ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2016
Παράδοση: Δευτέρα 28 Μαρτίου.

---

(1) *(i)* Έστω $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αρμονικές συναρτήσεις οι οποίες συμπτίπτουν σε κάποιο δίσκο. Δείξτε ότι $u = v$.

(ii) Ισχύει το ίδιο αν υποθέσουμε ότι οι u, v συμπίπτουν σε κάποια ευθεία; Σε κάποιο κύκλο;

---

(2) Έστω $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση και ολόμορφη στο D. Υποθέτουμε ότι $|f(z)| = 1$ για $|z| = 1$.

(i) Εάν η f δεν μηδενίζεται στο D, δείξτε ότι μπορεί να επεκταθεί ολόμορφα στο $\mathbb{C}$.
(Το σχεδιάγραμμα της απόδειξης αρκεί.)

(ii) Εάν η f δεν μηδενίζεται στο D, δείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\overline{D}$.

(iii) Εάν η f μηδενίζεται στο D και επεκτείνεται ολόμορφα σε ανοιχτό που περιέχει το $\overline{D}$, δείξτε ότι υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k \in D$ και $\phi \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(z) = e^{i\phi} \cdot \frac{z - a_1}{1 - \overline{a}_1 z} \cdots \frac{z - a_k}{1 - \overline{a}_k z}, \quad z \in \overline{D}.$$

---

(3) *(i)* Ταξινομείστε τις ιδιομορφίες της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z - 2}.$$

(ii) Δείξτε ότι

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{1/z}}{z - 2}\, dz = 2\pi i(1 - \sqrt{e}).$$

---

(4) *(i)* Έστω P, Q πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές ώστε $deg(Q) \geq deg(P) + 2$ και $Q(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} Res_{z_i}(P/Q)$$

όπου $z_1, \ldots, z_k$ οι πόλοι της συνάρτησης P/Q στο άνω ημιεπίπεδο.

(ii) Δείξτε ότι για $n = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^{n+1}}\, dx = \pi\, \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

---

(5) Έστω $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών που συγκλίνει στο 0. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f\colon D(0,1) \setminus \{0, z_1, z_2, \ldots\} \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη και έχει πόλους στα σημεία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Δείξτε ότι το σύνολο τιμών της f σε κάθε περιοχή του 0 είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.

---

(6) Βρείτε όλες τις ολόμορφες $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ για τις οποίες ισχύει $\lim_{z\to\infty} |f(z)| = +\infty$.
