ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Τρίτη 7 Νοεμβρίου.

(**1**) (2 μονάδες) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Ορίζουμε τον $T\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ με τύπο

$$T(x,y) = (x+\alpha, y+f(x)) \pmod 1.$$

Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ είναι εργοδικό αν και μόνο αν ο α είναι άρρητος *και* για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η συναρτησιακή εξίσωση

$$mf(x) = h(x+\alpha) - h(x) \pmod 1$$

δεν έχει μετρήσιμη λύση $h\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$.

(Υπόδειξη: Θεωρήστε ανάπτυγμα της μορφής $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k(x)e^{2\pi iky}$.)

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T^k είναι εργοδικός αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις $f \in L^\infty(\mu)$ που ικανοποιούν $Tf = \lambda f$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda^k = 1$ είναι σταθερές. (Υπόδειξη: Αποδείξτε το πρώτα για $k = 2$.)

(**3**) (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα, και $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ οικογένεια συνόλων ώστε για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{S}$ ώστε $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(A \cap T^{-n}B) > 0$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{S}$ με θετικό μέτρο. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύστημα είναι εργοδικό;

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα $f \in L^2(\mu)$ και σ_f το αντίστοιχο φασματικό μέτρο[1].

(*i*) Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0,1)$ έχουμε $\sigma_f(\{t\}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{-2\pi int} \int T^n f \cdot \bar{f}\, d\mu$.

(*ii*) Δείξτε ότι $\sigma_f(\{0\}) \geq |\int f\, d\mu|^2$.

(*iii*) Δείξτε ότι $\sigma_f(\{0\}) = 0$ αν και μόνο αν η f είναι ορθογώνια σε όλες τις T-αναλλοίωτες συναρτήσεις.

(**5**) (3 μονάδες) Έστω Λ υποσύνολο των φυσικών.

(*i*) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\bar{d}(\Lambda \cap (\Lambda - n)) \geq \bar{d}(\Lambda)^2 - \varepsilon$.

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\bar{d}(\Lambda \cap (\Lambda - n^2)) \geq \bar{d}(\Lambda)^2 - \varepsilon$.

---

[1] Δηλαδή θετικό και φραγμένο μέτρο στο $[0,1]$ ώστε $\int T^n f \cdot \bar{f}\, d\mu = \int_0^1 e^{2\pi int}\, d\sigma_f(t)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.