

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2017

Παρακαλώ να μου παραδώσετε τις λύσεις σας την Τρίτη 19 Δεκεμβρίου.

(1) (2 μονάδες) Θεωρούμε τα δυναμικά συστήματα $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_{\mathbb{T}}, m_{\mathbb{T}}, T_i)$ όπου $T_1x = 2x \pmod{1}$, $T_2x = 2x + \sqrt{2} \pmod{1}$, $T_3x = 3x \pmod{1}$. Και τα τρία συστήματα είναι *weak mixing* (δείξτε πχ ότι το δεύτερο είναι). Εξετάστε ποια είναι ισόμορφα.

(2) (2 μονάδες) Δείξτε ότι η ακολουθία

$$(\{n\sqrt{2}\}, \{n^2\sqrt{3}\})$$

είναι ισοκατανεμημένη στο $[0, 1]^2$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\left| \sqrt{2} - \frac{k}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{και} \quad \left| \sqrt{3} - \frac{\ell}{n^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

(3) (2 μονάδες) Έστω (X, T) μοναδικά εργοδικό σύστημα και μ το μοναδικό T -αναλλοίωτο μέτρο. Έστω ότι η συνάρτηση $f \in C(X)$ είναι ορθογώνια στον *Kronecker factor* του συστήματος, δηλαδή είναι ορθογώνια σε όλες τις ιδιοσυναρτήσεις. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i n \alpha} f(T^n x) = 0.$$

(Υπόδειξη: vdC)

(4) (2 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) δυναμικό σύστημα και $A, B, C \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε

$$\mu(A \cap T^{-n_0} B \cap T^{-2n_0} C) > 0$$

για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu(A \cap T^{-n} B \cap T^{-2n} C) > 0.$$

(5) (3 μονάδες) (i) Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε τα 4 πρώτα ψηφία (από τα αριστερά) του αριθμού 2^{n^2} να είναι 2017.

(ii) Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή για $n \in \mathbb{N}$ με πυκνότητα 1) ο αριθμός 2^n περιέχει τον αριθμό 1 (ή οποιονδήποτε άλλο αριθμό) στο δεκαδικό του ανάπτυγμα. (Μία πολύ γνωστή εικασία του *Erdos* είναι ότι αυτό συμβαίνει για όλα τα αρκούντως μεγάλα $n \in \mathbb{N}$.)