ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Παράδοση: Τετάρτη 17 Φεβρουαρίου.

---

(1) (i) Για ποια $z \in \mathbb{C}$ είναι όλες οι τιμές z^i πραγματικές;

(ii) Εάν $z \in \mathbb{C}$ και $\Re(z^n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι το z είναι θετικός πραγματικός.

---

(2) Όπως αναφέραμε στο μάθημα, ο τύπος *Cardano* δίνει ότι ο αριθμός

$$w = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

είναι ρίζα της εξίσωσης $z^3 = 15z + 4$. Δείξτε ότι $w = 4$.

(Με $\sqrt[3]{z}$ εννοούμε τον κύριο κλάδο της $z^{1/3}$.)

---

(3) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\zeta_0 = 1, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ οι νιοστές ρίζες τις μονάδας. Δείξτε ότι

(i) $\zeta_0 + \zeta_1 + \cdots + \zeta_{n-1} = 0$.

(ii) $1 + \zeta_k + \zeta_k^2 + \cdots + \zeta_k^{n-1} = 0$ για $k = 1, \ldots, n-1$.

(iii) $\zeta_0 \cdot \zeta_1 \cdot \ldots \cdot \zeta_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

---

(4) (i) Δείξτε ότι για $\theta \in (0, 2\pi)$ η ακολουθία $(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη.

(ii) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ συγκλίνει για $|z| = 1$, $z \neq 1$, και ότι συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου.

---

(5) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και $f^{(n)}(0) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συμπεράνετε ότι η f δεν μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά γύρω από το 0.

---

(6) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $z_1, \ldots, z_n$ μιγαδικοί αριθμοί. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} |z_i| \leq \max_{I \subset \{1,\ldots,n\}} \Big| \sum_{i \in I} z_i \Big|.$$

Επίσης δείξτε ότι η σταθερά $\frac{1}{\pi}$ δεν μπορεί να βελτιωθεί.

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\Big| \sum_{z_k \in P(\phi)} z_k \Big| \geq \sum_{z_k \in P(\phi)} |z_k| \cos(\phi - \arg z_k)$ όπου $P(\phi)$ είναι το ημιεπίπεδο $\{z \colon \Re(ze^{-i\phi}) \geq 0\}$.
