos\frac{1}{n}\Big).$$

(Υπόδειξη: Να συγκρίνετε με σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Χρησιμοποιήστε τα όρια $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.)

2. Μελετήστε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\Big), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^a\big(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\big),$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^a-n^b} \quad (0<b<a), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^n-b^n} \quad (0<b<a).$$

ως προς τη σύγκλιση, συγκρίνοντάς τις με σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ ή $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n$ για κατάλληλους p. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι a, b βρείτε τις τιμές τους για τις οποίες η αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

3. Είναι πολύ απλό να αποδειχθεί ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ (– δείτε ξανά την άσκηση 4 της προηγούμενης ενότητας).

   Παρατηρώντας είτε ότι $\frac{1}{n^2}\leq\frac{2}{n(n+1)}$ για κάθε n είτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}}=1$ αποδείξτε, μέσω της Πρότασης 10.5, ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

4. Εφαρμόστε το ολοκληρωτικό κριτήριο στις παρακάτω σειρές. Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους. Για όσες σειρές αποκλίνουν στο $+\infty$ βρείτε εκτιμήσεις για τα μερικά αθροίσματά τους.

   Κατόπιν, εφαρμόστε και το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\log n)^2},$$

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\log n\log(\log n)}, \quad \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\log n(\log(\log n))^2}.$$

5. Εξετάστε με το ολοκληρωτικό κριτήριο και με το κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\log n)^p}, \qquad \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\log n\big(\log(\log n)\big)^p}$$

   ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου p.

6. Αποδείξτε ότι $\lim_{p\to 1+}(p-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=1$.

   Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log n}\big(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\big)=1$.

   Αν $0\leq p<1$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty} n^{p-1}\big(1+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\big)=\frac{1}{1-p}$.

7. Αποδείξτε ότι $\log\frac{n+1}{m}\leq\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\leq\frac{1}{m}+\log\frac{n}{m}$.

   Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\big)=\log 2$ και, γενικότερα, για κάθε φυσικό p, ότι $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{pn-1}+\frac{1}{pn}\big)=\log p$.

8. Έστω $p>1$. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}\leq\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\cdots\leq\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$.

   Επίσης, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}n^{p-1}\big(\frac{1}{n^p}+\frac{1}{(n+1)^p}+\cdots\big)=\frac{1}{p-1}$.

9. Έστω $x_n\geq 0$ για κάθε n. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{x_nx_{n+1}}$ συγκλίνει.

   (Υπόδειξη: $ab\leq\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$.)

   Αν, επιπλέον, η (x_n) είναι φθίνουσα, αποδείξτε και το αντίστροφο.

10. Έστω $x_n>0$ για κάθε φυσικό n. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n}$ συγκλίνει.

    (Υπόδειξη: $ab\leq\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$.)

11. Έστω $x_n>0$ για κάθε φυσικό n. Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι και οι $\sum_{n=1}^{+\infty}{x_n}^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{1+x_n}$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{{x_n}^2}{1+{x_n}^2}$ συγκλίνουν.

12. (*) Έστω (x_n) φθίνουσα με μη αρνητικούς όρους. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n<+\infty$, αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}nx_n=0$.

    (Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\frac{n}{2}x_n\leq x_{[\frac{n}{2}]+1}+\cdots+x_n$.)

13. (*) Έστω (x_n) φθίνουσα με μη αρνητικούς όρους, $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$ και $x_n-2x_{n+1}+x_{n+2}\geq 0$ για κάθε $n\geq 1$.

    (1) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n-x_{n+1})=x_1$.

    (2) Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to+\infty}n(x_n-x_{n+1})=0$.

    (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση.)

    (3) Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}n(x_n-2x_{n+1}+x_{n+2})=x_1$.

    (Υπόδειξη: $\sum_{k=1}^{n}k(x_k-2x_{k+1}+x_{k+2})=x_1-(m+1)(x_{m+1}-x_{m+2})-x_{m+2}$.)

10.3 p-αδικά αναπτύγματα.

Α. p-αδικό ανάπτυγμα φυσικού.

Γνωρίζουμε από το δημοτικό σχολείο ότι οι αριθμοί $0,1,\ldots,9$ ονομάζονται *δεκαδικά ψηφία*. Γενικότερα, αν p είναι οποιοσδήποτε φυσικός ≥ 2, οι αριθμοί $0,1,\ldots,p-1$ ονομάζονται **p-αδικά ψηφία**.

Παράδειγμα: Οι αριθμοί $0,1$ είναι τα δυαδικά ψηφία, οι $0,1,2$ είναι τα τριαδικά ψηφία και οι $0,1,\ldots,15$ είναι τα δεκαεξαδικά ψηφία.

Πρόταση 10.8 *Έστω φυσικός $p \geq 2$. Κάθε φυσικός x γράφεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα*

$$\boxed{x = X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + \cdots + X_1 p + X_0}$$

όπου όλοι οι $X_N, \ldots, X_0$ ανήκουν στο $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, δηλαδή είναι p-αδικά ψηφία, και $X_N \neq 0$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον ακέραιο $N = [\log_p x]$. Επειδή $x \geq 1$ και $p > 1$, συνεπάγεται $\log_p x \geq 0$ και, επομένως, $N \geq 0$. Από τον ορισμό του N συνεπάγεται $p^N \leq x < p^{N+1}$, οπότε $1 \leq \frac{x}{p^N} < p$. Τώρα, θεωρούμε τον ακέραιο $X_N = \left[\frac{x}{p^N}\right]$, για τον οποίο, λόγω της τελευταίας ανισότητας, γνωρίζουμε ότι ισχύει $1 \leq X_N \leq p - 1$. Από τον ορισμό του X_N συνεπάγεται

$$X_N p^N \leq x < X_N p^N + p^N ,$$

οπότε $0 \leq \frac{x - X_N p^N}{p^{N-1}} < p$.

Κατόπιν, θεωρούμε τον ακέραιο $X_{N-1} = \left[\frac{x - X_N p^N}{p^{N-1}}\right]$, για τον οποίο, λόγω της τελευταίας ανισότητας, γνωρίζουμε ότι ισχύει $0 \leq X_{N-1} \leq p - 1$. Από τον ορισμό του X_{N-1} συνεπάγεται

$$X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} \leq x < X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + p^{N-1} ,$$

οπότε $0 \leq \frac{x - X_N p^N - X_{N-1} p^{N-1}}{p^{N-2}} < p$.

Κατόπιν, θεωρούμε τον ακέραιο $X_{N-2} = \left[\frac{x - X_N p^N - X_{N-1} p^{N-1}}{p^{N-2}}\right]$, για τον οποίο, λόγω της τελευταίας ανισότητας, γνωρίζουμε ότι ισχύει $0 \leq X_{N-2} \leq p - 1$. Από τον ορισμό του X_{N-2} συνεπάγεται

$$X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} \leq x < X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + p^{N-2} ,$$

οπότε $0 \leq \frac{x - X_N p^N - X_{N-1} p^{N-1} - X_{N-2} p^{N-2}}{p^{N-3}} < p$.

Συνεχίζουμε με αυτόν τον επαγωγικό τρόπο και κάποια στιγμή φτάνουμε στον ακέραιο $X_0 = \left[\frac{x - X_N p^N - \cdots - X_1 p}{p^0}\right]$, για τον οποίο, λόγω της αμέσως προηγούμενης ανισότητας, ισχύει $0 \leq X_0 \leq p - 1$. Από τον ορισμό του X_0 συνεπάγεται

$$X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0 \leq x < X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0 + 1$$

και, επειδή οι αριθμοί $X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0$ και x είναι και οι δυο φυσικοί, συνεπάγεται

$$X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0 = x.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν και αριθμοί $Y_M, \ldots, Y_0$ που ανήκουν στο $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ ώστε να είναι $Y_M \neq 0$ και $x = Y_M p^M + Y_{M-1} p^{M-1} + \cdots + Y_1 p + Y_0$. Αν $N < M$, τότε

$$x = X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0 \leq (p-1) p^N + \cdots + (p-1) p + (p-1) = p^{N+1} - 1$$

και

$$x = Y_M p^M + Y_{M-1} p^{M-1} + \cdots + Y_1 p + Y_0 \geq 1 p^M + 0 p^{M-1} + \cdots + 0 p + 0 = p^M \geq p^{N+1}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $N > M$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $N = M$. Άρα $x = Y_N p^N + Y_{N-1} p^{N-1} + \cdots + Y_1 p + Y_0$ και $Y_N \neq 0$.

Έστω, τώρα, ότι υπάρχει κάποιος n ώστε να είναι $X_n \neq Y_n$ και ας συμβολίσουμε n_0 τον μέγιστο n με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή έστω $X_{n_0} \neq Y_{n_0}$ και $X_n = Y_n$ για κάθε $n = N, \ldots, n_0 + 1$. Έστω, για παράδειγμα, $X_{n_0} < Y_{n_0}$, οπότε $X_{n_0} + 1 \leq Y_{n_0}$. Από την ισότητα

$$X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0 = x = Y_N p^N + \cdots + Y_1 p + Y_0$$

συνεπάγεται η

$$X_{n_0} p^{n_0} + \cdots + X_1 p + X_0 = Y_{n_0} p^{n_0} + \cdots + Y_1 p + Y_0 .$$

Όμως, είναι

$$\begin{aligned} X_{n_0}p^{n_0} + \cdots + X_1p + X_0 \ &\leq \ X_{n_0}p^{n_0} + (p-1)p^{n_0-1} + \cdots + (p-1)p + (p-1) \\ &= \ X_{n_0}p^{n_0} + p^{n_0} - 1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} Y_{n_0}p^{n_0} + \cdots + Y_1p + Y_0 \ &\geq \ Y_{n_0}p^{n_0} + 0p^{n_0-1} + \cdots + 0p + 0 \\ &= \ Y_{n_0}p^{n_0} \\ &\geq \ X_{n_0}p^{n_0} + p^{n_0} \end{aligned}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Παρομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν $X_{n_0} > Y_{n_0}$, οπότε συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $Y_N, \ldots, Y_0$ ταυτίζονται με τους $X_N, \ldots, X_0$, αντιστοίχως.

Οι $X_N, \ldots, X_0$ στην ισότητα $x = X_Np^N + X_{N-1}p^{N-1} + \cdots + X_1p + X_0$ ονομάζονται p-**αδικά ψηφία** του x. Την παράσταση $X_Np^N + X_{N-1}p^{N-1} + \cdots + X_1p + X_0$ την ονομάζουμε p-**αδικό ανάπτυγμα** του x και πολλές φορές την αντικαθιστούμε με το σύμβολο $\overline{X_NX_{N-1}\ldots X_1X_0}^p$, οπότε γράφουμε

$$x = \overline{X_NX_{N-1}\ldots X_1X_0}^p .$$

Παραδείγματα: (1) Προφανώς, είναι $p = 1p + 0$, οπότε το p-αδικό ανάπτυγμα του ίδιου του p είναι η παράσταση $1p + 0 = \overline{10}^p$. Ομοίως, το p-αδικό ανάπτυγμα του p^2 είναι η παράσταση $1p^2 + 0p + 0 = \overline{100}^p$.

(2) Αν ο p είναι ο αριθμός *δέκα*, δηλαδή ο $9 + 1$, τότε χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο $X_NX_{N-1}\ldots X_1X_0$ αντί του $\overline{X_NX_{N-1}\ldots X_1X_0}^p$ για το δεκαδικό ανάπτυγμα του $x = X_Np^N + X_{N-1}p^{N-1} + \cdots + X_1p + X_0$.

Σ' αυτήν την περίπτωση – σύμφωνα και με το προηγούμενο παράδειγμα – το δεκαδικό ανάπτυγμα του ίδιου του αριθμού δέκα είναι η παράσταση 10. Έτσι, λοιπόν, αιτιολογείται η χρήση του γνωστού μας συμβόλου 10 για τον αριθμό δέκα, δηλαδή για τον αριθμό $9 + 1$.

Τώρα, ο αριθμός $10 + 1$ γράφεται $1 \cdot 10 + 1$, οπότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι η παράσταση 11. Ο αριθμός $10 + 2$ γράφεται $1 \cdot 10 + 2$, οπότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι η παράσταση 12. Είναι, επομένως, φανερός ο επαγωγικός τρόπος με τον οποίο καταλήγουμε στα γνωστά μας δεκαδικά αναπτύγματα των φυσικών αριθμών.

(3) Είναι $25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$, οπότε το δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού 25 είναι η παράσταση $\overline{11001}^2$.

(4) Είναι $735 = 2 \cdot 16^2 + 13 \cdot 16 + 15$, οπότε το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του αριθμού 735 είναι η παράσταση $\overline{2\,13\,15}^{16}$ – με τρία ψηφία.

Ας δούμε μια μέθοδο υπολογισμού του p-αδικού αναπτύγματος ενός φυσικού αριθμού x διαφορετική από εκείνην που περιγράφεται στην απόδειξη της Πρότασης 10.8. Η μέθοδος αυτή είναι, ουσιαστικά, μια διαδοχική επανάληψη της *ευκλείδειας διαίρεσης*. Αρχίζουμε με $x = a_1p + X_0$, όπου οι a_1 και X_0 είναι ακέραιοι με $0 \leq X_0 \leq p - 1$. Βλέπουμε εύκολα ότι $0 \leq a_1 < x$. Αν $a_1 = 0$ σταματάμε, ενώ, αν $a_1 > 0$, συνεχίζουμε με $a_1 = a_2p + X_1$, όπου οι a_2 και X_1 είναι ακέραιοι με $0 \leq X_1 \leq p - 1$. Βλέπουμε εύκολα ότι $0 \leq a_2 < a_1$. Αν $a_2 = 0$ σταματάμε, ενώ, αν $a_2 > 0$, συνεχίζουμε με $a_2 = a_3 p + X_2$, όπου οι a_3 και X_2 είναι ακέραιοι με $0 \le X_2 \le p-1$. Βλέπουμε εύκολα ότι $0 \le a_3 < a_2$. Συνεχίζουμε επαγωγικά και παρατηρούμε ότι, επειδή τα διαδοχικά πηλίκα $a_1, a_2, a_3, \ldots$ των διαιρέσεων είναι ακέραιοι που φθίνουν γνησίως, κάποιο από αυτά θα είναι οπωσδήποτε 0 και η διαδικασία θα σταματήσει. Έστω, λοιπόν, $N \ge 0$ ο ακέραιος για τον οποίο είναι $a_{N+1} = 0$, οπότε οι διαδοχικές διαρέσεις είναι

$$\begin{aligned} x &= a_1 p + X_0 \\ a_1 &= a_2 p + X_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{N-1} &= a_N p + X_{N-1} \\ a_N &= 0p + X_N = X_N\,. \end{aligned}$$

Από αυτές τις ισότητες έχουμε

$$\begin{aligned} x &= a_1 p + X_0 \\ &= a_2 p^2 + X_1 p + X_0 \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= a_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0 \\ &= a_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0 \\ &= X_N p^N + X_{N-1} p^{N-1} + X_{N-2} p^{N-2} + \cdots + X_1 p + X_0\,. \end{aligned}$$

Παραδείγματα: (1) Για να βρούμε το δυαδικό ανάπτυγμα του 28 εκτελούμε τις διαδοχικές διαρέσεις: $28 = 14 \cdot 2 + 0$, $14 = 7 \cdot 2 + 0$, $7 = 3 \cdot 2 + 1$, $3 = 1 \cdot 2 + 1$ και $1 = 0 \cdot 2 + 1$. Άρα $28 = \overline{11100}^2$.

(2) Για να βρούμε το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του 32137 εκτελούμε τις διαδοχικές διαρέσεις: $32137 = 2008 \cdot 16 + 9$, $2008 = 125 \cdot 16 + 8$, $125 = 7 \cdot 16 + 13$ και $7 = 0 \cdot 16 + 7$. Άρα $32137 = \overline{7\,13\,8\,9}^{16}$ – με τέσσερα ψηφία.

(3) Για το δεκαπενταδικό ανάπτυγμα του 12 χρειάζεται μόνο μια διαίρεση: $12 = 0 \cdot 15 + 12$. Άρα $12 = \overline{12}^{15}$ – με ένα ψηφίο.

B. p-αδικό ανάπτυγμα αριθμού που ανήκει στο διάστημα $[0,1)$.

Όπως μάθαμε στο δημοτικό σχολείο, με το σύμβολο $0,25$ δηλώνουμε τον αριθμό

$$2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}\,.$$

Ομοίως, με το σύμβολο $0,5403$ δηλώνουμε τον αριθμό

$$5 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} = \frac{5}{10} + \frac{4}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{3}{10000} = \frac{5403}{10000}\,.$$

Τα σύμβολα $0,25$ και $0,5403$ τα γράφουμε και $0,25000\ldots$ και $0,5403000\ldots$, με το ψηφίο 0 να επαναλαμβάνεται συνεχώς από κάποιο σημείο και πέρα. Τα σύμβολα αυτά ονομάζονται *δεκαδικά αναπτύγματα* των αντίστοιχων αριθμών $\frac{1}{4}$ και $\frac{5403}{10000}$.

Γνωρίζουμε, επίσης, ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του αριθμού $\frac{3}{7}$ είναι το σύμβολο $0,42857\ldots$ τα ψηφία του οποίου συνεχίζουν επ΄ άπειρον χωρίς να είναι όλα 0 από κάποιο σημείο και πέρα.

Τώρα τίθεται το εξής ερώτημα: *με ποιες πράξεις πιστοποιείται η σχέση ανάμεσα στον αριθμό* $\frac{3}{7}$ *και στο δεκαδικό ανάπτυγμα* $0,42857\ldots$; Θα μπορούσαμε, κατ΄ αναλογία προς τις δυο προηγούμενες περιπτώσεις, να πούμε ότι το άθροισμα

$$4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-5} + \cdots$$

είναι ίσο με τον αριθμό $\frac{3}{7}$. Το πρόβλημα είναι ότι η τελευταία παράσταση περιέχει *άπειρες* προσθέσεις και ο υπολογισμός του αποτελέσματός της ξεφεύγει από το πλαίσιο χειρισμού στοιχειωδών αλγεβρικών παραστάσεων. Όμως, ακριβώς η έννοια της σειράς, όπως την ορίσαμε, νοηματοδοτεί το άθροισμα άπειρων προσθέσεων και με αυτήν την έννοια μπορούμε να γράψουμε

$$4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-5} + \cdots = \frac{3}{7}\,,$$

εννοώντας ότι το άθροισμα της σειράς $4 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 7 \cdot 10^{-5} + \cdots$ είναι ίσο με τον αριθμό $\frac{3}{7}$ ή, με άλλα λόγια, ότι *η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς συγκλίνει στον* $\frac{3}{7}$.

