ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό διαγώνισμα-Χειμερινό Εξάμηνο 2011, Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2 μονάδες) Για $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ θεωρούμε συνάρτηση $f_a \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f_a(x) = e^{iax}$.

(**i**) Δείξτε ότι $\hat{f}_a(n) = \frac{(-1)^n \sin(\pi a)}{\pi(a-n)}$ για $n \in \mathbb{Z}$.

(**ii**) Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2}.$$

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $f \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(**i**) Ισχύει πάντα ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$; Ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$;

(**ii**) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\hat{f}(n)|}{n^a} < \infty$ για κάθε $a > 1/2$.

(**3**) (3 μονάδες) Με $\{t\}$ συμβολίζουμε το κλασματικό του t.

(**i**) Εάν α άρρητος, δείξτε ότι η ακολουθία $\{n\alpha\}$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0, 1)$.

(**ii**) Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\{\sqrt{2}\} + \{2\sqrt{2}\} + \cdots + \{n\sqrt{2}\}}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\{\sqrt{2}\}\{2\sqrt{2}\}\cdots\{n\sqrt{2}\}}.$$

(**4**) (2.5 μονάδες) Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

(**i**) Εάν $f \in C^1(\mathbb{R})$, δείξτε ότι $\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$.

(**ii**) Εάν $f \in C^2(\mathbb{R})$, δείξτε ότι $\hat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\, d\xi$.

(**5**) (2.5 μονάδες) Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ συνεχής.

(**i**) Εάν $f * f = 0$, δείξτε ότι $f = 0$.

(**ii**) Εάν $f * f = f$, δείξτε ότι $f = 0$.

Ορολογία: $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx$, $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ εάν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα και υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq C/(1+x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f \in C^k(\mathbb{R})$ εάν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(k)}$ είναι συνεχής.