ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Παρασκευή 8 Νοεμβρίου.

(**1**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την συνάρτηση $f^{(n)}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+$ με τύπο $f^{(n)}(x) = f(x) + f(x+\alpha) + \cdots + f(x+(n-1)\alpha)$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{T}$ για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|n\alpha\| + \left\|f^{(n)}(x)\right\| \leq \varepsilon$, όπου $\|x\|$ η απόσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο.[1]

(**2**) (1.5 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ σύνολο με $\mu(A) > 0$. Για $x \in X$ ορίζουμε το σύνολο

$$\Lambda_x = \{n \in \mathbb{N}\colon T^n x \in A\}.$$

Δείξτε ότι $\mu(x \in X\colon \bar{d}(\Lambda_x) > 0) > 0$.

(**3**) (1.5 μονάδες) Έστω

$$R = \{n \in \mathbb{N}\colon \{n\sqrt{2}\} \in [1/4, 3/4]\}.$$

Δείξτε ότι $R \cap (m\mathbb{N}) \neq \emptyset$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ όμως το σύνολο R δεν είναι σύνολο επαναφοράς.[2] [3]

(**4**) (1.5 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $f\colon X \to \mathbb{C}$ μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{n\to\infty} f(T^n x) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in X$. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την f;

(**5**) (1.5 μονάδες) Έστω R σύνολο ακεραίων το οποίο περιέχει οσοδήποτε μεγάλες αριθμητικές προόδους που ξεκινούν από το μηδέν (δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n, 2n, \ldots, kn \in \mathbb{N}$). Δείξτε ότι το R είναι σύνολο επαναφοράς.

(**6**) (1.5 μονάδες) Έστω $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = (\log n)^{-1}$ και $\mathbb{P}(\xi_n = 0) = 1 - (\log n)^{-1}$. Δείξτε ότι σχεδόν βέβαια το σύνολο $S(\omega) = \{n \in \mathbb{N}\colon \xi_n(\omega) = 1\}$ είναι σύνολο επαναφοράς.[4]

(**7**) (1.5 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$R = \{r \in \mathbb{N}\colon \mu(A \cap T^{-r}A) > 0\}$$

έχει φραγμένα κενά, δηλαδή, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $R \cap \{i, i+1, \ldots, i+k\} \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

---

[1] Θεωρήστε κατάλληλο δυναμικό σύστημα στον $\mathbb{T}^2$.

[2] Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι για α άρρητο το σύνολο $\{\{n\alpha\}\colon n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$.

[3] Υπενθυμίζω, το R είναι σύνολο επαναφοράς αν για κάθε δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ υπάρχει $r \in R$, $r \neq 0$, ώστε $\mu(A \cap T^{-r}A) > 0$.

[4] Θα δούμε αργότερα ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει εάν πχ $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = \log n/n$.