Η Πρόταση 10.9 περιγράφει πλήρως τη σχέση ανάμεσα στους αριθμούς του διαστήματος $[0,1)$ και στα δεκαδικά αναπτύγματα της μορφής $0,\ldots$. Μάλιστα, η Πρόταση 10.9 διαπραγματεύεται τα γενικότερα p-αδικά αναπτύγματα, όπου ο p είναι οποιοσδήποτε φυσικός ≥ 2 και τα ψηφία είναι οι αριθμοί $0,1,\ldots,p-1$. Ας δούμε, όμως, πρώτα έναν χρήσιμο υπολογισμό βασισμένο σε κάποια συγκεκριμένη γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1} = \frac{p-1}{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = 1$$

και, γενικότερα, για κάθε φυσικό m

$$\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = \frac{p-1}{p^m} \sum_{n=m}^{+\infty} \Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-m} = \frac{p-1}{p^m} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{p}\Big)^{n-1} = \frac{p-1}{p^m} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p^{m-1}}\,.$$

Πρόταση 10.9 *Έστω φυσικός* $p \geq 2$.
(1) *Έστω ακολουθία* p*-αδικών ψηφίων* (x_n) *με τον περιορισμό να μην είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλοι οι* x_n *ίσοι με* $p-1$. *Τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ *συγκλίνει και το άθροισμά της είναι αριθμός στο διάστημα* $[0,1)$.
(2) *Για κάθε αριθμό* x *στο* $[0,1)$ *υπάρχει μοναδική ακολουθία* p*-αδικών ψηφίων* (x_n) *έτσι ώστε να μην είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλοι οι* x_n *ίσοι με* $p-1$ *και ώστε να είναι*

$$\boxed{x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x_1 p^{-1} + x_2 p^{-2} + x_3 p^{-3} + \cdots\ .}$$

Απόδειξη: (1) Η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}$ είναι σειρά μη αρνητικών όρων, οπότε έχει άθροισμα, και, επειδή είναι $0\le x_n\le p-1$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$0\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=1.$$

Άρα η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}$ συγκλίνει και το άθροισμά της είναι κάποιος αριθμός, έστω x, με την ιδιότητα: $0\le x\le 1$. Για να αποδείξουμε ότι $0\le x<1$, σκεφτόμαστε ότι, λόγω υπόθεσης, υπάρχει m ώστε να είναι $x_m\neq p-1$ ή, ισοδύναμα, $x_m\le p-2$. Συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}=\sum_{n=1}^{m-1}\frac{x_n}{p^n}+\frac{x_m}{p^m}+\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}\\ &\le \sum_{n=1}^{m-1}\frac{p-1}{p^n}+\frac{p-2}{p^m}+\sum_{n=m+1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}-\frac{1}{p^m}=1-\frac{1}{p^m}\\ &< 1. \end{aligned}$$

(2) Έστω $0\le x<1$. Ορίζουμε $x_1=[px]$, οπότε $x_1\le px<x_1+1$ και, επομένως,

$$\frac{x_1}{p}\le x<\frac{x_1}{p}+\frac{1}{p}\,.$$

Παρατηρούμε ότι $0\le px<p$, οπότε ο x_1 ανήκει στο $\{0,1,\dots,p-1\}$. Κατόπιν ορίζουμε $s_1=\frac{x_1}{p}$ και $x_2=[p^2(x-s_1)]$. Άρα $x_2\le p^2(x-s_1)<x_2+1$, οπότε

$$\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}\le x<\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}+\frac{1}{p^2}\,.$$

Επειδή $0\le p^2(x-s_1)<p$, ο x_2 ανήκει στο $\{0,1,\dots,p-1\}$. Κατόπιν ορίζουμε $s_2=\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}$ και $x_3=[p^3(x-s_2)]$. Άρα $x_3\le p^3(x-s_2)<x_3+1$, οπότε

$$\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}+\frac{x_3}{p^3}\le x<\frac{x_1}{p}+\frac{x_2}{p^2}+\frac{x_3}{p^3}+\frac{1}{p^3}\,.$$

Επειδή $0\le p^3(x-s_2)<p$, ο x_3 ανήκει στο $\{0,1,\dots,p-1\}$.

Αυτή η επαγωγική διαδικασία δημιουργεί τους x_n , τον ένα μετά τον άλλο, για κάθε n. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι έχουμε βρεί $x_1,\dots,x_n$ από το $\{0,1,\dots,p-1\}$ έτσι ώστε να είναι

$$\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_n}{p^n}\le x<\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_n}{p^n}+\frac{1}{p^n}\,.$$

Τότε ορίζουμε $s_n=\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_n}{p^n}$ και $x_{n+1}=[p^{n+1}(x-s_n)]$. Αυτό σημαίνει ότι $x_{n+1}\le p^{n+1}(x-s_n)<x_{n+1}+1$, οπότε

$$\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_n}{p^n}+\frac{x_{n+1}}{p^{n+1}}\le x<\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_n}{p^n}+\frac{x_{n+1}}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+1}}\,.$$

Επειδή $0\le p^{n+1}(x-s_n)<p$, ο x_{n+1} ανήκει στο $\{0,1,\dots,p-1\}$.

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι υπάρχει ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) έτσι ώστε όλα τα μερικά αθροίσματα $s_n=\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_n}{p^n}$ της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}$ να ικανοποιούν τη διπλή ανισότητα $s_n\le x<s_n+\frac{1}{p^n}$. Συνεπάγεται $x-\frac{1}{p^n}<s_n\le x$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}s_n=x$. Με άλλα λόγια,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}=x.$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι από κάποιον δείκτη και πέρα όλοι οι x_n είναι ίσοι με $p-1$, δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός m ώστε να είναι $x_n=p-1$ για κάθε $n\ge m$. Αν $m=1$, τότε

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p-1}{p^n}=1,$$

το οποίο είναι άτοπο, και, αν $m \geq 2$, τότε

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = s_{m-1} + \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = s_{m-1} + \frac{1}{p^{m-1}}\,,$$

το οποίο είναι, επίσης, άτοπο.

Τέλος, έστω ότι υπάρχει και η ακολουθία p-αδικών ψηφίων (y_n) έτσι ώστε, όπως και για τη (x_n), να μην είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλοι οι y_n ίσοι με $p-1$ και ώστε να είναι

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}\,.$$

Έστω ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) *δεν* ταυτίζονται, οπότε υπάρχει κάποιος n ώστε να είναι $x_n \neq y_n$. Ας συμβολίσουμε n_0 τον *ελάχιστο* n με αυτήν την ιδιότητα, δηλαδή έστω $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ και $x_n = y_n$ για κάθε $n = 1, \ldots, n_0 - 1$. Έστω, για παράδειγμα, ότι $x_{n_0} < y_{n_0}$ ή, ισοδύναμα, ότι $x_{n_0} + 1 \leq y_{n_0}$. Τότε, από την ισότητα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}$$

συνεπάγεται η ισότητα

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}\,.$$

Λόγω υπόθεσης, υπάρχει κάποιος $m \geq n_0 + 1$ ώστε να είναι $x_m \neq p-1$ ή, ισοδύναμα, $x_m \leq p-2$. Συνεπάγεται

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} &= \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{m-1} \frac{x_n}{p^n} + \frac{x_m}{p^m} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} \\
&\leq \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{m-1} \frac{p-1}{p^n} + \frac{p-2}{p^m} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} \\
&= \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} - \frac{1}{p^m} \\
&= \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} + \frac{1}{p^{n_0}} - \frac{1}{p^m}
\end{aligned}$$

και

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n} = \frac{y_{n_0}}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n} \geq \frac{y_{n_0}}{p^{n_0}} \geq \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} + \frac{1}{p^{n_0}}$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε σε άτοπο αν $x_{n_0} > y_{n_0}$, και συμπεραίνουμε ότι οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) ταυτίζονται.

Αν η (x_n) είναι ακολουθία p-αδικών ψηφίων ώστε από κανένα δείκτη και πέρα δεν είναι όλοι οι x_n ίσοι με $p-1$ και ισχύει η ισότητα

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}\,,$$

τότε η (x_n) ονομάζεται **ακολουθία των p-αδικών ψηφίων** του x ή, πιο απλά, οι x_n ονομάζονται **p-αδικά ψηφία** του x. Επίσης, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$

ονομάζεται p-**αδικό ανάπτυγμα** του x και πολλές φορές την αντικαθιστούμε με το σύμβολο $\overline{0, x_1x_2x_3\ldots}^{\,p}$, οπότε γράφουμε

$$x = \overline{0, x_1x_2x_3\ldots}^{\,p}.$$

Στην ειδική περίπτωση $p = 10$ χρησιμοποιούμε παραδοσιακά το απλούστερο σύμβολο $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$ αντί του $x = \overline{0, x_1x_2x_3\ldots}^{\,10}$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η Πρόταση 10.9 λέει ότι

Υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στους αριθμούς του διαστήματος $[0, 1)$ και στα p-αδικά αναπτύγματα $\overline{0, x_1x_2x_3\ldots}^{\,p}$, στα οποία τα p-αδικά ψηφία δεν είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα ίσα με $p-1$.

Αν $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ είναι το p-αδικό ανάπτυγμα του αριθμού x – που, φυσικά, ανήκει στο διάστημα $[0, 1)$ – τότε τα μερικά αθροίσματα

$$s_n = \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{p^2} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$$

της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ ικανοποιούν τις διπλές ανισότητες

$$\boxed{s_n \le x < s_n + \frac{1}{p^n}\ .}$$

Η απόδειξη αυτών των ανισοτήτων είναι μέρος της απόδειξης της Πρότασης 10.9, αλλά αξίζει να την ξαναδούμε με λίγο διαφορετικό τρόπο. Κατ΄ αρχάς, είναι προφανές ότι

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{p^n} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} \ge \sum_{n=1}^{m} \frac{x_n}{p^n} = s_m\,.$$

Κατόπιν, επειδή από κανένα δείκτη και πέρα δεν είναι όλοι οι x_n ίσοι με $p-1$, υπάρχει κάποιος $k \ge m+1$ ώστε να είναι $x_k \le p-2$, οπότε

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = s_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} \\
&= s_m + \sum_{n=m+1}^{k-1} \frac{x_n}{p^n} + \frac{x_k}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} \\
&\le s_m + \sum_{n=m+1}^{k-1} \frac{p-1}{p^n} + \frac{p-2}{p^k} + \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} \\
&= s_m + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} - \frac{1}{p^k} = s_m + \frac{1}{p^m} - \frac{1}{p^k} \\
&< s_m + \frac{1}{p^m}\,.
\end{aligned}$$

Οι ανισότητες $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{p^n}$ γράφονται και $x - \frac{1}{p^n} < s_n \leq x$ και γι αυτό κάθε μερικό άθροισμα s_n ονομάζεται **n-οστή p-αδική προσέγγιση** του x.

Παράδειγμα: Όταν λέμε ότι το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{7}$ είναι το $0,42857\ldots$ καταλαβαίνουμε ότι ο $\frac{3}{7}$ ικανοποιεί τις παρακάτω άπειρες διαδοχικές διπλές ανισότητες.

$$0,4 \leq \frac{3}{7} < 0,5\,, \qquad 0,42 \leq \frac{3}{7} < 0,43\,, \qquad 0,428 \leq \frac{3}{7} < 0,429\,,$$

$$0,4285 \leq \frac{3}{7} < 0,4286\,, \qquad 0,42857 \leq \frac{3}{7} < 0,42858\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Οι αριθμοί $0,4,\ 0,42,\ 0,428,\ 0,4285,\ 0,42857,\ \ldots$ είναι οι *διαδοχικές δεκαδικές προσεγγίσεις* του $\frac{3}{7}$ και οι αριθμοί $4,2,8,5,7,\ \ldots$ είναι τα *δεκαδικά ψηφία* του $\frac{3}{7}$.

Στην απόδειξη της Πρότασης 10.9 περιέχεται μια μέθοδος *πρακτικού* υπολογισμού του p-αδικού αναπτύγματος $\overline{0,x_1x_2x_3\ldots}^{\,p} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{p^n}$ οποιουδήποτε x στο διάστημα $[0,1)$. Υπολογίζουμε τα p-αδικά ψηφία με την εξής επαγωγική διαδικασία. Αρχίζουμε με το ψηφίο $x_1 = [px]$ και, για κάθε n, έχοντας βρεί τα ψηφία x_1, $\ldots$, x_n, υπολογίζουμε το επόμενο ψηφίο με τον τύπο $x_{n+1} = [p^{n+1}(x-s_n)]$, όπου $s_n = \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$. Η διαδικασία αυτή περιγράφεται με το συνοπτικό «σχήμα»

$$x_1 = [px], \qquad x_{n+1} = [p^{n+1}(x - s_n)] \quad (n \geq 1),$$

που αποτελείται από έναν τύπο για το πρώτο ψηφίο και από έναν **αναδρομικό τύπο** που καθορίζει το $(n{+}1)$-οστό ψηφίο συναρτήσει των προηγούμενων ψηφίων.

Παραδείγματα: (1) Θα υπολογίσουμε το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{13}{16}$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \Big[10\cdot\frac{13}{16}\Big] = \Big[\frac{65}{8}\Big] = 8, \quad s_1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}\,,\\
x_2 &= \Big[10^2\Big(\frac{13}{16} - \frac{4}{5}\Big)\Big] = \Big[\frac{5}{4}\Big] = 1, \quad s_2 = s_1 + \frac{1}{10^2} = \frac{81}{100}\,,\\
x_3 &= \Big[10^3\Big(\frac{13}{16} - \frac{81}{100}\Big)\Big] = \Big[\frac{5}{2}\Big] = 2, \quad s_3 = s_2 + \frac{2}{10^3} = \frac{203}{250}\,,\\
x_4 &= \Big[10^4\Big(\frac{13}{16} - \frac{203}{250}\Big)\Big] = [5] = 5, \quad s_4 = s_3 + \frac{5}{10^4} = \frac{13}{16}\,,\\
x_5 &= \Big[10^5\Big(\frac{13}{16} - \frac{13}{16}\Big)\Big] = [0] = 0, \quad s_5 = s_4 + \frac{0}{10^5} = \frac{13}{16}\,,\\
x_6 &= \Big[10^6\Big(\frac{13}{16} - \frac{13}{16}\Big)\Big] = [0] = 0, \quad s_6 = s_5 + \frac{0}{10^6} = \frac{13}{16}
\end{aligned}$$

και ούτω καθ' εξής. Άρα το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{13}{16}$ είναι το $0,8125000\ldots$. Παρατηρήστε ότι η τέταρτη δεκαδική προσέγγιση s_4 προέκυψε ίση με τον ίδιο τον $\frac{13}{16}$ και ότι αυτό είχε ως συνέπεια όλα τα ψηφία $x_5, x_6, \ldots$ να είναι ίσα με 0.

(2) Θα υπολογίσουμε *μερικά* αρχικά δεκαδικά ψηφία του $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \Big[10\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\Big] = 7, \quad s_1 = \frac{7}{10}\,,\\
x_2 &= \Big[10^2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7}{10}\Big)\Big] = 0, \quad s_2 = s_1 + \frac{0}{10^2} = \frac{7}{10}\,,\\
x_3 &= \Big[10^3\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7}{10}\Big)\Big] = 7, \quad s_3 = s_2 + \frac{7}{10^3} = \frac{707}{1000}\,,\\
x_4 &= \Big[10^4\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{707}{1000}\Big)\Big] = 1, \quad s_4 = s_3 + \frac{1}{10^4} = \frac{7071}{10000}\,,\\
x_5 &= \Big[10^5\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7071}{10000}\Big)\Big] = 0, \quad s_5 = s_4 + \frac{0}{10^5} = \frac{7071}{10000}\,,\\
x_6 &= \Big[10^6\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{7071}{10000}\Big)\Big] = 6, \quad s_6 = s_5 + \frac{6}{10^6} = \frac{707106}{1000000}
\end{aligned}
$$

και συνεχίζουμε μέχρι να υπολογίσουμε οποιονδήποτε αριθμό αρχικών δεκαδικών ψηφίων. Το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{1}{\sqrt{2}}$ αρχίζει με $0,707106\,\dots$.

(3) Θα υπολογίσουμε *μερικά* αρχικά δυαδικά ψηφία του $\frac{3}{5}$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \Big[2\cdot\frac{3}{5}\Big] = 1, \quad s_1 = \frac{1}{2}\,,\\
x_2 &= \Big[2^2\Big(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\Big)\Big] = 0, \quad s_2 = s_1 + \frac{0}{2^2} = \frac{1}{2}\,,\\
x_3 &= \Big[2^3\Big(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\Big)\Big] = 0, \quad s_3 = s_2 + \frac{0}{2^3} = \frac{1}{2}\,,\\
x_4 &= \Big[2^4\Big(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\Big)\Big] = 1, \quad s_4 = s_3 + \frac{1}{2^4} = \frac{9}{16}\,,\\
x_5 &= \Big[2^5\Big(\frac{3}{5} - \frac{9}{16}\Big)\Big] = 1, \quad s_5 = s_4 + \frac{1}{2^5} = \frac{19}{32}\,,\\
x_6 &= \Big[2^6\Big(\frac{3}{5} - \frac{19}{32}\Big)\Big] = 0, \quad s_6 = s_5 + \frac{0}{2^6} = \frac{19}{32}
\end{aligned}
$$

και ούτω καθ′ εξής. Το δυαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{5}$ αρχίζει με $0,100110\,\dots$.

Γ. p-αδικό ανάπτυγμα μη αρνητικού αριθμού.

