ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2013
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Παρασκευή 17 Ιανουαρίου.

(**1**) (2 μονάδες) Έστω (X, T) μοναδικά εργοδικό σύστημα και έστω ότι το μοναδικό T-αναλλοίωτο μέτρο μ ικανοποιεί $\mu(U) > 0$ για κάθε μη κενό ανοιχτό U. Δείξτε ότι ο T είναι *minimal*.

(**2**) (2 μονάδες) Δείξτε ότι η ακολουθία

$$(\{n\sqrt{2}\}, \{n^2\sqrt{3}\})$$

είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1]^2$.

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\left|\sqrt{2} - \frac{k}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{και} \quad \left|\sqrt{3} - \frac{\ell}{n^2}\right| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

(**3**) (2 μονάδες) Έστω (X, T) μοναδικά εργοδικό σύστημα και μ το μοναδικό T-αναλλοίωτο μέτρο. Έστω ότι η συνάρτηση $f \in C(X)$ είναι ορθογώνια στον $Kronecker factor$ του συστήματος, δηλαδή είναι ορθογώνια σε όλες τις ιδιοσυναρτήσεις. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n\alpha} f(T^n x) = 0.$$

(Υπόδειξη: vdC)

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $A, B, C \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε

$$\mu(A \cap T^{-n_0}B \cap T^{-2n_0}C) > 0$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}B \cap T^{-2n}C) > 0.$$

(**5**) (3 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε τα 4 πρώτα ψηφία (από τα αριστερά) του αριθμού 2^{n^2} να είναι 2014.

(*ii*) Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή για $n \in \mathbb{N}$ με πυκνότητα 1) ο αριθμός 2^n περιέχει τον αριθμό 7 στο δεκαδικό του ανάπτυγμα. (Μία πολύ γνωστή εικασία του *Erdos* είναι ότι αυτό συμβαίνει για όλα τα αρκούντως μεγάλα $n \in \mathbb{N}$.)
