ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ Ι

Τελικό Διαγώνισμα-Ιούνιος 2012-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια **δύο ώρες**. Μπορείτε να φύγετε μετά μία ώρα. Επιτρέπονται δύο σελίδες με σημειώσεις.

(**1**) (2 Μονάδες) Υπολογίστε (με απόδειξη) τα όρια:

(**i**) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)$.

(**ii**) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$.

(**2**) (1.5 Μονάδες) Έστω (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε $a_1=1$ και $a_{n+1}=a_n+e^{a_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty}a_n$.

(**3**) (1.5 Μονάδες) Βρείτε (με απόδειξη) όλες τις τιμές του $a\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}$$

συγκλίνει.

(**4**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0\\ c, & x=0.\end{cases}$$

Υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο 0; Παραγωγίσιμη; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.

(**5**) (1.5 Μονάδες) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha>0$ η εξίσωση

$$x^{2013}+\alpha x+1=0$$

έχει *ακριβώς* μία λύση.

(**6**) (2 Μονάδες) Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα:

(**i**) $\int\frac{e^x}{(e^x+1)(e^x+2)}\,dx$.

(**ii**) $\int\log(x^2+1)\,dx$.

(**7**) (1.5 Μονάδες) Έστω $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και $g(x)=\int_0^{x^2}f(t)\,dt$.

(**i**) Υπολογίστε την παράγωγο της g.

(**ii**) Εάν $\int_0^1 f(t)\,dt=2$, δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=1/\sqrt{\xi}$.

Καλή επιτυχία !!