Στην προηγούμενη υποενότητα μελετήσαμε τα p-αδικά αναπτύγματα των αριθμών του διαστήματος $[0,1)$. Αν $x\geq 1$, μπορούμε να γράψουμε $x=[x]+(x-[x])$, όπου ο $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή φυσικός αριθμός, και ο $x-[x]$ ανήκει στο $[0,1)$. Έχουμε τώρα τα p-αδικά αναπτύγματα των δυο αυτών αριθμών: το $\overline{X_N\dots X_0}^p$ για τον $[x]$ και το $\overline{0,x_1x_2\,\dots}^p$ για τον $x-[x]$. Αυτά σημαίνουν ότι $[x]=X_Np^N+\cdots+X_1p+X_0$ και $x-[x]=x_1p^{-1}+x_2p^{-2}+\cdots$, οπότε

$$x = X_Np^N+\cdots+X_1p+X_0+x_1p^{-1}+x_2p^{-2}+\cdots\,.$$

Αυτό το τελευταίο άθροισμα ονομάζεται **p-αδικό ανάπτυγμα** του x και συνήθως το αντικαθιστούμε με το σύμβολο $\overline{X_N \dots X_0, x_1 x_2 \dots}^{\,p}$ και γράφουμε

$$x = \overline{X_N \dots X_0, x_1 x_2 \dots}^{\,p} .$$

Η **n-οστή p-αδική προσέγγιση** του x είναι ο αριθμός

$$s_n = [x] + \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n} = X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0 + \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_n}{p^n}$$

και, προφανώς, ισχύει

$$s_n \le x < s_n + \frac{1}{p^n}$$

για κάθε n.

Μελετώντας τα p-αδικά αναπτύγματα των αριθμών του διαστήματος $[0,1)$, αλλά και, γενικότερα, αριθμών ≥ 0, περιοριστήκαμε σε p-αδικά αναπτύγματα στα οποία τα p-αδικά ψηφία δεν είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα ίσα με $p-1$. Ας υποθέσουμε ότι στην ακολουθία p-αδικών ψηφίων (x_n) είναι από κάποιον δείκτη και πέρα όλοι οι x_n ίσοι με $p-1$, δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός m ώστε να είναι $x_n = p-1$ για κάθε $n \ge m$ και ας συμβολίσουμε n_0 τον ελάχιστο τέτοιο m. Η πιο απλή περίπτωση είναι όταν $n_0 = 1$, δηλαδή όταν είναι $x_n = p-1$ για κάθε n, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ έχει άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = 1.$$

Τότε η παράσταση $\overline{0, p-1\, p-1\, p-1 \dots}^{\,p}$, μπορεί να θεωρηθεί ως εναλλακτικό p-αδικό ανάπτυγμα του αριθμού 1, ο οποίος έχει p-αδικό ανάπτυγμα $\overline{1, 000 \dots}^{\,p}$.

Στην περίπτωση $n_0 \ge 2$ είναι $x_n = p-1$ για κάθε $n \ge n_0$ και $x_{n_0-1} \le p-2$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ έχει άθροισμα

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} \\ &= \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^{n_0-1}} = \sum_{n=1}^{n_0-2} \frac{x_n}{p^n} + \frac{x_{n_0-1}+1}{p^{n_0-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}, \end{aligned}$$

όπου η (y_n) είναι μια νέα ακολουθία p-αδικών ψηφίων που ορίζεται από τις σχέσεις $y_n = x_n$ για κάθε $n = 1, \dots, n_0-2$, $y_{n_0-1} = x_{n_0-1}+1$ και $y_n = 0$ για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως, η παράσταση $\overline{0, x_1 \dots x_{n_0-1}\, p-1\, p-1 \dots}^{\,p}$, μπορεί να θεωρηθεί ως εναλλακτικό p-αδικό ανάπτυγμα του αριθμού x ο οποίος έχει p-αδικό ανάπτυγμα $\overline{0, x_1 \dots x_{n_0-1}+1\, 00 \dots}^{\,p}$ – στο οποίο τα p-αδικά ψηφία δεν είναι από κανένα δείκτη και πέρα όλα ίσα με $p-1$.

Παραδείγματα: (1) Η παράσταση $0,35699999\ldots$ θεωρείται εναλλακτικό δεκαδικό ανάπτυγμα του αριθμού που έχει δεκαδικό ανάπτυγμα $0,35700000\ldots$, δηλαδή του $\frac{357}{1000}$.

(2) Η παράσταση $\overline{0,1010111111\ldots}^{2}$ θεωρείται εναλλακτικό δυαδικό ανάπτυγμα του αριθμού που έχει δυαδικό ανάπτυγμα $\overline{0,1011000000\ldots}^{2}$, δηλαδή του $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}=\frac{11}{16}$.

Δ. Ρητοί αριθμοί και περιοδικά p-αδικά αναπτύγματα.

Ένα p-αδικό ανάπτυγμα $\overline{X_N\ldots X_0,x_1x_2\ldots}^{p}$ χαρακτηρίζεται **περιοδικό** αν υπάρχει κάποιος φυσικός m και κάποιος φυσικός k ώστε να ισχύει $x_{n+k}=x_n$ για κάθε $n\geq m$. Αυτό σημαίνει ότι αμέσως μετά από το τμήμα $x_mx_{m+1}\ \ldots,x_{m+k-1}$ του p-αδικού αναπτύγματος ακολουθεί το ίδιο τμήμα $x_mx_{m+1}\ \ldots,x_{m+k-1}$ και αμέσως μετά από αυτό ακολουθεί το ίδιο τμήμα και ούτω καθ' εξής. Δηλαδή, το p-αδικό ανάπτυγμα έχει τη μορφή

$$\overline{X_N\ldots X_0,\ \ldots\ \underbrace{x_m\ \ldots\ x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ \ldots\ x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ \ldots\ x_{m+k-1}}\ldots}^{p}.$$

Χρησιμοποιούμε και τη συντομογραφία $\overline{X_N\ldots X_0,\ \ldots\ \overline{x_m\ \ldots\ x_{m+k-1}}}^{p}$.

Η Πρόταση 10.10 στην περίπτωση $p=10$, δηλαδή για τα δεκαδικά αναπτύγματα, είναι γνωστή από το δημοτικό σχολείο (χωρίς απόδειξη, φυσικά).

Πρόταση 10.10 *Έστω φυσικός $p\geq 2$ και αριθμός $x\geq 0$. Τότε ο x είναι ρητός αν και μόνο αν το p-αδικό του ανάπτυγμα είναι περιοδικό.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο αριθμός x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα:

$$x=\overline{X_N\ldots X_0,\ \ldots\ \underbrace{x_m\ \ldots\ x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ \ldots\ x_{m+k-1}}\underbrace{x_m\ \ldots\ x_{m+k-1}}\ldots}^{p}.$$

Τότε είναι

$$\begin{aligned}x&=X_Np^N+\cdots+X_0+\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{p^{m-1}}+\Big(\frac{x_m}{p^m}+\cdots+\frac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\Big)\Big(1+\frac{1}{p^k}+\frac{1}{p^{2k}}+\cdots\Big)\\&=X_Np^N+\cdots+X_0+\frac{x_1}{p}+\cdots+\frac{x_{m-1}}{p^{m-1}}+\Big(\frac{x_m}{p^m}+\cdots+\frac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\Big)\frac{1}{1-\frac{1}{p^k}}\\&=\frac{X_Np^{N+m-1}+\cdots+X_0p^{m-1}+x_1p^{m-2}+\cdots+x_{m-1}}{p^{m-1}}+\frac{x_mp^{k-1}+\cdots+x_{m+k-1}}{p^{m-1}(p^k-1)},\end{aligned}$$

οπότε είναι φανερό ότι ο x είναι ρητός.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο $x\geq 0$ είναι ρητός: $x=\frac{a}{b}$ όπου οι $a\geq 0$ και $b\geq 1$ είναι ακέραιοι. Γράφουμε $p={p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r}$, όπου οι $p_1,\ldots,p_r$ είναι οι πρώτοι παράγοντες του p και οι $n_1,\ldots,n_r$ είναι φυσικοί. Ομοίως, γράφουμε $b={p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'$, όπου οι $l_1,\ldots,l_r$ είναι ακέραιοι ≥ 0 (αν κάποιος p_j δεν είναι πρώτος παράγων του b, τότε ο αντίστοιχος l_j είναι 0) και ο b' είναι φυσικός σχετικά πρώτος με τον p – δηλαδή, οι p και b' δεν έχουν κανένα κοινό παράγοντα >1. Θεωρούμε έναν οποιονδήποτε φυσικό m αρκετά μεγάλο ώστε να είναι $(m-1)n_j\geq l_j$ για $j=1,\ldots,r$. Ορίζουμε $m_j=(m-1)n_j-l_j$, οπότε κάθε m_j είναι ακέραιος ≥ 0. Τότε είναι $x=\frac{a}{b}=\frac{a}{{p_1}^{l_1}\cdots{p_r}^{l_r}b'}=\frac{a{p_1}^{m_1}\cdots{p_r}^{m_r}}{({p_1}^{n_1}\cdots{p_r}^{n_r})^{m-1}b'}=\frac{a'}{p^{m-1}b'}$, όπου ο a' είναι ακέραιος ≥ 0. Τώρα, θεωρούμε τους αριθμούς $p,p^2,p^3,\ \ldots$ και τους διαιρούμε με τον b' . Τα πιθανά υπόλοιπα αυτών των διαιρέσεων είναι πεπερασμένα – οι αριθμοί $0,\ldots,b'-1$ – αλλά οι αριθμοί είναι άπειροι, οπότε τουλάχιστον δυο από αυτούς θα δώσουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με τον b'. Δηλαδή, υπάρχουν φυσικοί t και s με $t<s$ ώστε να είναι $p^t=q_tb'+z$

και $p^s = q_s b' + z$, όπου οι q_t και q_s είναι ακέραιοι και ο z είναι ένας από τους $0, \dots, b'-1$. Συνεπάγεται $p^t(p^{s-t}-1) = p^s - p^t = (q_s - q_t)b'$, οπότε ο b' διαιρεί τον $p^t(p^{s-t}-1)$. Επειδή οι b' και p είναι σχετικά πρώτοι, ο b' διαιρεί τον $p^{s-t}-1$, οπότε υπάρχει φυσικός b'' ώστε να είναι $b'b'' = p^{s-t}-1$. Ορίζουμε τον φυσικό $k = s-t$ και έχουμε ότι $b'b'' = p^k - 1$ και, επομένως, $x = \frac{a'b''}{p^{m-1}b'b''} = \frac{a''}{p^{m-1}(p^k-1)}$, όπου ο a'' είναι ακέραιος ≥ 0. Κατόπιν, εκτελούμε τη διαίρεση του a'' με τον p^k-1, οπότε είναι $a'' = w(p^k-1)+u$, όπου ο w είναι ακέραιος ≥ 0 και ο u είναι ένας από τους $0, \dots, p^k-2$. Τέλος, γράφουμε τα p-αδικά αναπτύγματα των w και u στη μορφή $w = X_N p^{N+m-1} + \cdots + X_0 p^{m-1} + x_1 p^{m-2} + \cdots + x_{m-1}$ και $u = x_m p^{k-1} + \cdots + x_{m+k-1}$ και παρατηρούμε ότι οι $x_m, \dots, x_{m+k-1}$ δεν είναι όλοι ίσοι με $p-1$, διότι αλλιώς θα ήταν $u = (p-1)p^{k-1} + \cdots + (p-1)p + (p-1) = p^k - 1$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
x &= \frac{w(p^k-1)+u}{p^{m-1}(p^k-1)} = \frac{w}{p^{m-1}} + \frac{u}{p^{m-1}(p^k-1)} \\
&= \frac{X_N p^{N+m-1} + \cdots + X_0 p^{m-1} + x_1 p^{m-2} + \cdots + x_{m-1}}{p^{m-1}} + \frac{x_m p^{k-1} + \cdots + x_{m+k-1}}{p^{m-1}(p^k-1)} \\
&= X_N p^N + \cdots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \Big(\frac{x_m}{p^m} + \cdots + \frac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\Big)\frac{1}{1-\frac{1}{p^k}} \\
&= X_N p^N + \cdots + X_0 + \frac{x_1}{p} + \cdots + \frac{x_{m-1}}{p^{m-1}} + \Big(\frac{x_m}{p^m} + \cdots + \frac{x_{m+k-1}}{p^{m+k-1}}\Big)\Big(1 + \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{2k}} + \cdots\Big) \\
&= \overline{X_N \dots X_0, \dots \underbrace{x_m \,\dots\, x_{m+k-1}}\underbrace{x_m \,\dots\, x_{m+k-1}}\underbrace{x_m \,\dots\, x_{m+k-1}} \dots}^{\,p},
\end{aligned}$$

δηλαδή ότι ο x έχει περιοδικό p-αδικό ανάπτυγμα.

Παράδειγμα: Θα βρούμε το δεκαδικό ανάπτυγμα του $\frac{3}{14}$.

Γράφουμε $\frac{3}{14} = \frac{3}{2\cdot 7} = \frac{15}{10\cdot 7}$ και ο 7 είναι σχετικά πρώτος με τον 10. Δοκιμάζοντας διαδοχικά τους $10-1$, 10^2-1, 10^3-1, $\dots$ βρίσκουμε ότι ο 7 διαιρεί τον 10^6-1 και μάλιστα είναι $10^6 - 1 = 7 \cdot 142857$. Άρα $\frac{3}{14} = \frac{15\cdot 142857}{10(10^6-1)} = \frac{2142855}{10(10^6-1)}$. Τώρα κάνουμε τη διαίρεση $2142855 = 2(10^6-1) + 142857$ και, επομένως, είναι

$$\begin{aligned}
\frac{3}{14} &= \frac{2}{10} + \frac{142857}{10(10^6-1)} = \frac{2}{10} + \frac{142857}{10^7}\frac{10^6}{10^6-1} \\
&= \frac{2}{10} + \Big(\frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \frac{7}{10^7}\Big)\frac{1}{1-\frac{1}{10^6}} \\
&= \frac{2}{10} + \Big(\frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{8}{10^5} + \frac{5}{10^6} + \frac{7}{10^7}\Big)\Big(1 + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \cdots\Big) \\
&= 0,2\underbrace{142857}\underbrace{142857}\underbrace{142857}\dots = 0,2\overline{142857}.
\end{aligned}$$

Ασκήσεις.

A. p-αδικό ανάπτυγμα φυσικού.

1. Βρείτε το δυαδικό, το τριαδικό, το δεκαεξαδικό και το εκατονταδικό ανάπτυγμα των αριθμών 11 και 87.

2. Έστω φυσικός $p \geq 2$ και ακέραιος $N \geq 0$. Βρείτε το p-αδικό ανάπτυγμα του αριθμού $p^{N+1}-1$.

   (Υπόδειξη: Βρείτε το δεκαδικό ανάπτυγμα του $10^{23}-1$.)

3. Έστω φυσικός $p \geq 2$. Αν όλοι οι $X_N, \dots, X_0$ ανήκουν στο $\{0, 1, \dots, p-1\}$ και $X_N \neq 0$, αποδείξτε ότι $p^N \leq X_N p^N + \cdots + X_1 p + X_0 \leq p^{N+1} - 1 < p^{N+1}$.

4. Έστω φυσικός $p \geq 2$. Έστω ότι ο x είναι φυσικός και ο N είναι μη αρνητικός ακέραιος. Αποδείξτε ότι το πλήθος των ψηφίων στο p-αδικό ανάπτυγμα του x είναι ίσο με $N+1$ αν και μόνο αν $p^N \leq x < p^{N+1}$.

   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.)

5. $^{(*)}$ Έστω η ακολουθία $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ των φυσικών οι οποίοι δεν περιέχουν το ψηφίο 0 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{k_n}$ συγκλίνει σε αριθμό μικρότερο από 90.

   (Υπόδειξη: Βρείτε πόσοι όροι της (k_n) βρίσκονται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 10.)

   Τι θα αλλάξει αν οι παραπάνω αριθμοί είναι εκείνοι που δεν περιέχουν *δυο διαδοχικά* ψηφία 0 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα;

Β. p-αδικό ανάπτυγμα αριθμού στο $[0,1)$.

1. Υπολογίστε το δυαδικό, το τετραδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα των αριθμών $\frac{7}{16}$ και $\frac{31}{32}$.

2. Έστω φυσικός $p \geq 2$ και x, y στο $[0,1)$. Αν για κάποιον n οι n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις των x, y είναι ίδιες, αποδείξτε ότι $|x - y| < \frac{1}{p^n}$.

3. Έστω φυσικός $p \geq 2$ και x στο $[0,1)$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του x, ποια είναι τα p-αδικά αναπτύγματα των $x - s_n$ και $p^n(x - s_n)$;

4. Έστω φυσικός $p \geq 2$ και x, y στο $[0,1)$. Αποδείξτε ότι το σφάλμα στον υπολογισμό του αθροίσματος $x + y$ με την αντικατάσταση των x, y από τις n-οστές p-αδικές προσεγγίσεις τους είναι μικρότερο από $\frac{2}{p^n}$.

   Αποδείξτε ότι το αντίστοιχο σφάλμα στον υπολογισμό του γινομένου xy είναι μικρότερο από $\frac{2}{p^n} - \frac{1}{p^{2n}}$.

5. Έστω φυσικός $p \geq 2$ και οποιοδήποτε συγκεκριμένο p-αδικό ψηφίο k. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αριθμών του διαστήματος $[0,1)$ των οποίων το n-οστό p-αδικό ψηφίο είναι ίσο με k είναι η ένωση p^{n-1} διαστημάτων τύπου $[a, b)$. Ποια ακριβώς είναι αυτά τα διαστήματα και τι μήκος έχει καθένα από αυτά; Ποιο είναι το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων;

   (Υπόδειξη: Μελετήστε διαδοχικά τις περιπτώσεις $n = 1, 2, 3, \dots$ και κατόπιν δώστε τη γενική απάντηση.)

