

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2013

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Τρίτη 26 Νοεμβρίου.

(1) (2 μονάδες) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Ορίζουμε τον $T: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ με τύπο

$$T(x, y) = (x + \alpha, y + f(x)) \pmod{1}.$$

Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ είναι εργοδικό αν και μόνο αν ο α είναι άρρητος και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η συναρτησιακή εξίσωση

$$mf(x) = h(x + \alpha) - h(x) \pmod{1}$$

δεν έχει μετρήσιμη λύση $h: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε ανάπτυγμα της μορφής $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(x) e^{2\pi i k y}$.)

(2) (2 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T^k είναι εργοδικός αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f \in L^\infty(\mu)$ που ικανοποιούν $Tf = \lambda f$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda^k = 1$ είναι σταθερές. (Υπόδειξη: Αποδείξτε το πρώτα για $k = 2$.)

(3) (2 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα, και $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ οικογένεια συνόλων ώστε για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{S}$ ώστε $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(A \cap T^{-n}B) > 0$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{S}$ με θετικό μέτρο. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύστημα είναι εργοδικό;

(4) (2 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα $f \in L^2(\mu)$ και σ_f το αντίστοιχο φασματικό μέτρο¹.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0, 1)$ έχουμε $\sigma_f(\{t\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i n t} \int T^n f \cdot \bar{f} d\mu$.

(ii) Δείξτε ότι $\sigma_f(\{0\}) \geq |\int f d\mu|^2$.

(iii) Δείξτε ότι $\sigma_f(\{0\}) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι ορθογώνια σε όλες τις T -αναλλοιώτες συναρτήσεις.

(5) (2 μονάδες) Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών ακεραίων ώστε:

(i) $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i a_n t} \rightarrow 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(ii) Για κάθε $d \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N}: d|a_n\}$ έχει θετική πυκνότητα.

Δείξτε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία επαναφοράς.²

¹ Δηλαδή θετικό και φραγμένο μέτρο στο $[0, 1]$ ώστε $\int T^n f \cdot \bar{f} d\mu = \int_0^1 e^{2\pi i n t} d\sigma_f(t)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

² Δηλαδή για κάθε δυναμικό σύστημα (X, \mathcal{B}, μ, T) και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ έχουμε $\mu(A \cap T^{-a_n}A) > 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.