ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

Τελικό Διαγώνισμα-13 Φεβρουαρίου-Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Διάρκεια 5 ώρες.
Καλή επιτυχία!

(**1**) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι το σύνολο $S := \{2^n - 2^m \colon m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$ είναι σύνολο επαναφοράς.

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $Tx = x + \alpha \pmod 1$ άρρητη στροφή στον κύκλο με το μέτρο *Haar* $m_{\mathbb{T}}$ και $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{T}}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$m_{\mathbb{T}}(A \cap T^{-n}A \cap \cdots \cap T^{-kn}A) > 0.99 \cdot m_{\mathbb{T}}(A).$$

Ισχύει το ίδιο για συστήματα *weak mixing*;

(**3**) (2 μονάδες) Έστω $T \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ με τύπο

$$T(x, y) = (x + \alpha, y + 2x + \beta) \pmod 1.$$

(i) Για ποιά $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ εργοδικό; *Weak mixing*;

(ii) Για ποιά $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ είναι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2, T)$ μοναδικά εργοδικό; *Minimal*;

(**4**) (2 μονάδες) (i) Δείξτε ότι εαν το σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι *weak mixing*, τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n^2}A) = (\mu(A))^2.$$

(ii) Δείξτε ότι για κάθε δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και $A, B \in \mathcal{B}$ με θετικό μέτρο έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n^2}A)\mu(B \cap T^{-n^2}B) > 0.$$

Εαν το σύστημα είναι *weak mixing* υπολογίστε την τιμή του ορίου.

(**5**) (1.5 μονάδες) Έστω $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ το σύστημα *Bernoulli* στον $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ και R_α άρρητη στροφή στον κύκλο.

(i) Ποιά είναι η εντροπία των συστημάτων $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$, R_α, και $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) \times R_\alpha$;

(ii) Δείξτε ότι τα συστήματα $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big) \times R_\alpha$ και $\mathcal{B}\big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ είναι εργοδικά, έχουν την ίδια εντροπία, όμως δεν είναι ισόμορφα.

(**6**) (2 μονάδες) (i) Χρησιμοποιώντας το δυναμικό σύστημα του προβλήματος (3) για $\alpha = \beta$ δείξτε ότι εαν α άρρητος, τότε η ακολουθία $(\{n\alpha\}, \{n^2\alpha\})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ισοκατανεμημένη στον $\mathbb{T}^2$.

(ii) Δείξτε ότι εαν α άρρητος, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε το 2014 να διαιρεί τον $[n\alpha] + [n^2\alpha]$.