6. Έστω φυσικός $p \geq 2$ και x στο $[0,1)$. Αποδείξτε ότι ο x μπορεί να έχει δυο διαφορετικά p-αδικά αναπτύγματα μόνο στην περίπτωση που στο ένα από αυτά είναι όλα τα ψηφία ίσα με 0 από κάποιον δείκτη και πέρα και στο άλλο είναι όλα τα ψηφία ίσα με $p-1$ από κάποιον δείκτη και πέρα. Ποια σχέση υπάρχει ανάμεσα σ᾽ αυτούς τους δυο δείκτες;

(Υπόδειξη: Έστω ότι $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{p^n}$ και $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{p^n}$ και έστω ότι ο n_0 είναι ο μικρότερος δείκτης n για τον οποίο ισχύει $x_n \neq y_n$. Δηλαδή είναι $x_n = y_n$ για κάθε $n < n_0$ και έστω $x_{n_0} < y_{n_0}$, οπότε $x_{n_0} + 1 \leq y_{n_0}$. Αποδείξτε ότι $x \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \frac{x_{n_0}}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{p-1}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^{n_0}}$ και $x \geq \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{p^n} + \frac{x_{n_0}+1}{p^{n_0}} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{0}{p^n} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{x_n}{p^n} + \frac{1}{p^{n_0}}$. Από τις δυο αυτές ανισότητες αποδείξτε ότι $y_{n_0} = x_{n_0} + 1$ και ότι $x_n = p - 1$ και $y_n = 0$ για κάθε $n > n_0$.)

Αποδείξτε ότι ο x στο διάστημα $[0, 1)$ έχει δυο διαφορετικά p-αδικά αναπτύγματα αν και μόνο αν είναι $x = \frac{m}{p^n}$, για κάποιον φυσικό n και κάποιον φυσικό $m < p^n$.

Γ. p-αδικό ανάπτυγμα μη αρνητικού αριθμού.

1. Βρείτε την έκτη δεκαδική και την έκτη δυαδική προσέγγιση του $\sqrt{2}$.

2. Έστω φυσικός $p \geq 2$. Αν s_n είναι η n-οστή p-αδική προσέγγιση του $x \geq 0$ και ορίσουμε $t_n = s_n + \frac{1}{p^n}$, αποδείξτε ότι η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία, ότι η (t_n) είναι φθίνουσα ακολουθία και ότι και οι δυο ακολουθίες συγκλίνουν στον x.

Δ. Ρητοί αριθμοί και περιοδικά p-αδικά αναπτύγματα.

1. Υπολογίστε τους ρητούς $32,34\underbrace{239}\underbrace{239}\underbrace{239}\ldots$, $\overline{2,0\underbrace{1201}\underbrace{1201}\underbrace{1201}\ldots}^{3}$ και $\overline{1001,\underbrace{101}\underbrace{101}\underbrace{101}\ldots}^{2}$.

2. Υπολογίστε το δυαδικό, το τριαδικό και το δεκαεξαδικό ανάπτυγμα του $\frac{313}{150}$.

10.4 Κριτήρια σύγκλισης σειρών.

Πρόταση 10.11 ***Κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.*** *Αν η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Γράφουμε $s_n = b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{n-1}b_n$ και θεωρούμε την ακολουθία $s_2, s_4, s_6, \ldots$ με τους άρτιους δείκτες. Παρατηρούμε ότι $s_{2k+2} = s_{2k} + b_{2k+1} - b_{2k+2} \geq s_{2k}$, οπότε η ακολουθία αυτή είναι αύξουσα. Επίσης, $s_{2k} = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + b_{2k-1} - b_{2k} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \cdots - (b_{2k-2} - b_{2k-1}) - b_{2k} \leq b_1$ διότι κάθε παρένθεση είναι μη αρνητική. Άρα η ακολουθία $s_2, s_4, s_6, \ldots$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό s': $\lim_{k\to+\infty} s_{2k} = s'$. Κατόπιν θεωρούμε την ακολουθία $s_1, s_3, s_5, \ldots$ με τους περιττούς δείκτες. Είναι $s_{2k+1} = s_{2k-1} - b_{2k} + b_{2k+1} \leq s_{2k-1}$, οπότε η ακολουθία αυτή είναι φθίνουσα. Επίσης, $s_{2k-1} = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots - b_{2k-2} + b_{2k-1} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{2k-3} - b_{2k-2}) + b_{2k-1} \geq 0$ διότι κάθε παρένθεση είναι μη αρνητική. Άρα η $s_1, s_3, s_5, \ldots$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό s'': $\lim_{k\to+\infty} s_{2k-1} = s''$. Όμως, έχουμε $s_{2k-1} = s_{2k} + b_{2k} \geq s_{2k}$ και, παίρνοντας όρια καθώς $k \to +\infty$, βρίσκουμε ότι $s'' \geq s'$.

Έχουμε, λοιπόν, την εξής διάταξη:

$$s_2 \leq s_4 \leq \ldots \leq s_{2k} \leq \ldots \leq s' \leq s'' \leq \ldots \leq s_{2k-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1 .$$

Συνεπάγεται ότι $0 \le s'' - s' \le s_{2k-1} - s_{2k} = b_{2k} \le b_{2k-1}$ για κάθε $k \ge 1$ και, επομένως, $0 \le s'' - s' \le b_n$ για κάθε $n \ge 1$. Παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι $s'' - s' = 0$, δηλαδή $s' = s''$.

Ορίζουμε $s = s' = s''$, οπότε είναι

$$s_2 \le s_4 \le \ldots \le s_{2k} \le \ldots \le s \le \ldots \le s_{2k-1} \le \ldots \le s_3 \le s_1 .$$

Συνεπάγεται ότι $0 \le s - s_{2k} \le s_{2k-1} - s_{2k} = b_{2k}$ και $0 \le s_{2k-1} - s \le s_{2k-1} - s_{2k-2} = b_{2k-1}$ για κάθε $k \ge 1$. Επομένως, είναι $|s_n - s| \le b_n$ για κάθε $n \ge 1$ και συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} |s_n - s| = 0$ ή, ισοδύναμα, $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ συγκλίνει και έχει άθροισμα ίσο με s.

Παράδειγμα: Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ συγκλίνει. Το ίδιο ισχύει και για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$.

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει απολύτως** αν η σειρά (με μη αρνητικούς όρους) $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει ή, ισοδύναμα, αν $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.

Θεώρημα 10.2 ***Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης***. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε αυτή συγκλίνει και είναι*

$$\boxed{\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|.}$$

Απόδειξη: Είναι $0 \le x_n + |x_n| \le 2|x_n|$ για κάθε n, οπότε, επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} 2|x_n|$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + |x_n|)$ συγκλίνει. Επομένως, και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και, μάλιστα, είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(x_n + |x_n|) - \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$.

Τώρα, επειδή είναι $-|x_n| \le x_n \le |x_n|$ για κάθε $n \ge 1$, συνεπάγεται ότι $-\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{+\infty}(-|x_n|) \le \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \le \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ και, επομένως, $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$.

Αν δούμε την ανισότητα $\big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\big| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ ως γενίκευση των $|x_1+x_2| \le |x_1| + |x_2|$, $|x_1 + x_2 + x_3| \le |x_1| + |x_2| + |x_3|$ κλπ, τότε δικαιολογείται ο όρος **τριγωνική ανισότητα** για την ανισότητα αυτή.

Παραδείγματα: (1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ συγκλίνει διότι συγκλίνει απολύτως: η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ δείχνει ότι υπάρχουν σειρές που συγκλίνουν και δε συγκλίνουν απολύτως. Πράγματι, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ είναι η αρμονική σειρά και έχει άθροισμα $+\infty$.

Με αφορμή το τελευταίο παράδειγμα, λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ **συγκλίνει υπό συνθήκη** αν συγκλίνει αλλά δε συγκλίνει απολύτως.

Πρόταση 10.12 ***Σύγκριση σειρών, ΙΙΙ***. (1) *Αν είναι $|x_n| \le y_n$ για κάθε $n \ge 1$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει. Επίσης,*

$$\boxed{\Big|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n\,.}$$

(2) Έστω $y_n > 0$ για κάθε n και η ακολουθία $\left(\frac{|x_n|}{y_n}\right)$ συγκλίνει ή, πιο γενικά, είναι φραγμένη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.

Απόδειξη: (1) Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$ συγκλίνει, οπότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει και, επίσης, $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$.
(2) Άμεση συνέπεια της Πρότασης 10.5 και του Θεωρήματος 10.2.

Παράδειγμα: Συγκρίνουμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ με τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{2}{3})^n$ η οποία συγκλίνει. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\frac{(-2)^n}{3^n+2^n}|}{(\frac{2}{3})^n} = 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}$ συγκλίνει και, μάλιστα, απολύτως.

Πρόταση 10.13 ***Κριτήριο λόγου του d' Alembert.*** *Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$.*
(i) Αν $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη: (*i*) Έστω $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$. Επιλέγουμε a ώστε να είναι $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < a < 1$. Συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να είναι $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq a$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα είναι $|x_{n_0+1}| \leq a|x_{n_0}|$, $|x_{n_0+2}| \leq a|x_{n_0+1}| \leq a^2|x_{n_0}|$, $|x_{n_0+3}| \leq a|x_{n_0+2}| \leq a^3|x_{n_0}|$ και, με την αρχή της επαγωγής, $|x_n| \leq a^{n-n_0}|x_{n_0}|$ για κάθε $n \geq n_0$. Αν συμβολίσουμε $c = a^{-n_0+1}|x_{n_0}|$, τότε είναι $|x_n| \leq ca^{n-1}$ για κάθε $n \geq n_0$. Τώρα ορίζουμε $C = \max\left\{c, |x_1|, \frac{|x_2|}{a}, \ldots, \frac{|x_{n_0-1}|}{a^{n_0-2}}\right\}$ και βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει $|x_n| \leq Ca^{n-1}$ για κάθε $n \geq 1$. Επομένως, $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| \leq C\sum_{n=1}^{+\infty} a^{n-1} < +\infty$ διότι $0 < a < 1$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < +\infty$.
(*ii*) Έστω $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$. Άρα υπάρχει n_0 ώστε να είναι $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, $|x_{n_0+1}| \geq |x_{n_0}|$, $|x_{n_0+2}| \geq |x_{n_0+1}| \geq |x_{n_0}|$ και, γενικότερα, $|x_n| \geq |x_{n_0}| > 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό, όμως, αποκλείει το να ισχύει $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα: (1) Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγκλίνει, διότι είναι $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$.

(2) Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$ αποκλίνει: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e > 1$.

Παρατηρήστε ότι στην Πρόταση 10.13 δεν αναφέρεται καθόλου η περίπτωση $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = 1$. Θα δούμε αμέσως δυο παραδείγματα που εμπίπτουν σ' αυτή την περίπτωση και στο ένα παράδειγμα η σειρά συγκλίνει ενώ στο άλλο η σειρά αποκλίνει.

Παραδείγματα: (1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = 1$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=1$.

Πρόταση 10.14 ***Κριτήριο ρίζας του Cauchy.*** *Υποθέτουμε ότι υπάρχει το* $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}$.
(i) Αν $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}<1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ *συγκλίνει απολύτως και, επομένως, συγκλίνει.*
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}>1$, *τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη: (i) Αν $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}<1$, επιλέγουμε a ώστε να είναι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}<a<1$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να είναι $\sqrt[n]{|x_n|}\le a$ για κάθε $n\ge n_0$, οπότε $|x_n|\le a^n$ για κάθε $n\ge n_0$. Αν ορίσουμε $C=\max\{a,|x_1|,\frac{|x_2|}{a},\dots,\frac{|x_{n_0-1}|}{a^{n_0-2}}\}$, τότε ισχύει $|x_n|\le Ca^{n-1}$ για κάθε $n\ge1$. Άρα είναι $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|\le C\sum_{n=1}^{+\infty}a^{n-1}<+\infty$ διότι $0<a<1$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|<+\infty$.
(ii) Αν $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}>1$, τότε υπάρχει n_0 ώστε να είναι $\sqrt[n]{|x_n|}\ge1$ για κάθε $n\ge n_0$. Άρα είναι $|x_n|\ge1$ για κάθε $n\ge n_0$, οπότε δεν ισχύει $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$ και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n$ αποκλίνει.

Παραδείγματα: (1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{2^n}$ συγκλίνει διότι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{n^3}{2^n}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^3}{2}=\frac{1}{2}<1$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n}$ αποκλίνει: $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{(-2)^n}{n}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{n}}=2>1$.

Παρατηρήστε ότι, όπως και στο κριτήριο λόγου, στο κριτήριο ρίζας δεν αναφέρεται καθόλου η περίπτωση $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=1$. Θα δούμε δυο παραδείγματα που εμπίπτουν σ' αυτή την περίπτωση και που στο ένα η σειρά συγκλίνει ενώ στο άλλο η σειρά αποκλίνει.

Παραδείγματα: (1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|}=1$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει και $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|}=1$.

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}n^3e^n\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{3^n}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n!}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^n}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^nn!}{n^n}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^nn!}{n^n}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\cdots(4n-3)}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^nn!}{n^n}\,,\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\,.$$

2. Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n+1}{2n-1}\Big)^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{3n-1}{2n+1}\Big)^{2n-1}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{e^n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n^3 2^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n^n}\,,$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\log n)^n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\sqrt[n]{n}-1\big)^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\big(\sqrt[n]{n}+1\big)^n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n3^n}{\big(\sqrt[n]{n}+1\big)^n}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{\big(\sqrt[n]{n}+1\big)^n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}e^n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}\,.$$

3. Για ποιους αριθμούς p η $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ συγκλίνει; συγκλίνει απολύτως;

4. Για ποιους αριθμούς p, q η $\sum_{n=1}^{+\infty}p^n n^q$ συγκλίνει; συγκλίνει απολύτως;

5. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Σε περιπτώσεις που η σειρά δε συγκλίνει απολύτως μπορεί να φανεί χρήσιμο το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{12}{11}}}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{11}{12}}}\,,\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}\,,\quad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(\log n)^2}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{n+1}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+(-1)^{n-1}}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big(\sin\frac{1}{n}\Big)^{\frac{3}{2}}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\tan\frac{1}{n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big(1-\cos\frac{1}{n}\Big)\,.$$

6. Έστω οποιοσδήποτε αριθμός x και $\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n|<+\infty$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\cos(nx)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}x_n\sin(nx)$ συγκλίνουν.

7. $^{(*)}$ Βρείτε τις τιμές του $x\neq -1$ για τις οποίες η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}$ συγκλίνει.

   (Υπόδειξη: Δείτε για ποιους $x\neq -1$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n}=0$ και να συγκρίνετε τη σειρά με κατάλληλη γεωμετρική σειρά.)

8. Αποδείξτε ότι $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}\leq(\frac{2}{3})^n$ για κάθε n και, επομένως, ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-1)}$ συγκλίνει απολύτως.

9. $^{(*)}$ (i) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{2x}\,dx = \log\sqrt{n+1}$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1+x \leq e^x$, αποδείξτε ότι $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq e^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{2n}} \leq e^{-\log\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

   Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ συγκλίνει.

   (ii) Αποδείξτε ότι $1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \leq 1+\int_1^n \frac{1}{2x-1}\,dx = 1+\log\sqrt{2n-1}$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $1+x \leq e^x$, αποδείξτε ότι $2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1} \leq e^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}} \leq e^{1+\log\sqrt{2n-1}} = e\sqrt{2n-1}$.

   Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ δε συγκλίνει απολύτως.

10. Έστω (b_n) φθίνουσα, $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, $s = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$ και $s_n = b_1 - b_2 + \cdots + (-1)^{n-1}b_n$. Αποδείξτε ότι $0 \leq (-1)^n(s-s_n) \leq b_{n+1}$ για κάθε n.

10.5 Δυναμοσειρές.

Κάθε σειρά της μορφής

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n = a_0 + a_1(x-\xi) + a_2(x-\xi)^2 + \cdots + a_n(x-\xi)^n + \cdots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** με **κέντρο** ξ και **συντελεστές** $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Ο x παίζει τον ρόλο *μεταβλητής*. Στην πραγματικότητα, μια δυναμοσειρά είναι *άπειρες* σειρές: σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μια σειρά και, φυσικά, σε διαφορετικές τιμές του x αντιστοιχούν (εν γένει) διαφορετικές σειρές. Οι τιμές του x χωρίζονται σε κατηγορίες: για κάποιες τιμές του x η δυναμοσειρά συγκλίνει, για κάποιες άλλες αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ και για τις υπόλοιπες τιμές του x η δυναμοσειρά αποκλίνει αλλά όχι στα $\pm\infty$.

Μελέτη μιας δυναμοσειράς σημαίνει κατ΄ αρχάς να βρεθούν εκείνες οι τιμές του x για τις οποίες η δυναμοσειρά συγκλίνει και κατόπιν να βρεθεί συνοπτικός τύπος για το άθροισμά της – το οποίο, φυσικά, εξαρτάται από τον x. Θα δούμε ότι για το πρώτο ζήτημα υπάρχει μια σχετικά γενική απάντηση ενώ για το δεύτερο υπάρχει απάντηση μόνο κατά περίπτωση.

Παραδείγματα: (1) Η δυναμοσειρά $0+\sum_{n=1}^{+\infty} 0(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 0 ονομάζεται **μηδενική δυναμοσειρά** και, προφανώς, συγκλίνει για κάθε x και έχει άθροισμα ίσο με 0.

(2) Η **γεωμετρική δυναμοσειρά** $1+\sum_{n=1}^{+\infty} 1(x-\xi)^n$ με όλους τους συντελεστές ίσους με 1 έχει ήδη μελετηθεί στη μορφή $1+\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$, δηλαδή με $a = x-\xi$. Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει μόνο όταν $-1 < x-\xi < 1$ ή, ισοδύναμα, $\xi-1 < x < \xi+1$ και το άθροισμά της είναι τότε ίσο με $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-(x-\xi)}$. Δηλαδή,

$$\boxed{1+\sum_{n=1}^{+\infty}(x-\xi)^n = \frac{1}{1-(x-\xi)} \qquad (\xi-1 < x < \xi+1).}$$

Το σύνολο των τιμών του x για τις οποίες μια δυναμοσειρά συγκλίνει ονομάζεται **σύνολο σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Η επόμενη πρόταση περιγράφει το γενικό αποτέλεσμα για τη μορφή του συνόλου σύγκλισης οποιασδήποτε δυναμοσειράς.

