ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

Τελικό Διαγώνισμα-Εαρινό Εξάμηνο 2011-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια τρεις ώρες με κλειστές όλες τις σημειώσεις.

(**1**) (2 Μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι εάν μία *φραγμένη* συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,1]$ για κάθε $a>0$ τότε είναι ολοκληρώσιμη και στο διάστημα $[0,1]$.

(**ii**) Δώστε παράδειγμα (με απόδειξη) μίας συνάρτησης $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,1]$ για κάθε $a>0$ όμως δεν είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$.

(**2**) (2 Μονάδες) (**i**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $t_n \to 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με τύπο $f_n(x) = f(x+t_n)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$ στο διάστημα $[0,1]$.

(**ii**) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f_t(x) = |f(x+t) - f(x)|$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,1]$ και

$$\lim_{t\to 0} \int_0^1 |f(x+t) - f(x)| \; dx = 0.$$

(**3**) (3 Μονάδες) Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων με τύπο

$$f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \qquad x \in [0,1].$$

(**i**) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $[1/2, 1]$.

(**ii**) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) \; dx = \frac{1}{2}.$$

(**iii**) Συγκλίνει η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) ομοιόμορφα στο διάστημα $[0,1]$;

(**4**) (3 Μονάδες) (**i**) Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

Είναι οι συναρτήσεις που ορίζονται συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους;

(**ii**) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Εκφράστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ ως σειρά, και δείξτε ότι $\int_0^1 f(x)dx \geq 5/4$.

(**5**) (2 Μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία αναπτύσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$. Υποθέτουμε ότι $f(1/n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Καλή επιτυχία !!