ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Τρίτη 10 Οκτωβρίου.

(**1**) (1.5 μονάδες) Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ χώρος πιθανότητας όπου $d\mu = \frac{1}{\pi}\frac{1}{x^2+1}\, dx$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $Tx = \frac{1}{2}\big(x - \frac{1}{x}\big)$ για $x \neq 0$ διατηρεί το μέτρο μ.

(**2**) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $T\colon [0,1]^2 \to [0,1]^2$ με τύπο

$$T(x,y) = \begin{cases} \big(2x, \frac{y}{2}\big) & 0 \leq x < 1/2 \\ \big(2x-1, \frac{y+1}{2}\big) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

διατηρεί τον περιορισμό του μέτρου *Lebesgue* στο $[0,1] \times [0,1]$.

(**3**) (1.5 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και σύνολο $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ ώστε $T^{-1}A = A$. Δείξτε ότι και η τετράδα $(A, \mathcal{B}_A, \mu_A, T_A)$ όπου $\mathcal{B}_A = \{B \cap A, B \in \mathcal{B}\}$, T_A ο περιορισμός του T στο A, και $\mu_A(B) = \mu(B \cap A)/\mu(A)$ για $B \in \mathcal{B}_A$, είναι δυναμικό σύστημα.

(**4**) (1.5 μονάδες) Έστω $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T\colon [0,1] \to [0,1]$ μετασχηματισμός ώστε $T^{-1}I \in \mathcal{B}_{[0,1]}$ και $\mu(T^{-1}I) = \mu(I)$ για κάθε δυαδικό διάστημα $I \subset [0,1]$ (δηλαδή διάστημα με άκρα της μορφής $m/2^n$). Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T διατηρεί το μέτρο μ.

(**5**) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι υπάρχει άρρητος αριθμός $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\varepsilon \leq \{2^n\alpha\} \leq 1-\varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ($\{x\} = x - [x]$).

(**6**) (1.5 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $f \in L^1(\mu)$ συνάρτηση ώστε σχεδόν για κάθε $x \in X$ να έχουμε $f(Tx) \leq f(x)$. Δείξτε ότι $f(Tx) = f(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in X$.

(**7**) (1.5 μονάδες) Έστω $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι μετασχηματισμοί $x \mapsto nx \pmod 1$ διατηρούν το συνεχές μέτρο μ. Δείξτε ότι το μ είναι το μέτρο *Haar* $m_{\mathbb{T}}$ στον $\mathbb{T}$.[1] (*Υπόδειξη.* Αρκεί να δ.ο. $\int e^{2\pi ikt} d\mu = \int e^{2\pi ikt} dm_{\mathbb{T}}$ για $k \in \mathbb{Z}$.)

---

[1] Ένα πολύ δημοφιλές ανοιχτό ερώτημα είναι αν το συμπέρασμα ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι οι δύο μετασχηματισμοί $x \mapsto 2x \pmod 1$ και $x \mapsto 3x \pmod 1$ διατηρούν το συνεχές μέτρο μ.