Πρόταση 10.15 *Για κάθε δυναμοσειρά $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ υπάρχουν ακριβώς τρεις περιπτώσεις σχετικά με το σύνολο σύγκλισής της. Αυτές είναι:*
(i) το σύνολο σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$,
(ii) το σύνολο σύγκλισης είναι το μονοσύνολο $\{\xi\}$,
(iii) υπάρχει κάποιος αριθμός $R > 0$ ώστε το σύνολο σύγκλισης να είναι το διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ ή το $(\xi - R, \xi + R]$ ή το $[\xi - R, \xi + R)$ ή το $[\xi - R, \xi + R]$.
Ακόμη, η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$ στην περίπτωση (i), για κάθε x στο $\{\xi\}$ (δηλαδή για $x = \xi$) στην περίπτωση (ii) και για κάθε x στο $(\xi - R, \xi + R)$ στην περίπτωση (iii).

Σε κάθε περίπτωση το σύνολο σύγκλισης μιας δυναμοσειράς περιέχει το κέντρο της. Αυτό είναι, έτσι κι αλλιώς, προφανές. Πράγματι, για $x = \xi$ η $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ γίνεται $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 0^n = a_0$ και, επομένως, συγκλίνει.

Οι περιπτώσεις (i) και (ii) της Πρότασης 10.15 μπορούν να διατυπωθούν στη μορφή της περίπτωσης (iii). Στην πρώτη περίπτωση το σύνολο σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty) = (\xi - (+\infty), \xi + (+\infty))$ και μπορούμε να το θεωρήσουμε ως διάστημα $(\xi - R, \xi + R)$ με $R = +\infty$. Στη δεύτερη περίπτωση το σύνολο σύγκλισης είναι το $\{\xi\}$ το οποίο γράφεται $[\xi - R, \xi + R]$ με $R = 0$. Άρα το σύνολο σύγκλισης κάθε δυναμοσειράς είναι διάστημα συμμετρικό ως προς το κέντρο της και ονομάζεται και **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς. Ο αντίστοιχος R ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς και σε κάθε περίπτωση ισχύει $0 \leq R \leq +\infty$.

Παραδείγματα: (1) Είδαμε ότι η μηδενική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x, οπότε το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι ο $R = +\infty$.

(2) Είδαμε ότι η γεωμετρική δυναμοσειρά $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (x-\xi)^n$ συγκλίνει για κάθε x στο $(\xi - 1, \xi + 1)$ και αποκλίνει για κάθε άλλη τιμή του x. Άρα έχει διάστημα σύγκλισης το $(\xi - 1, \xi + 1)$ και ακτίνα σύγκλισης τον $R = 1$.

(3) Έστω η δυναμοσειρά $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^n(x-\xi)^n$. Ας υποθέσουμε ότι η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για $x = x_1$. Τότε είναι $\lim_{n\to+\infty} n^n(x_1-\xi)^n = 0$, οπότε υπάρχει κάποιος M ώστε να είναι $n^n|x_1-\xi|^n \leq M$ για κάθε n. Συνεπάγεται $|x_1 - \xi| \leq \frac{\sqrt[n]{M}}{n}$ για κάθε n και, παίρνοντας όριο καθώς $n \to +\infty$, συμπεραίνουμε ότι $|x_1 - \xi| \leq 0$ και, επομένως, $x_1 = \xi$. Άρα το σύνολο σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς είναι το $\{\xi\}$ και η ακτίνα σύγκλισής της είναι ο $R = 0$.

Για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης δυναμοσειράς υπάρχει συγκεκριμένος γενικός τύπος, τον οποίο δε θα δούμε σ' αυτές τις σημειώσεις. Θα γνωρίσουμε, όμως, δυο τύπους για την ακτίνα σύγκλισης οι οποίοι ισχύουν για τις περισσότερες δυναμοσειρές που εμφανίζονται στην πράξη.

Πρόταση 10.16 *Έστω ότι υπάρχει το $\mu = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Τότε η ακτίνα* *σύγκλισης της δυναμοσειράς $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$, όπου ο $\frac{1}{\mu}$ ορίζεται ως 0, αν $\mu = +\infty$, και ως $+\infty$, αν $\mu = 0$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου στη δυναμοσειρά, διακρίνοντας τρεις περιπτώσεις. Αν $0 < \mu < +\infty$, έχουμε $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-\xi|\mu$ και, επομένως: αν $|x-\xi| < \frac{1}{\mu}$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ, αν $|x-\xi| > \frac{1}{\mu}$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$. Αν $\mu = 0$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi|\cdot 0 = 0 < 1$ και, επομένως, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x ή, με άλλα λόγια, η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty = \frac{1}{\mu}$. Τέλος, αν $\mu = +\infty$, τότε για κάθε $x \neq \xi$ έχουμε $|x-\xi| > 0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-\xi)^{n+1}}{a_n(x-\xi)^n}\right| = |x-\xi|(+\infty) = +\infty > 1$. Άρα για κάθε $x \neq \xi$ η δυναμοσειρά αποκλίνει, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με $0 = \frac{1}{\mu}$.

Πρόταση 10.17 *Έστω ότι υπάρχει το $\mu = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$, όπου ο $\frac{1}{\mu}$ ορίζεται ως 0, αν $\mu = +\infty$, και ως $+\infty$, αν $\mu = 0$.*

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το κριτήριο ρίζας, διακρίνοντας τρεις περιπτώσεις. Αν $0 < \mu < +\infty$, τότε είναι $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = |x-\xi|\mu$ και, επομένως: αν $|x-\xi| < \frac{1}{\mu}$, τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει ενώ, αν $|x-\xi| > \frac{1}{\mu}$, τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει. Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ίση με $\frac{1}{\mu}$. Αν $\mu = 0$, τότε $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|\cdot 0 = 0 < 1$, οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και η ακτίνα σύγκλισής της είναι $+\infty = \frac{1}{\mu}$. Τέλος, αν $\mu = +\infty$, τότε για κάθε $x \neq \xi$ έχουμε $|x-\xi| > 0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n(x-\xi)^n|} = |x-\xi|(+\infty) = +\infty > 1$. Άρα για κάθε $x \neq \xi$ η δυναμοσειρά αποκλίνει, οπότε η ακτίνα σύγκλισής της είναι $0 = \frac{1}{\mu}$.

Παραδείγματα: (1) Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$ εφαρμόζουμε και τους δυο τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ και $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{1}{n}|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 1 και το κέντρο είναι, φυσικά, ο 0. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ και αποκλίνει ενώ για $x = -1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ και συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1, 1)$.

(2) Για τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ μπορούμε να επαναλάβουμε ό,τι κάναμε στο προηγούμενο παράδειγμα και να εφαρμόσουμε τους τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης. Προτιμάμε, όμως, να χρησιμοποιήσουμε το *αποτέλεσμα* του προηγούμενου παραδείγματος ως εξής. Με την αλλαγή μεταβλητής $t = -x$ η δυναμοσειρά γράφεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}t^n$. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα αυτή συγκλίνει για κάθε t στο $[-1, 1)$, οπότε η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x στο $(-1, 1]$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1]$.

(3) Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}x^n$. Εφαρμόζουμε τους δυο τύπους για την ακτίνα σύγκλισης: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$ και $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{1}{n^2}|} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι 1 και το κέντρο είναι ο 0. Για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ και συγκλίνει ενώ για $x = -1$ η σειρά

γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ και, πάλι, συγκλίνει. Άρα το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1,1]$.

(4) Στα τρία τελευταία παραδείγματα είδαμε δυναμοσειρές που το διάστημα σύγκλισής τους περιέχει ένα μόνο ή και τα δυο άκρα του. Η γεωμετρική δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty}x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-1,1)$ που δεν περιέχει κανένα άκρο του.

Τα επόμενα παραδείγματα είναι *πολύ σημαντικά* και θα τα ξαναδούμε από λίγο διαφορετική σκοπιά στην επόμενη ενότητα.

Παραδείγματα: (1) Έστω η δυναμοσειρά

$$\boxed{1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots.}$$

Εφαρμόζουμε τον πρώτο τύπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης και έχουμε: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$. Άρα η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty,+\infty)$. Αν θελήσουμε να εφαρμόσουμε τον δεύτερο τύπο υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης, πρέπει να υπολογίσουμε το $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, δηλαδή το $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}$. Αυτό το όριο δεν είναι τόσο απλό και στην περίπτωση αυτή *δε χρειάζεται* να το υπολογίσουμε διότι έχουμε ήδη υπολογίσει την ακτίνα σύγκλισης βάσει του πρώτου τύπου. Όμως, το όριο $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}$ είναι σημαντικό και θα το χρησιμοποιήσουμε συχνά παρακάτω. Είναι, λοιπόν:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty.}$$

Απόδειξη: Αν ο n είναι άρτιος, γράφουμε $n!=1\cdots\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)\cdots n\geq(\frac{n}{2}+1)\cdots n\geq(\frac{n}{2}+1)^{\frac{n}{2}}\geq(\frac{n+1}{2})^{\frac{n}{2}}$, οπότε $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Αν ο n είναι περιττός, τότε $n!=1\cdots\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2}\cdots n\geq\frac{n+1}{2}\cdots n\geq(\frac{n+1}{2})^{\frac{n+1}{2}}\geq(\frac{n+1}{2})^{\frac{n}{2}}$, οπότε $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt{\frac{n+1}{2}}$. Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt{\frac{n+1}{2}}$ και, επειδή $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{2}}=+\infty$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$.

Άρα και με τον δεύτερο τύπο υπολογίζουμε την ακτίνα σύγκλισης ίση με $+\infty$.

(2) Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\boxed{1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots.}$$

Ίσως ο πιο απλός τρόπος υπολογισμού του διαστήματος σύγκλισης είναι να κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής $t=x^2$, οπότε η δυναμοσειρά γράφεται $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^k=1-\frac{t}{2!}+\frac{t^2}{4!}-\frac{t^3}{6!}+\cdots$. Υπολογίζουμε την ακτίνα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς και με τους δυο τύπους. Έχουμε $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}}{\frac{(-1)^k}{(2k)!}}\right|=$

$\lim_{k\to+\infty}\frac{(2k)!}{(2k+2)!}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=0$. Ακόμη, $\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|\frac{(-1)^k}{(2k)!}|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}}=0$, διότι είναι $0\leq\frac{1}{\sqrt[k]{(2k)!}}\leq\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$ και $\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{k!}}=0$. Άρα και με τους δυο τύπους η ακτίνα σύγκλισης υπολογίζεται ίση με $+\infty$. Συμπεραίνουμε ότι η νέα δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε t, οπότε συνεπάγεται ότι η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και, επομένως, το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty,+\infty)$.

Θα υπολογίσουμε τώρα την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς χωρίς αλλαγή μεταβλητής. Η ακολουθία των συντελεστών έχει *διπλό τύπο*: ο συντελεστής του x^n είναι $a_n=0$, αν ο n είναι περιττός, και $a_n=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}$, αν ο n είναι άρτιος. Επομένως, ο πρώτος τύπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης δεν εφαρμόζεται διότι δεν ορίζεται η ακολουθία $\big(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\big)$. Για να εφαρμόσουμε τον δεύτερο τύπο παρατηρούμε ότι είναι $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, αν ο n είναι άρτιος, και $\sqrt[n]{|a_n|}=0$, αν ο n είναι περιττός. Άρα είναι $0\leq\sqrt[n]{|a_n|}\leq\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ για κάθε n και, επειδή $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$, συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι $+\infty$.

Μπορούμε, επίσης, να εφαρμόσουμε κατ΄ ευθείαν το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας! Θεωρούμε τα όρια $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}x^{2k+2}}{\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)}=0<1$ και $\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt[k]{(2k)!}}=0<1$ για κάθε x. (Το τελευταίο όριο ισχύει διότι $0\leq\frac{x^2}{\sqrt[k]{(2k)!}}\leq\frac{x^2}{\sqrt[k]{k!}}$ για κάθε k.) Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x στο $(-\infty,+\infty)$.

(3) Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots.}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $+\infty$ και το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty,+\infty)$.

(4) Έστω η δυναμοσειρά

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots.}$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον x, μπορούμε, ισοδύναμα, να μελετήσουμε τη δυναμοσειρά $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k}$ και, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t=x^2$, αναγόμαστε στη δυναμοσειρά $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}t^k$. Έχουμε ότι $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{2k+3}}{\frac{(-1)^k}{2k+1}}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{2k+1}{2k+3}=1$ και $\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{|\frac{(-1)^k}{2k+1}|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{2k+1}}=1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης της νέας δυναμοσειράς είναι ίση με 1. Αν $t=1$, η δυναμοσειρά γίνεται $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$ και συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων. Επίσης, αν $t=-1$, η δυναμοσειρά γίνεται $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}$ και αποκλίνει διότι συγκρίνεται με τη σειρά $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}$. Άρα η δυναμοσειρά $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}t^k$ συγκλίνει για κάθε t στο διάστημα $(-1,1]$. Επειδή $t=x^2$, συνεπάγεται ότι η δυναμοσειρά $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k}$ συγκλίνει για κάθε x στο $[-1,1]$, οπότε και η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x στο $[-1,1]$.

Μπορούμε, επίσης, να υπολογίσουμε το διάστημα σύγκλισης εφαρμόζοντας κατ' ευθείαν το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας. Είναι $\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}}{\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{2k-1}{2k+1}x^2=x^2$ και $\lim_{k\to+\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}\right|}=\lim_{k\to+\infty}\frac{|x|^{2-\frac{1}{k}}}{\sqrt[k]{2k-1}}=x^2$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει, αν $x^2<1$, και αποκλίνει, αν $x^2>1$. Αν $x=1$, η δυναμοσειρά γίνεται $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ και συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων. Αν $x=-1$, η δυναμοσειρά γίνεται $-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, οπότε και πάλι συγκλίνει για τον ίδιο λόγο. Επομένως, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $[-1,1]$.

Παρατηρήστε ότι στην αρχική δυναμοσειρά δεν εφαρμόζεται κανείς από τους δυο τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης! Διότι ο συντελεστής του x^n είναι $a_n=\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}$, αν ο n είναι περιττός, και $a_n=0$, αν ο n είναι άρτιος. Άρα ο πρώτος τύπος υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης δεν εφαρμόζεται διότι δεν ορίζεται η ακολουθία $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$. Επίσης, βλέπουμε ότι $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$, αν ο n είναι περιττός, και $\sqrt[n]{|a_n|}=0$, αν ο n είναι άρτιος. Από αυτό συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$, οπότε ούτε ο δεύτερος τύπος εφαρμόζεται.

(5) Έστω η δυναμοσειρά

$$\boxed{1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots,}$$

όπου οι αριθμοί $\binom{\alpha}{n}$ ορίζονται με τους τύπους

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

για κάθε φυσικό n και κάθε α και

$$\binom{\alpha}{0}=1.$$

Είναι φανερό ότι το σύμβολο $\binom{\alpha}{n}$ είναι επέκταση του γνωστού συμβόλου $\binom{m}{n}$, το οποίο είχε ορισθεί για ακέραιους n και m με $0\le n\le m$. Παρατηρήστε ότι, αν ο α είναι μη αρνητικός ακέραιος, τότε $\binom{\alpha}{n}=0$ για κάθε $n\ge\alpha+1$, οπότε η δυναμοσειρά γράφεται $1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha=(1+x)^\alpha$, βάσει του δυωνυμικού τύπου του Newton. Επομένως, στην περίπτωση που ο α

είναι μη αρνητικός ακέραιος η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty,+\infty)$.

Στην περίπτωση που ο α *δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος*, υπολογίζουμε $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}|\frac{\alpha-n}{n+1}| = 1$, οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι ίση με 1. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι ένα από τα: $(-1,1)$, $(-1,1]$, $[-1,1)$, $[-1,1]$. Αποδεικνύεται ότι (i) αν $\alpha \leq -1$, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1)$, (ii) αν $-1<\alpha<0$, τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1,1]$ και (iii) αν $\alpha \geq 0$ (και ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος), τότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1,1]$.

Για να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα σημεία ± 1 θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 10.1 *Αν $\mu,\nu > -1$, τότε υπάρχουν δυο αριθμοί $c_1, c_2 > 0$, οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τους μ,ν, ώστε να ισχύει*

$$c_1 n^{\mu-\nu} \leq \frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu}$$

για κάθε φυσικό n.

Η δεξιά ανισότητα αποδεικνύεται ως εξής. $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} = (1+\frac{\mu-\nu}{\nu+1})(1+\frac{\mu-\nu}{\nu+2})\cdots(1+\frac{\mu-\nu}{\nu+n}) \leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}+\frac{\mu-\nu}{\nu+2}+\cdots+\frac{\mu-\nu}{\nu+n}} = e^{(\mu-\nu)(\frac{1}{\nu+1}+\frac{1}{\nu+2}+\cdots+\frac{1}{\nu+n})}$. Τώρα, αν $\nu\leq\mu$, συνεπάγεται $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)\left(\frac{1}{\nu+1}+\int_1^n \frac{1}{\nu+x}\,dx\right)} = e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}+(\mu-\nu)\log\frac{\nu+n}{\nu+1}} = e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+n}{\nu+1})^{\mu-\nu}$. Επειδή $\nu+n\leq(\nu+2)n$, συνεπάγεται $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu}n^{\mu-\nu}$. Αν $\mu\leq\nu$ τότε $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq e^{(\mu-\nu)\int_1^{n+1}\frac{1}{\nu+x}\,dx} = e^{(\mu-\nu)\log\frac{\nu+n+1}{\nu+1}} = (\frac{\nu+n+1}{\nu+1})^{\mu-\nu}$ και, επειδή $\nu+n+1\geq n$, έχουμε $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq \frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}}n^{\mu-\nu}$. Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει $\frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)} \leq c_2 n^{\mu-\nu}$, όπου c_2 είναι ο αριθμός $e^{\frac{\mu-\nu}{\nu+1}}(\frac{\nu+2}{\nu+1})^{\mu-\nu}$ ή ο $\frac{1}{(\nu+1)^{\mu-\nu}}$ ανάλογα με το αν $-1<\nu\leq\mu$ ή $-1<\mu\leq\nu$, αντιστοίχως. Η αριστερή ανισότητα είναι ακριβώς ίδια με τη δεξιά ανισότητα (με $c_1=\frac{1}{c_2}$), αρκεί να εναλλάξουμε τους ρόλους των μ και ν.

