

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2013

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Παρασκευή 13 Δεκεμβρίου.

(1) (2 μονάδες) Έστω  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  εργοδικό δυναμικό σύστημα και  $f$  μετρήσιμη συνάρτηση ώστε  $\int_X f^- d\mu < +\infty$  και  $\int_X f^+ d\mu = +\infty$ . Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε  $x \in X$  έχουμε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^n x) = +\infty.$$

(2) (2 μονάδες) Έστω  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  δυναμικό σύστημα,  $f \in L^1(\mu)$ , και  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε  $x \in X$  το όριο

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{in\alpha} f(T^n x)$$

υπάρχει.

(3) (2 μονάδες) Για  $x \in [0, 1)$  έστω  $a_1(x), a_2(x), \dots$  οι συντελεστές στο ανάπτυγμα του  $x$  σε συνεχή κλάσματα. Δείξτε ότι για (Lebesgue) σχεδόν κάθε  $x \in [0, 1)$  ο αρμονικός μέσος όρος της ακολουθίας  $(a_n(x))$ , δηλαδή το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1(x)} + \dots + \frac{1}{a_n(x)}},$$

υπάρχει. Εκφράστε το όριο ως σειρά αριθμών.

(4) (2 μονάδες) Έστω  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  εργοδικό δυναμικό σύστημα και  $A \in \mathcal{B}$  με  $\mu(A) > 0$ . Το εργοδικό θεώρημα δίνει ότι σχεδόν για κάθε  $x \in X$  το σύνολο  $\Lambda_x = \{n \in \mathbb{N} : T^n x \in A\}$  έχει πυκνότητα  $\mu(A)$ . Είναι σωστό ότι σχεδόν για κάθε  $x \in X$  το σύνολο  $\Lambda_x$  έχει φραγμένα κενά;

(5) (3 μονάδες) (i) Έστω  $\alpha$  άρρητος. Δείξτε ότι για κάθε δυναμικό σύστημα  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  και  $f \in L^2(\mu)$  έχουμε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( e^{2\pi i n^2 \alpha} \int \bar{f} \cdot T^n f d\mu \right) = 0.$$

(ii) Χρησιμοποιήστε το (i) για να δείξετε ότι εάν ο  $\alpha$  είναι άρρητος, τότε το

$$R = \{n \in \mathbb{N} : \{n^2 \alpha\} \in [1/2, 3/4]\}$$

είναι σύνολο επαναφοράς.