ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

Τελικό Διαγώνισμα-26 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια 5 ώρες
Καλή επιτυχία!

(**1**) (1.5 μονάδες) Έστω K, Λ υποσύνολα των φυσικών με θετική άνω πυκνότητα. Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\bar{d}(K \cap (K-n)) \cdot \bar{d}(\Lambda \cap (\Lambda - 2n)) > 0$.

(**2**) (1 μονάδα) Εάν το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ είναι *mixing*, δείξτε ότι για κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ έχουμε $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-a_n} A) = 1$.

(**3**) (2 μονάδες) Έστω α άρρητος και $T, S \colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ μετασχηματισμοί με τύπο

$$T(x,y) = (x+\alpha, y+2\alpha) \pmod 1, \quad S(x,y) = (2x, 2y) \pmod 1.$$

(i) Είναι τα τοπολογικά δυναμικά συστήματα $(\mathbb{T}^2, T)$, $(\mathbb{T}^2, S)$ *minimal*; Μοναδικά εργοδικά;

(ii) Είναι τα συστήματα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$, $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{T}^2}, m_{\mathbb{T}^2}, S)$ εργοδικά; *Weak mixing*; Τι εντροπία έχουν;

(**4**) (2.5 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$.

(i) Εάν ο T^2 είναι εργοδικός, δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A \cap T^{-(2n+1)} A) > 0$.

(ii) Εάν T^k εργοδικός για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(A \cap T^{-(n^2+1)} A) > 0$.

(Υποδ. Δείξτε πρώτα ότι $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{n^2} f \to^{L^2(\mu)} \int f \, d\mu$ για κάθε $f \in L^2(\mu)$.)

(iii) Δείξτε ότι τα συμπεράσματα στα (i) και (ii) δεν ισχύουν για όλα τα εργοδικά συστήματα.

(**5**) (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $f \in L^\infty(\mu)$. Ορίζουμε

$$\|f\|_1 = \Big| \int f \, d\mu \Big|, \qquad \|f\|_{k+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left\| T^n f \cdot \bar{f} \right\|_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

εφόσον το όριο υπάρχει.

(i) Εάν ο T είναι *weak mixing* και $\|f\|_1 = 0$, δείξτε ότι $\|f\|_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(ii) Εάν ο T δίνεται από άρρητη στροφή στον κύκλο και $\|f\|_2 = 0$, δείξτε ότι $f = 0$.

(**6**) (2 μονάδες) Για $x, y \in [0,1)$ με δυαδικό ανάπτυγμα $x = 0.x_1x_2\ldots$ και τριαδικό ανάπτυγμα $y = 0.y_1y_2\ldots$ ορίζουμε το σύνολο $\Lambda_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} \colon x_{2017n} = y_{2018n}\}$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $(x,y) \in [0,1) \times [0,1)$ το σύνολο $\Lambda_{x,y}$ έχει θετική πυκνότητα και υπολογίστε την.