Επιστρέφουμε στη μελέτη της σύγκλισης της δυναμοσειράς $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$ για $x=\pm 1$.
(i) Αν $x=1$, η δυναμοσειρά γράφεται $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}$.

Αν $\alpha<0$, τότε $\binom{\alpha}{n} = (-1)^n\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$. Αν $\alpha\leq -1$, τότε $|\binom{\alpha}{n}|\geq 1$, οπότε η σειρά αποκλίνει. Αν $-1<\alpha<0$, εύκολα βλέπουμε ότι ο $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!}$ φθίνει, καθώς ο n αυξάνει, και $\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \leq c_2 n^{|\alpha|-1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} = 0$. Άρα, αν $-1<\alpha<0$, η σειρά συγκλίνει βάσει του κριτηρίου εναλλασσόμενων προσήμων. Παρεμπιπτόντως, βλέπουμε ότι $|\binom{\alpha}{n}| = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \geq c_1 n^{|\alpha|-1}$, οπότε η σειρά δε συγκλίνει απολύτως.

Αν $\alpha\geq 0$, επειδή ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος, ισχύει $m<\alpha<m+1$, όπου $m=[\alpha]$ είναι μη αρνητικός ακέραιος. Άρα για $n\geq m+1$ είναι $|\binom{\alpha}{n}| = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \leq c_2\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$. Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως.
(ii) Αν $x=-1$, η δυναμοσειρά γράφεται $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}(-1)^n$.

Αν $\alpha<0$, τότε $\binom{\alpha}{n}(-1)^n = \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\cdots(|\alpha|+n-1)}{n!} \geq c_1\frac{1}{n^{1-|\alpha|}}$, οπότε η σειρά αποκλίνει.

Αν $\alpha\geq 0$, ισχύει $m<\alpha<m+1$, όπου $m=[\alpha]$ είναι μη αρνητικός ακέραιος. Για κάθε $n\geq m+1$ είναι $|\binom{\alpha}{n}(-1)^n| = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!} = \frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{(m+1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{(m+2)\cdots n} \leq c_2\frac{\alpha\cdots(\alpha-m)}{1\cdots(m+1)}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ και η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Ασκήσεις.

1. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών. Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}2^nx^n\,,\quad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n^3x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^nx^n}{n^2}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{3^n}x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{\sqrt{n^3+1}}x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}n^nx^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}x^n\,,$$

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}n!x^n\,,\quad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n!}x^n\,,\quad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(2^n+\frac{3^n}{n}\Big)x^n\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n+3^n}x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}x^n\,.$$

2. Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών. Μπορείτε να δοκιμάσετε κάποια αλλαγή μεταβλητής ή να εφαρμόσετε απ΄ ευθείας το κριτήριο λόγου ή το κριτήριο ρίζας. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε απ΄ ευθείας τους τύπους υπολογισμού της ακτίνας σύγκλισης;

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{4n-3}x^{3n}\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n^2}}{\sqrt{n}}x^{n^2}\,.$$

3. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n\,,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\Big(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\Big)^3x^n\,.$$

Αν θέλετε να μελετήσετε τη σύγκλιση στα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης – ώστε να βρείτε ακριβώς τα διαστήματα σύγκλισης – μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Λήμμα 10.1.

4. Θεωρήστε p,q, όχι και τους δυο 0, και μια δυναμοσειρά $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ για τους συντελεστές της οποίας ισχύει $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ για κάθε $n\geq 0$.

   (1) Αν συμβολίσουμε $f(x)$ το άθροισμα της δυναμοσειράς για κάθε x στο διάστημα σύγκλισής της – όποιο κι αν είναι αυτό το διάστημα – αποδείξτε ότι είναι $(1-px-qx^2)f(x)=a_0+(a_1-pa_0)x$.

   (Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε την $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ με το x^{n+2}, και σχηματίστε το $\sum_{n=0}^{+\infty}$ του αποτελέσματος.)

   $^{(*)}$ (2) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

   (Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση Α5 της ενότητας 2.1.)

5. $^{(*)}$ Θεωρήστε τη δυναμοσειρά

$$1+\frac{ab}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots,$$

η οποία ονομάζεται **υπεργεωμετρική σειρά** και η συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν στο διάστημα σύγκλισής της ονομάζεται **υπεργεωμετρική συνάρτηση** και συμβολίζεται $y=F(a,b,c;x)$.

Βρείτε το διάστημα σύγκλισης της υπεργεωμετρικής σειράς ανάλογα με τις τιμές των a,b και c.

(Υπόδειξη: Για τα άκρα του διαστήματος σύγκλισης δείτε το Λήμμα 10.1.)

10.6 Σειρές Taylor.

Έστω οποιαδήποτε δυναμοσειρά $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$. Αυτή έχει μια ακτίνα σύγκλισης R και ένα διάστημα σύγκλισης I, το οποίο μπορεί να είναι είτε το μονοσύνολο $\{\xi\}$, αν $R=0$, είτε ολόκληρο το $(-\infty,+\infty)$, αν $R=+\infty$, είτε κάποιο ενδιάμεσο διάστημα με άκρα $\xi\pm R$, αν $0<R<+\infty$. Ας υποθέσουμε ότι είναι $R>0$, οπότε *το διάστημα I δεν αποτελείται μόνο από τον ξ*. Αν για κάθε x στο διάστημα I συμβολίσουμε $f(x)$ το άθροισμα της δυναμοσειράς, δηλαδή τον αριθμό $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$, τότε ορίζεται μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το I και τύπο

$$y=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n \qquad (x \text{ στο } I)$$

και λέμε ότι η $y=f(x)$ είναι **η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά** $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ στο διάστημα σύγκλισής της.

Παράδειγμα: Η γεωμετρική δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty}x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης το $(-1,1)$ και για κάθε x στο διάστημα αυτό ισχύει $1+\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Άρα η συνάρτηση $y=\frac{1}{1-x}$ με πεδίο ορισμού το $(-1,1)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty}x^n$ στο $(-1,1)$.

Προσέξτε: η συνάρτηση $y=\frac{1}{1-x}$ ορίζεται (ανεξάρτητα από τη δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty}x^n$) στο σύνολο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ το οποίο είναι μεγαλύτερο από το $(-1,1)$, το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Υπάρχει και η αντίστροφη διαδικασία. Έστω συνάρτηση $y=f(x)$ και ξ στο πεδίο ορισμού της. Αν υπάρχει ένα διάστημα I το οποίο έχει μέσο ξ, αλλά *δεν αποτελείται μόνο από τον ξ*, και περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $y=f(x)$ και κάποια δυναμοσειρά $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ η οποία συγκλίνει για κάθε x στο I και ισχύει $f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ για κάθε x στο I, τότε λέμε ότι η δυναμοσειρά $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-\xi)^n$ είναι η **σειρά Taylor της συνάρτησης** $y=f(x)$ **στον** ξ.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $y=\frac{1}{1-x}$ έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Το διάστημα $(-1,1)$ με μέσο 0 περιέχεται στο σύνολο αυτό και υπάρχει η δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ η οποία συγκλίνει για κάθε x στο $(-1,1)$ και ισχύει $1+\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ για κάθε x στο $(-1,1)$. Επομένως, η $1+\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ είναι η σειρά Taylor της $y=\frac{1}{1-x}$ στον 0.

Τώρα ανακύπτουν δυο ερωτήματα.

Πρώτο ερώτημα. Έστω ότι έχουμε μια δυναμοσειρά $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ με διάστημα σύγκλισης το I. Όπως είδαμε, ορίζεται η συνάρτηση με τύπο $y=f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-\xi)^n$ για κάθε x στο I. Μπορούμε να βρούμε *συνοπτικότερο* τύπο της συνάρτησης; Για παράδειγμα, η συνάρτηση που ορίζεται από την $1+\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ στο $(-1,1)$ έχει τύπο $y=f(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ αλλά έχει και τον συνοπτικότερο τύπο $y=f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Η λύση σ' αυτό το πρόβλημα εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη δυναμοσειρά και μπορεί να δοθεί για πολύ λίγες δυναμοσειρές. Ο πιο άμεσος τρόπος είναι να βρούμε συνοπτικό τύπο για κάθε μερικό άθροισμα $a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k(x-\xi)^k$ και κατόπιν να βρούμε το όριο όταν $n\to+\infty$. Στο παράδειγμα με τη γεωμετρική δυναμοσειρά τυχαίνει να γνωρίζουμε τον τύπο $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ και, παίρνοντας όριο, βρίσκουμε $\frac{1}{1-x}$ όταν $-1<x<1$. Αυτό, όμως, είναι ανέφικτο για τις περισσότερες δυναμοσειρές, όπως, για παράδειγμα, η $1+\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^n$ που συναντήσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα.

Δεύτερο ερώτημα. Έστω μια συνάρτηση $y=f(x)$ και ένας ξ στο πεδίο ορισμού της. Μπορούμε να αποφασίσουμε αν υπάρχει σειρά Taylor της συνάρτησης στον ξ και (αν υπάρχει) να τη βρούμε;

Για το πρόβλημα αυτό υπάρχει πλήρης λύση και συγκεκριμένη διαδικασία, την οποία θα αναπτύξουμε αμέσως τώρα.

Πρόταση 10.18 *Έστω ότι η $y=f(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I, το οποίο έχει μέσο ξ και δεν αποτελείται μόνο από το ξ. Τότε για κάθε x στο I και για κάθε φυσικό n ισχύει ο τύπος*

$$f(x)=f(\xi)+\frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+R_n(x;\xi;f),$$

όπου $R_n(x;\xi;f)$ είναι είτε το σφάλμα τύπου Lagrange είτε το σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου. Αν ισχύει $\lim_{n\to+\infty} R_n(x;\xi;f)=0$ για κάθε x στο I, τότε η σειρά Taylor της συνάρτησης στον ξ είναι η $f(\xi)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$. Δηλαδή είναι

$$\boxed{f(x)=f(\xi)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \qquad (x \textit{ στο } I).}$$

Με άλλα λόγια, οι συντελεστές της σειράς Taylor της $y=f(x)$ στον ξ είναι οι αριθμοί $a_0=f(\xi)$ και $a_n=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ $(n\geq 1)$.

Το πρώτο μέρος της Πρότασης 10.18 είναι απλή συνέπεια των Θεωρημάτων 9.1 και 9.2. Το δεύτερο μέρος είναι προφανές: αν $\lim_{n\to+\infty} R_n(x;\xi;f)=0$ για κάθε x

στο I, τότε συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}\big(f(\xi)+\frac{f'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\big)=f(x)$ ή, ισοδύναμα, $f(\xi)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=f(x)$ για κάθε x στο I.

Παραδείγματα: (1) Έστω $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_Nx^N$ οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού N και οποιοσδήποτε ξ.

Για κάθε x και $n\geq N$ ισχύει $p^{(n+1)}(x)=0$, οπότε το σφάλμα τύπου Lagrange είναι $R_n(x;\xi;p)=\frac{p^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-\xi)^{n+1}=0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;\xi;p)=0$ για κάθε x και η σειρά Taylor της $y=p(x)$ στον ξ είναι η $p(\xi)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{p^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=p(\xi)+\frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\frac{p^{(N)}(\xi)}{N!}(x-\xi)^N$. Δηλαδή είναι

$$\boxed{p(x)=p(\xi)+\frac{p'(\xi)}{1!}(x-\xi)+\cdots+\frac{p^{(N)}(\xi)}{N!}(x-\xi)^N\,.}$$

Αυτό είναι το λεγόμενο *ανάπτυγμα πολυωνύμου σε δυνάμεις του* $x-\xi$ (αντί του x). Φυσικά, στην περίπτωση $\xi=0$ έχουμε $p(x)=p(0)+\frac{p'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{p^{(N)}(0)}{N!}x^N$.

(2) Θεωρούμε την εκθετική συνάρτηση $y=e^x$, η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και, μάλιστα, ισχύει $\frac{d^n\,e^x}{dx^n}=e^x$ για κάθε n και κάθε x. Ειδικώτερα, είναι $\frac{d^n\,e^x}{dx^n}\big|_{x=0}=1$ για κάθε n, οπότε η πιθανή σειρά Taylor της $y=e^x$ στον 0 είναι η $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$.

Παίρνουμε $\xi=0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange $R_n(x;0;e^x)=\frac{e^\eta}{(n+1)!}x^{n+1}$, όπου ο η είναι κάποιος αριθμός ανάμεσα στους 0 και x. Αν $x\geq 0$, τότε $|R_n(x;0;e^x)|=\frac{e^\eta}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ και, αν $x\leq 0$, τότε $|R_n(x;0;e^x)|=\frac{e^\eta}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

Αποδεικνύεται ότι για κάθε a είναι

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0.}$$

Ένας απλός αλλά έμμεσος τρόπος να αποδειχτεί αυτό το όριο είναι ο εξής. Γνωρίζουμε από την προηγούμενη ενότητα ότι η δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ συγκλίνει για κάθε x, δηλαδή και για $x=a$. Από τη σύγκλιση της $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}a^n$ συνεπάγεται αμέσως το παραπάνω όριο.

Ένας πιο άμεσος τρόπος να αποδείξουμε το $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ είναι ο εξής. Ορίζουμε $m=[|a|]$, οπότε για κάθε $n\geq m+1$ είναι $0\leq\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|^m}{m!}\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n}\leq\frac{|a|^m}{m!}\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{m+1}=\frac{(m+1)^m}{m!}(\frac{|a|}{m+1})^n$. Επειδή $0\leq\frac{|a|}{m+1}<1$, είναι $\lim_{n\to+\infty}(\frac{|a|}{m+1})^n=0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{|a|^n}{n!}=0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω όριο, βρίσκουμε $\lim_{n\to+\infty}|R_n(x;0;e^x)|=0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;e^x)=0$ για κάθε x. Άρα η σειρά Taylor της $y=e^x$ στον 0 είναι η $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή

$$\boxed{e^x=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).}$$

Είχαμε ήδη συναντήσει τη δυναμοσειρά $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ και είχαμε αποδείξει ότι το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty,+\infty)$ αλλά μέχρι τώρα δε γνωρίζαμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη δυναμοσειρά είναι η εκθετική συνάρτηση.

Λόγω της σχέσης της με την εκθετική συνάρτηση η $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ ονομάζεται **εκθετική δυναμοσειρά**.

(3) Θεωρούμε τώρα την $y=\cos x$ η οποία είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty,+\infty)$ και $\frac{d^n\cos x}{dx^n}=\pm\cos x$ ή $\pm\sin x$. Ειδικώτερα, είναι $\frac{d^n\cos x}{dx^n}\big|_{x=0}=1$ ή 0 ή -1 ή 0 αν ο n είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 4 συν 0 ή συν 1 ή συν 2 ή συν 3, αντιστοίχως. Άρα η πιθανή σειρά Taylor της $y=\cos x$ στον 0 είναι η $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.

Παίρνουμε $\xi=0$ και υπολογίζουμε το σφάλμα τύπου Lagrange $R_n(x;0;\cos x)$ $=\frac{\pm\cos\eta}{(n+1)!}x^{n+1}$ ή $\frac{\pm\sin\eta}{(n+1)!}x^{n+1}$, όπου η είναι κάποιος αριθμός ανάμεσα στους 0 και x. Τότε $|R_n(x;0;\cos x)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;\cos x)=0$ για κάθε x. Άρα η σειρά Taylor της $y=\cos x$ στον 0 είναι η $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$. Δηλαδή

$$\boxed{\cos x=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).}$$

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι είχαμε ήδη συναντήσει τη δυναμοσειρά $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ με διάστημα σύγκλισης το $(-\infty,+\infty)$ αλλά μέχρι τώρα δε γνωρίζαμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτήν είναι η $y=\cos x$.

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε τη σειρά Taylor της $y=\sin x$ στον 0:

$$\boxed{\sin x=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).}$$

Η $1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ ονομάζεται **δυναμοσειρά του συνημιτόνου** και η $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$ **δυναμοσειρά του ημιτόνου**.

(4) Η $y=\log(1+x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ και έχει παραγώγους $\frac{d^n\log(1+x)}{dx^n}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ για κάθε n και κάθε x στο $(-1,+\infty)$. Ειδικώτερα, είναι $\frac{d^n\log(1+x)}{dx^n}\big|_{x=0}=(-1)^{n-1}(n-1)!$, οπότε η πιθανή σειρά Taylor της $y=\log(1+x)$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$. Αποδεικνύεται ότι αυτό πράγματι ισχύει και, μάλιστα, στο διάστημα $(-1,1]$. Δηλαδή είναι

$$\boxed{\log(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\quad(-1<x\leq 1).}$$

Το σφάλμα τύπου Lagrange της $y=\log(1+x)$ στον $\xi=0$ είναι $R_n(x;0;\log(1+x))=\frac{(-1)^n n!}{(1+\eta)^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n}{(1+\eta)^{n+1}(n+1)}x^{n+1}$, όπου ο η είναι κάποιος αριθμός ανάμεσα στους 0 και x. Αν $0<x\leq 1$, τότε είναι $|R_n(x;0;\log(1+x))|=\frac{x^{n+1}}{(1+\eta)^{n+1}(n+1)}\leq\frac{1}{n+1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;\log(1+x))=0$.

Το σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου είναι $R_n(x;0;\log(1+x))=\frac{1}{n!}\int_0^x\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^n\,dt=(-1)^n\int_0^x\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. Αν $-1<x\leq 0$, τότε $R_n(x;0;\log(1+x))=-\int_x^0\frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$, οπότε $|R_n(x;0;\log(1+x))|=\int_x^0\frac{(t-x)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$. Τώρα είναι $(\frac{t-x}{1+t})^n\leq|x|^n$ για κάθε t στο $[x,0]$, οπότε $|R_n(x;0;\log(1+x))|\leq|x|^n\int_x^0\frac{1}{1+t}\,dt=|x|^n\log\frac{1}{1+x}$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;\log(1+x))=0$.

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;\log(1+x))=0$ για κάθε x με $-1<x\leq 1$.

Αν αντικαταστήσουμε τον x με τον $-x$ και αλλάξουμε πρόσημα, βρίσκουμε

$$\boxed{\log\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\,x^n=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\quad(-1\leq x<1).}$$

Μια ενδιαφέρουσα ισότητα που προκύπτει ως ειδική περίπτωση είναι η

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

Παρατηρήστε ότι είχαμε ήδη δει σε προηγούμενο παράδειγμα ότι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\,x^n$ είναι το $[-1,1)$ αλλά δεν είχαμε αποδείξει ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά αυτή στο $[-1,1)$ είναι η $y=\log\frac{1}{1-x}$.

Θα δούμε τώρα ένα δεύτερο τρόπο υπολογισμού της σειράς Taylor της $y=\log(1+x)$ στο διάστημα $(-1,1]$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 10.18. Αυτός ο τρόπος θα εφαρμοστεί σε ένα ακόμη παράδειγμα, όπου θα είναι δύσκολη η εφαρμογή της Πρότασης 10.18.

Αρχίζουμε με τον γνωστό τύπο $\frac{1-(-t)^n}{1+t}=1+(-t)+\cdots+(-t)^{n-1}$, ο οποίος ισχύει για κάθε $t\neq -1$, και τον γράφουμε $\frac{1}{1+t}=1-t+\cdots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n\frac{t^n}{1+t}$. Επομένως, $\int_0^x\frac{1}{1+t}\,dt=\int_0^x 1\,dt-\int_0^x t\,dt+\cdots+(-1)^{n-1}\int_0^x t^{n-1}\,dt+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt$ για κάθε $x>-1$, οπότε

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt$$

για κάθε $x>-1$.

Αν $0\leq x\leq 1$, τότε $\left|(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\leq\int_0^x t^n\,dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt=0$.

Αν $-1<x\leq 0$, τότε $\left|(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt\right|=\int_x^0\frac{|t|^n}{1+t}\,dt\leq\frac{1}{1+x}\int_x^0|t|^n\,dt=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\leq\frac{1}{(n+1)(1+x)}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt=0$.

Άρα για κάθε x στο διάστημα $(-1,1]$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^n}{1+t}\,dt=0$ και, επομένως, $\lim_{n\to+\infty}\left(x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right)=\log(1+x)$. Άρα $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ για κάθε x στο $(-1,1]$.

(5) Μπορεί να αποδειχτεί ότι η σειρά Taylor της $y=\arctan x$ στον 0 είναι η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$ με διάστημα σύγκλισης το $[-1,1]$. Δηλαδή είναι

$$\boxed{\arctan x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots\quad(-1\leq x\leq 1).}$$

Είχαμε ήδη αποδείξει στην προηγούμενη ενότητα ότι το διάστημα σύγκλισης αυτής της δυναμοσειράς είναι ακριβώς το $[-1,1]$.

Με $x=1$ βρίσκουμε τον ενδιαφέροντα τύπο

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

Η $y=\arctan x$ έχει παράγωγο $\frac{1}{x^2+1}$ αλλά ο υπολογισμός των παραγώγων ανώτερης τάξης είναι περίπλοκος και δεν είναι βολική η εφαρμογή της Πρότασης 10.18. Γι αυτό καταφεύγουμε σε ένα τέχνασμα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήσαμε στο τέλος του προηγούμενου παραδείγματος.

Είναι $\frac{1-(-t^2)^n}{1+t^2}=1-t^2+t^4+\cdots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}$, οπότε $\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\cdots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+(-1)^n\frac{t^{2n}}{1+t^2}$ για κάθε t. Επομένως, $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^x 1\,dt-\int_0^x t^2\,dt+\int_0^x t^4\,dt-\cdots+(-1)^{n-1}\int_0^x t^{2n-2}\,dt+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$. Αυτό το γράφουμε

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}+(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt.$$

Αν $|x|\leq 1$, τότε $\left|(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\right|=\int_0^{|x|}\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\leq\int_0^{|x|}t^{2n}\,dt=\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}\leq\frac{1}{2n+1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt=0$.

Συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)=\arctan x$ για κάθε x στο $[-1,1]$, δηλαδή ότι $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=\arctan x$ για κάθε x στο $[-1,1]$.

(6) Έστω η συνάρτηση $y=(1+x)^\alpha$. Οι παράγωγοι της $y=(1+x)^\alpha$ είναι οι $\frac{d^n(1+x)^\alpha}{dx^n}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ και, ειδικώτερα, $\frac{d^n(1+x)^\alpha}{dx^n}\big|_{x=0}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. Επομένως, η πιθανή σειρά Taylor της $y=(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.

Αν ο α είναι μη αρνητικός ακέραιος, τότε αφ΄ ενός η $y=(1+x)^\alpha$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού α με πεδίο ορισμού το $(-\infty,+\infty)$ αφ΄ ετέρου η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται – όπως έχουμε ξαναπεί – πεπερασμένο άθροισμα $1+\binom{\alpha}{1}x+\cdots+\binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$. Στην περίπτωση αυτή η ισότητα

$$(1+x)^\alpha=1+\binom{\alpha}{1}x+\cdots+\binom{\alpha}{\alpha-1}x^{\alpha-1}+\binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$$

δεν είναι παρά ο δυωνυμικός τύπος του Newton και, επομένως, η παραπάνω δυναμοσειρά είναι, πράγματι, η σειρά Taylor της $y=(1+x)^\alpha$ στον 0 με διάστημα σύγκλισης το $(-\infty,+\infty)$.

Αν ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος, αποδεικνύεται ότι και πάλι η σειρά Taylor της $y=(1+x)^\alpha$ στον 0 είναι η $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$. Το διάστημα στο οποίο η δυναμοσειρά αυτή ισούται με την $y=(1+x)^\alpha$ είναι (i) το $(-1,1)$, αν $\alpha\leq-1$, (ii) το $(-1,1]$, αν $-1<\alpha<0$, και (iii) το $[-1,1]$, αν $\alpha\geq 0$ (και ο α δεν είναι μη αρνητικός ακέραιος). Δηλαδή

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad \left(\begin{array}{l} -1<x<1, \text{ αν } \alpha\le -1, \\ -1<x\le 1, \text{ αν } -1<\alpha<0, \\ -1\le x\le 1, \text{ αν } \alpha\ge 0 \text{ και } \alpha \text{ όχι στο } \mathbf{Z}. \end{array}\right)}$$

Το σφάλμα τύπου Lagrange είναι $R_n(x;0;(1+x)^\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\eta)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}(1+\eta)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$ για κάποιον η ανάμεσα στους 0 και x.

Αν $0\le x\le 1$, τότε είναι $x\le 1\le 1+\eta\le 2$ και, επομένως, $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)| = \left|\binom{\alpha}{n+1}\right|(1+\eta)^\alpha(\frac{x}{1+\eta})^{n+1}$. Τώρα, αν $a>0$, εφαρμόζοντας προσεκτικά το Λήμμα 10.1, βρίσκουμε ότι για $n>[\alpha]$ είναι $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)|\le c_2\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}2^\alpha$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;(1+x)^\alpha)=0$. Αν $-1<\alpha<0$, πάλι από το Λήμμα 10.1 βρίσκουμε ότι $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)|\le c_2(n+1)^{-\alpha-1}$, οπότε και πάλι $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;(1+x)^\alpha)=0$.

Αν $0\le x<1$ και $\alpha\le -1$, τότε πάλι με το Λήμμα 10.1 βρίσκουμε ότι $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)|\le \left|\binom{\alpha}{n+1}\right|x^{n+1}\le c_2(n+1)^{-\alpha-1}x^{n+1}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;(1+x)^\alpha)=0$.

Αν $-1<x\le 0$, τότε το σφάλμα ολοκληρωτικού τύπου είναι ίσο με $R_n(x;0;(1+x)^\alpha) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt$ και, επομένως, $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right|\int_x^0(1+t)^{\alpha-n-1}(t-x)^n\,dt$. Επειδή $\frac{t-x}{1+t}\le -x$ για $x\le t\le 0$, συνεπάγεται $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)|\le \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n\int_x^0(1+t)^{\alpha-1}\,dt = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\right||x|^n\frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha} = (n+1)\left|\binom{\alpha}{n+1}\right||x|^n\frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}$. Αν $\alpha>0$, για $n>[\alpha]$ είναι $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)|\le c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n\frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;(1+x)^\alpha)=0$. Αν $\alpha<0$, τότε $|R_n(x;0;(1+x)^\alpha)|\le c_2(n+1)^{-\alpha}|x|^n\frac{(1+x)^\alpha-1}{|\alpha|}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty}R_n(x;0;(1+x)^\alpha)=0$.

Συνοψίζουμε: σε κάθε περίπτωση εκτός μιας έχουμε αποδείξει ότι $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\binom{\alpha}{1}x+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n\right)=(1+x)^\alpha$ ή, ισοδύναμα, $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^\alpha$.

Η μόνη περίπτωση που απομένει είναι όταν $x=-1$ και $\alpha>0$. Τότε, όμως, δε μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 9.2, οπότε κάνουμε το εξής. Χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις της προηγούμενης παραγράφου για $-1<x\le 0$ και γράφουμε $\left|(1+x)^\alpha-1-\binom{\alpha}{1}x-\cdots-\binom{\alpha}{n}x^n\right| = |R_n(x;0;(1+x)^\alpha)|\le c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}|x|^n\frac{1-(1+x)^\alpha}{\alpha}$. Αν $x\to -1+$, βρίσκουμε $\left|0-1-\binom{\alpha}{1}(-1)-\cdots-\binom{\alpha}{n}(-1)^n\right|\le c_2(n+1)\binom{\alpha}{[\alpha]+1}(n-[\alpha])^{-\alpha-1}\frac{1}{\alpha}$. Συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\binom{\alpha}{1}(-1)+\cdots+\binom{\alpha}{n}(-1)^n\right)=0$. Άρα και στην περίπτωση αυτή – δηλαδή $x=-1$ και $\alpha>0$ – ισχύει $1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=(1+x)^\alpha$.

Αξίζει να ξεχωρίσουμε δυο ειδικές περιπτώσεις. Με $\alpha=\frac{1}{2}$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\frac{x^n}{2n-1}\\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots\end{aligned}$$

για κάθε x στο $[-1,1]$. Με $\alpha=-\frac{1}{2}$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n\\ &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots\end{aligned}$$

για κάθε x στο $(-1,1]$.

Ασκήσεις.

1. Αναπτύξτε με δυο τρόπους το πολυώνυμο $1+2x-x^2-4x^3+x^4$ σε δυνάμεις του $x-1$.

2. Βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις παρακάτω δυναμοσειρές καθώς και τα διαστήματα σύγκλισής τους. Βρείτε πρώτα συνοπτικούς τύπους για τα μερικά αθροίσματά τους, παραγωγίζοντας την $1+x+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^n\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3x^n\,.$$

3. Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις παρακάτω δυναμοσειρές.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-(-2)^n\big)x^n\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\,, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}x^{2n}\,, \quad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n!}x^n\,, \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n\,, \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}\,, \ 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\,, \ 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n\,, \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\Big(\frac{x-1}{x+1}\Big)^{2n-1}\,,$$

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}x^n\,, \quad 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n\,.$$

4. Βρείτε τις σειρές Taylor των συναρτήσεων $y=\sin x$ και $y=\cos x$ στον ξ.

   Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σειρές Taylor, αποδείξτε τους τύπους

   (i) $\sin x=\sin\xi\cos(x-\xi)+\cos\xi\sin(x-\xi)$

   (ii) $\cos x=\cos\xi\cos(x-\xi)-\sin\xi\sin(x-\xi)$

   οι οποίοι είναι ισοδύναμοι με τους τύπους για το ημίτονο και το συνημίτονο αθροίσματος γωνιών.

5. Βρείτε τις σειρές Taylor στον 0 των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y=\cosh x, \qquad y=\sinh x.$$

6. Βρείτε τους αρχικούς όρους των σειρών Taylor στον 0 των παρακάτω συναρτήσεων.

$$y=\tan x, \qquad y=\frac{1}{\cos x}, \qquad y=\arcsin x, \qquad y=\arccos x.$$

7. Υπολογίστε τα αθροίσματα των παρακάτω σειρών.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^2-1}\,,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2-1}\,.$$

8. Γνωρίζουμε από την άσκηση Α18 της ενότητας 6.12 ότι η συνάρτηση $y = h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\,, & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x \leq 0, \end{cases}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$ και ότι είναι $h^{(n)}(0) = 0$ για κάθε φυσικό n. Είναι η $h(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{h^{(n)}(0)}{n!}x^n$ η σειρά Taylor της $y = h(x)$ στον 0;

9. Έστω $f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ η σειρά Taylor της $y = f(x)$ στον 0.

   Αποδείξτε ότι η $y = f(x)$ είναι άρτια ή περιττή σε κάποιο διάστημα με μέσο 0 αν και μόνο αν η σειρά Taylor περιέχει μόνο δυνάμεις του x με άρτιους ή περιττούς, αντιστοίχως, εκθέτες.

10.7 Εναλλακτικοί ορισμοί μερικών στοιχειωδών συναρτήσεων, ΙΙ.

Α. Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση και δυνάμεις.

Στην ενότητα 10.5 είδαμε ότι η δυναμοσειρά $1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n$ συγκλίνει για κάθε x στο $(-\infty, +\infty)$ και στην ενότητα 10.6 είδαμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τη δυναμοσειρά αυτή είναι η εκθετική $y = e^x$. Μπορούμε, αντιστρόφως, να *ορίσουμε* την εκθετική συνάρτηση μέσω της δυναμοσειράς! Ορίζουμε, δηλαδή, τη συνάρτηση $y = e^x$ στο $(-\infty, +\infty)$ με τύπο

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Είναι φανερό ότι $e^0 = 1$. Είναι, επίσης, φανερό ότι είναι $e^x \geq 1$ για κάθε $x > 0$. Αποδεικνύεται με κάμποσο κόπο ότι η $y = e^x$ είναι παραγωγίσιμη και ότι είναι $\frac{d\,e^x}{dx} = e^x$ στο $(-\infty, +\infty)$.

Απόδειξη: Θα κάνουμε μια παράκαμψη για να αποδείξουμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 10.2 *Για κάθε x και $h \neq 0$ με $|h| \leq 1$ και κάθε φυσικό $n \geq 2$ ισχύει*

$$\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right| \leq n(n-1)(|x|+1)^{n-2}|h|.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, είναι $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = n(x+\xi)^{n-1}$ για κάποιον ξ ανάμεσα στους 0 και h. Για τον ίδιο λόγο είναι $(x+\xi)^{n-1} - x^{n-1} = (n-1)(x+\eta)^{n-2}\xi$ για κάποιον η ανάμεσα στους 0 και ξ και, επομένως, ανάμεσα στους 0 και h. Άρα είναι $\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}\right| = |n(x+\xi)^{n-1} - nx^{n-1}| = n(n-1)|x+\eta|^{n-2}|\xi| \leq n(n-1)(|x|+1)^{n-2}|h|$.

Συνέχεια της απόδειξης του ότι $\frac{d\,e^x}{dx}=e^x$ *:* Θεωρούμε $h\neq 0$ με $|h|\leq 1$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\Big|\frac{e^{x+h}-e^x}{h}-e^x\Big| &= \Big|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\Big| \\ &= \Big|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\Big(\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\Big)\Big| \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}\Big|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\Big| \\ &\leq \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}n(n-1)(|x|+1)^{n-2}|h| \\ &= e^{|x|+1}|h|.\end{aligned}$$

Άρα $\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x$ και, επομένως, είναι $\frac{d\,e^x}{dx}=e^x$.

Τώρα, είναι εύκολο να αποδείξουμε την $e^{a+b}=e^ae^b$ για κάθε a,b. Θεωρούμε την $y=h(x)=e^{a+b-x}e^x$, οπότε $h'(x)=-e^{a+b-x}e^x+e^{a+b-x}e^x=0$ και, επομένως, η $y=h(x)$ είναι σταθερή στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα είναι $e^{a+b-x}e^x=h(x)=h(0)=e^{a+b-0}e^0=e^{a+b}$ για κάθε x και με $x=b$ βρίσκουμε την $e^{a+b}=e^ae^b$. Ειδικώτερα, ισχύει $e^xe^{-x}=e^0=1$, οπότε είναι $e^x\neq 0$ για κάθε x. Από την ιδιότητα σταθερού προσήμου και επειδή $e^0=1>0$, συνεπάγεται ότι είναι $e^x>0$ για κάθε x. Άρα από την $\frac{d\,e^x}{dx}=e^x$ προκύπτει ότι η $y=e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$.

Από τον ορισμό της $y=e^x$ συνεπάγεται ότι είναι $e^x\geq x$ για κάθε $x\geq 0$, οπότε $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$. Ακόμη, $\lim_{x\to-\infty}e^x=\lim_{t\to+\infty}e^{-t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t}=0$. Άρα το σύνολο τιμών της $y=e^x$ στο $(-\infty,+\infty)$ είναι το $(0,+\infty)$.

Τέλος, ορίζουμε τον αριθμό e ως

$$e=e^1=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\,.$$

Κατόπιν, ορίζουμε τη λογαριθμική συνάρτηση $y=\log x$ ως την αντίστροφη της εκθετικής $x=e^y$. Δηλαδή, είναι

$$y=\log x \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad x=e^y\,.$$

Η $y=\log x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα και έχει παράγωγο $\frac{d\,\log x}{dx}=\frac{1}{\frac{d\,e^y}{dy}\big|_{y=\log x}}=\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$. Η ιδιότητα $\log(ab)=\log a+\log b$ προκύπτει εύκολα. Για παράδειγμα, γράφουμε $c=\log a$ και $d=\log b$ και τότε είναι $ab=e^ce^d=e^{c+d}$. Άρα $\log(ab)=c+d=\log a+\log b$. Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε την $y=h(x)=\log(xb)-\log x$ και τότε είναι $h'(x)=b\frac{1}{xb}-\frac{1}{x}=0$ για κάθε x. Άρα η $y=h(x)$ είναι σταθερή, οπότε είναι $\log(xb)-\log x=h(x)=h(1)=\log b-\log 1=\log b$ για κάθε x. Με $x=a$ βρίσκουμε την $\log(ab)=\log a+\log b$.

Τέλος, για κάθε $a > 0$ και κάθε x ορίζουμε

$$a^x = e^{x \log a} .$$

Παρατηρούμε ότι είναι $a^1 = e^{1 \cdot \log a} = e^{\log a} = a$ και $a^0 = e^{0 \cdot \log a} = e^0 = 1$. Από τις ιδιότητες της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης αποδεικνύονται πάρα πολύ εύκολα με αλγεβρικό τρόπο όλες οι βασικές ιδιότητες της a^x .

Βλέπουμε, λοιπόν, έναν ακόμη τρόπο να οριστούν η εκθετική και η λογαριθμική συνάρτηση και οι δυνάμεις πέραν αυτού που είδαμε στο Κεφάλαιο 1 αλλά και του δεύτερου τρόπου που είδαμε στην υποενότητα Α της ενότητας 8.6. Όπως και στο Κεφάλαιο 8, πρέπει να αναρωτηθούμε αν οι συναρτήσεις που προέκυψαν από τους ορισμούς αυτής της ενότητας ταυτίζονται με τις αντίστοιχες συναρτήσεις που προέκυψαν από τους ορισμούς στα προηγούμενα κεφάλαια. Αυτό, πράγματι, ισχύει και αποδεικνύεται με τον *ίδιο ακριβώς τρόπο* με τον οποίο αποδείχτηκε ότι οι συναρτήσεις που προέκυψαν από τους ορισμούς στο Κεφάλαιο 8 ταυτίζονται με τις αντίστοιχες συναρτήσεις που προέκυψαν από τους ορισμούς στο Κεφάλαιο 1. Δε χρειάζεται να επαναλάβουμε τις λεπτομέρειες.

Παρατήρηση - αποτίμηση: Έχουμε να πούμε, λίγο-πολύ, τα ίδια με αυτά που είπαμε για τους εναλλακτικούς ορισμούς στο Κεφάλαιο 8. Αν και, τώρα, αφ΄ ενός μεν δεν εμπλέκεται η έννοια του ολοκληρώματος αφ΄ ετέρου δε η έννοια της σειράς εντάσσεται, ουσιαστικά, στην έννοια της ακολουθίας, δεν είναι φυσιολογικός εννοιολογικά ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης μέσω μιας σειράς η οποία απέχει πολύ από το να θυμίζει εκθετική συνάρτηση(!) και ο ορισμός των δυνάμεων μέσω λογαρίθμων.

Β. Οι δυνάμεις, και πάλι.

Τώρα θα δούμε μια ακόμη μέθοδο, αρκετά «δημοφιλή», ορισμού της δύναμης a^x με άρρητο εκθέτη x, προϋποθέτοντας, φυσικά, ότι έχουν οριστεί οι δυνάμεις με ρητούς εκθέτες και ότι ισχύουν οι ιδιότητες των δυνάμεων με ρητούς εκθέτες.

Θεωρούμε οποιονδήποτε $a > 1$ και οποιονδήποτε άρρητο $x > 0$. Αν (s_n) είναι η ακολουθία των *δεκαδικών προσεγγίσεων* του x, γνωρίζουμε ότι η (s_n) είναι αύξουσα, ότι είναι $s_n < x$ για καθε n και ότι $\lim_{n\to+\infty} s_n = x$. Παίρνουμε και έναν οποιονδήποτε ρητό $s > x$, για παράδειγμα τον $s = [x] + 1$, και βλέπουμε ότι είναι $a^{s_n} < a^s$ για κάθε n. Άρα η ακολουθία (a^{s_n}) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. Ως a^x ορίζουμε ακριβώς αυτόν τον αριθμό, δηλαδή ορίζουμε

$$a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{s_n} .$$

Κατόπιν, αν ο άρρητος x είναι < 0, τότε ορίζουμε

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}$$

και, τότε, αν η (s_n) είναι η ακολουθία των δεκαδικών προσεγγίσεων του $-x > 0$, ισχύει $\lim_{n\to+\infty}(-s_n) = -\lim_{n\to+\infty} s_n = -(-x) = x$ και $\lim_{n\to+\infty} a^{-s_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a^{s_n}} = \frac{1}{a^{-x}} = a^x$.

Βλέπουμε, δηλαδή, από τους παραπάνω ορισμούς ότι για κάθε *άρρητο* x υπάρχει κάποια συγκεκριμένη ακολουθία ρητών (t_n) για την οποία ισχύει $\lim_{n\to+\infty} t_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} a^{t_n} = a^x$. Αυτό, όμως, το τελευταίο ισχύει και για κάθε *ρητό* x. Πράγματι, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη σταθερή ακολουθία ρητών (t_n) με $t_n = x$ για κάθε n για την οποία ισχύει, προφανώς, ότι $\lim_{n\to+\infty} t_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} a^{t_n} = a^x$.

Συνοψίζουμε: *για κάθε* x *υπάρχει κάποια συγκεκριμένη ακολουθία ρητών* (t_n) *για την οποία ισχύει* $\lim_{n\to+\infty} t_n = x$ *και* $\lim_{n\to+\infty} a^{t_n} = a^x$.

Για να προχωρήσουμε πρέπει να αποδείξουμε ότι για *κάθε* ακολουθία ρητών (r_n) με $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$ συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = 1$. Για να το αποδείξουμε χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.1. Παίρνουμε οποιονδήποτε ϵ με $0 < \epsilon < 1$ και παρατηρούμε ότι ο αριθμός $N = [\frac{a-1}{\epsilon}]+1$ είναι *φυσικός*. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, υπάρχει n_0 ώστε να είναι $|r_n| < \frac{1}{N}$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ συνεπάγεται $(1+\epsilon)^N \geq 1+N\epsilon > 1+\frac{a-1}{\epsilon}\epsilon = a$ και, επομένως, $a^{r_n} < a^{\frac{1}{N}} < 1+\epsilon$. Επίσης, για κάθε $n \geq n_0$ συνεπάγεται $1-\epsilon < \frac{1}{1+\epsilon} < a^{-\frac{1}{N}} < a^{r_n}$. Συνδυάζοντας όλα αυτά, έχουμε ότι για κάθε $n \geq n_0$ συνεπάγεται $1-\epsilon < a^{r_n} < 1+\epsilon$.

Πρώτο πόρισμα είναι ότι για *κάθε* ακολουθία ρητών (r_n) με το $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$ να είναι *ρητός* συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^x$. Πράγματι, οι $r_n - x$ είναι ρητοί και είναι $\lim_{n\to+\infty}(r_n - x) = 0$, οπότε συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n - x} a^x = 1 \cdot a^x = a^x$.

Δεύτερο πόρισμα είναι ότι για *κάθε* ακολουθία ρητών (r_n) με το $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$ να είναι *άρρητος* συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^x$. Πράγματι, θεωρούμε τη *συγκεκριμένη* ακολουθία ρητών (t_n) – που αναφέρθηκε προηγουμένως – για την οποία ισχύει $\lim_{n\to+\infty} t_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} a^{t_n} = a^x$. Τότε οι $r_n - t_n$ είναι ρητοί και είναι $\lim_{n\to+\infty}(r_n - t_n) = x - x = 0$, οπότε συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n - t_n} a^{t_n} = 1 \cdot a^x = a^x$.

Συνοψίζουμε: *για κάθε* x *και για κάθε ακολουθία ρητών* (r_n) *με* $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$ *συνεπάγεται ότι* $\lim_{n\to+\infty} a^{r_n} = a^x$.

Τα παραπάνω αφορούν στην περίπτωση που είναι $a > 1$. Τώρα ορίζουμε $1^x = 1$ για κάθε άρρητο x και, στην περίπτωση που είναι $0 < a < 1$, ορίζουμε $a^x = (\frac{1}{a})^{-x}$ για κάθε άρρητο x. Αυτά, φυσικά, ισχύουν και για κάθε ρητό x και είναι τελείως εύκολο να δούμε ότι το τελευταίο μας συμπέρασμα ισχύει και στις περιπτώσεις $a = 1$ και $0 < a < 1$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων.

Έστω οποιοιδήποτε x, y και $a, b > 0$. Θεωρούμε δυο ακολουθίες ρητών (r_n) και (u_n) με $\lim_{n\to+\infty} r_n = x$ και $\lim_{n\to+\infty} u_n = y$. Τότε η $(r_n + u_n)$ είναι ακολουθία ρητών και $\lim_{n\to+\infty}(r_n + u_n) = x + y$. Επίσης, η $(r_n u_n)$ είναι ακολουθία ρητών και $\lim_{n\to+\infty}(r_n u_n) = xy$.

Συνεπάγεται

$$a^x a^y = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \lim_{n\to+\infty} a^{u_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} a^{u_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n + u_n} = a^{x+y}.$$

Επίσης,

$$a^x b^x = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} \lim_{n\to+\infty} b^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n} b^{r_n} = \lim_{n\to+\infty} (ab)^{r_n} = (ab)^x.$$

Η απόδειξη της $(a^x)^y = a^{xy}$ είναι λίγο πιο δύσκολη. Αποδεικνύουμε, πρώτα, κάτι γενικό: αν $x_n > 0$ για κάθε n, αν $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$ και αν η (y_n) είναι φραγμένη, συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^{y_n} = 1$. Για να το αποδείξουμε θεωρούμε για κάθε n τους ${x_n}' = \min\{x_n, \frac{1}{x_n}\} = \frac{x_n+\frac{1}{x_n}-|x_n-\frac{1}{x_n}|}{2}$ και ${x_n}'' = \max\{x_n, \frac{1}{x_n}\} = \frac{x_n+\frac{1}{x_n}+|x_n-\frac{1}{x_n}|}{2}$. Τότε είναι ${x_n}' \leq x_n \leq {x_n}''$ και ${x_n}' \leq \frac{1}{x_n} \leq {x_n}''$ για κάθε n και, επίσης, $\lim_{n\to+\infty} {x_n}' = \lim_{n\to+\infty} {x_n}'' = 1$. Τώρα, επειδή η (y_n) είναι φραγμένη, υπάρχει κάποιος *φυσικός* N ώστε να είναι $-N \leq y_n \leq N$ για κάθε n. Συνεπάγεται $({x_n}')^{-N} \leq {x_n}^{y_n} \leq ({x_n}'')^N$ για κάθε n και με παρεμβολή βρίσκουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} {x_n}^{y_n} = 1$. Τώρα, μπορούμε να συνεχίσουμε!

$$\begin{aligned} a^{xy} &= \lim_{n\to+\infty} a^{r_n u_n} = \lim_{n\to+\infty} (a^{r_n})^{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a^{r_n}}{a^x} a^x\right)^{u_n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a^{r_n}}{a^x}\right)^{u_n} \lim_{n\to+\infty} (a^x)^{u_n} = 1 \cdot (a^x)^y = (a^x)^y \,. \end{aligned}$$

Τέλος, έστω $a > 1$ και $x > 0$. Αν ο x είναι ρητός, γνωρίζουμε ότι είναι $a^x > 1$. Έστω ότι ο x είναι άρρητος. Θεωρούμε και πάλι, όπως κάναμε στην αρχή, την ακολουθία (s_n) των δεκαδικών αναπτυγμάτων του x. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} s_n = x$, υπάρχει κάποιος n_0 ώστε να είναι $s_{n_0} > 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι $a^{s_{n_0}} > 1$. Επειδή από τον ορισμό είναι $a^x = \lim_{n\to+\infty} a^{s_n}$ και επειδή η (a^{s_n}) είναι αύξουσα, συνεπάγεται $a^x \geq a^{s_n}$ για κάθε n. Θέτουμε $n = n_0$ και βρίσκουμε ότι $a^x > 1$. Τώρα αποδεικνύονται πολύ εύκολα όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων που έχουν σχέση με ανισότητες.

Παρατήρηση - αποτίμηση: Ο τρόπος ορισμού των δυνάμεων που μόλις είδαμε είναι, ίσως, το ίδιο απλός όσο και ο τρόπος ορισμού που είδαμε στο Κεφάλαιο 1. Και οι δυο τρόποι ορισμού έχουν κοινές δυσκολίες ενώ ο δεύτερος τρόπος έχει ένα μικρό μειονέκτημα: χρειάζεται η έννοια του ορίου ακολουθίας. Ο δεύτερος τρόπος κάνει, όπως είδαμε, χρήση των δεκαδικών αναπτυγμάτων των αριθμών, έννοια που είναι γνωστή και σε μαθητές γυμνασίου. Γι αυτό ο τρόπος αυτός είναι κατάλληλος αν θέλει κανείς *μόνο να ορίσει* τις δυνάμεις με άρρητους εκθέτες – και *όχι να αποδείξει* τις ιδιότητες των δυνάμεων – και χρησιμοποιείται ακόμη και στα γυμνασιακά σχολικά βιβλία. Δείτε, όμως, και τις περίφημες "Lectures on Physics" (vol I, chapter 22) του R. Feynman!

Γ. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Ας αναφέρουμε, τέλος, έναν εναλλακτικό ορισμό των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $y = \cos x$ και $y = \sin x$. Αυτός είναι ο εξής:

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \,, \qquad \sin x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} \,.$$

Γνωρίζουμε από την ενότητα 10.5 ότι οι δυναμοσειρές συγκλίνουν για κάθε x, οπότε οι αριθμοί $\cos x$ και $\sin x$ ορίζονται για κάθε x. Με τον ίδιο τρόπο που αποδείχτηκε η $\frac{d\,e^x}{dx} = e^x$ στην υποενότητα Α, προηγουμένως, αποδεικνύονται και οι $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ και $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$. Επειδή η δυναμοσειρά που ορίζει το $\cos x$ περιέχει μόνο δυνάμεις του x με άρτιο εκθέτη, η $y = \cos x$ είναι άρτια συνάρτηση. Ομοίως, η $y = \sin x$ είναι περιττή συνάρτηση. Προφανώς, είναι $\cos 0 = 1$ και $\sin 0 = 0$. Παραγωγίζοντας την $y = h(x) = \cos(a+b-x)\cos x - \sin(a+b-x)\sin x$, βλέπουμε εύκολα ότι είναι σταθερή στο $(-\infty,+\infty)$, οπότε είναι $\cos(a+b-x)\cos x - \sin(a+b-x)\sin x = h(x) = h(0) = \cos(a+b)$ για κάθε x. Με $x = b$ βρίσκουμε τη βασική ισότητα $\cos a\cos b - \sin a\sin b = \cos(a+b)$. Από αυτήν, με $b = -a$, βρίσκουμε την $(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1$ από την οποία συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $y = \cos x$ και $y = \sin x$ είναι φραγμένες: $|\cos x| \leq 1$ και $|\sin x| \leq 1$ για κάθε x.

Αν υποθέσουμε ότι είναι $\cos x \neq 0$ για κάθε x, τότε από την ιδιότητα σταθερού προσήμου και από το ότι $\cos 0 = 1$, ισχύει ότι $\cos x > 0$ για κάθε x. Αυτό συνεπάγεται ότι η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι $\sin x \geq \sin 1 > \sin 0 = 0$ για κάθε $x \geq 1$. Άρα, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, για κάθε $x > 1$ υπάρχει ξ στο $[1,x]$ ώστε να είναι $\cos x - \cos 1 = -(x-1)\sin\xi \leq -(x-1)\sin 1$. Συνεπάγεται ότι $\cos x \leq -\sin 1\cdot x + \cos 1 + \sin 1$ και, επομένως, $\lim_{x\to+\infty}\cos x = -\infty$, το οποίο αντιφάσκει με το ότι η $y = \cos x$ είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει κάποιος x για τον οποίο να ισχύει $\cos x = 0$. Επειδή η $y = \cos x$ είναι άρτια, συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος $x > 0$ για τον οποίο να ισχύει $\cos x = 0$. Τώρα, αποδεικνύεται – δε θα δούμε, όμως, την απόδειξη – ότι υπάρχει κάποιος **ελάχιστος** $x > 0$ για τον οποίο να ισχύει $\cos x = 0$. Αυτήν την ελάχιστη θετική λύση χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε τον αριθμό π. Ορίζουμε

$$\pi = 2\cdot \text{η ελάχιστη θετική λύση της } \cos x = 0.$$

Αυτό σημαίνει, φυσικά, ότι είναι $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ και $\cos x > 0$ για κάθε x στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{2})$. Άρα η $y = \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, οπότε είναι $\sin\frac{\pi}{2} > \sin 0 = 0$ και από την $(\sin\frac{\pi}{2})^2 + (\cos\frac{\pi}{2})^2 = 1$ βλέπουμε ότι είναι $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Άρα το σύνολο τιμών της $y = \sin x$ στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ είναι το $[0,1]$. Από το ότι είναι $\sin x > 0$ στο $(0,\frac{\pi}{2})$ συνεπάγεται ότι η $y = \cos x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{\pi}{2}]$, οπότε το σύνολο τιμών της $y = \cos x$ στο $[0,\frac{\pi}{2}]$ είναι το $[0,1]$. Χρησιμοποιώντας τις $\cos x = -\sin(x-\frac{\pi}{2})$ και $\sin x = \cos(x-\frac{\pi}{2})$, οι οποίες προκύπτουν από την $\cos a\cos b - \sin a\sin b = \cos(a+b)$, μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα τις ιδιότητες μονοτονίας των συναρτήσεων $y = \cos x$ και $y = \sin x$ στα διαδοχικά διαστήματα $[\frac{\pi}{2},\pi]$, $[\pi,\frac{3\pi}{2}]$ και $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$ και, επομένως, στο συνολικό διάστημα $[0,2\pi]$. Παρατηρούμε, τέλος, ότι είναι $\cos(x+2\pi) = \cos x$ και $\sin(x+2\pi) = \sin x$ για κάθε x, οπότε οι συναρτήσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Τέλος, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο – με παραγώγους – που αποδείξαμε ότι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως, ορίστηκαν στην υποενότητα Β της ενότητας 8.6, ταυτίζονται με τις αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως ορίστηκαν στο Κεφάλαιο 1, μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι το ίδιο ισχύει και για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως αυτές ορίστηκαν σ′ αυτήν εδώ την ενότητα.

Παρατήρηση - αποτίμηση: Και πάλι ... δυστυχώς, κάθε αναλυτικός ορισμός των τριγωνομετρικών αριθμών χρειάζεται αρκετή προετοιμασία και δεν είναι δυνατό να αναπτυχθεί στα πλαίσια ενός εισαγωγικού κεφαλαίου όπως το Κεφάλαιο 1 αυτών των σημειώσεων.