ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-8 Δεκεμβρίου-Χειμερινό Εξάμηνο 2017
Διάρκεια 4 ώρες
Καλή επιτυχία!

(**1**) (i) Έστω $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ και $(Y,\mathcal{D},\nu,S)$ δυναμικά συστήματα και $A\in\mathcal{X}$, $B\in\mathcal{D}$ με $\mu(A)>0$ $\nu(B)>0$. Δείξτε ότι υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $\mu(A\cap T^{-n}A)>0$ και $\nu(B\cap S^{-n}B)>0$.

(ii) Τι μπορείτε να συμπεράνετε για υποσύνολα των φυσικών με θετική πυκνότητα;

(**2**) (i) Δείξτε ότι το δυναμικό σύστημα $(\mathbb{T}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{T}^2},m_{\mathbb{T}^2},T)$ όπου

$$T(x,y)=(x+\alpha,y+2x+\alpha)\pmod 1$$

και $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ είναι εργοδικό. (Υπ. $f(x,y)\sim\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}a_{m,n}\,e(mx+ny)$ με $\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}|a_{m,n}|^2<\infty$.)

(ii) Έστω $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Δείξτε ότι για κάθε $f\in L^1(m_{\mathbb{T}})$ και σχεδόν για κάθε $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f(y+nx+n^2\alpha)=\int f\,dm_{\mathbb{T}}.$$

(**3**) (i) Έστω $Tx=x+\alpha\,(\mathrm{mod}\ 1)$ όπου $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Ισχύει για κάθε $f,g,h\in L^\infty(\mu)$ ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int f\cdot T^n g\cdot T^{2n}h\,dx=\int f\,dx\int g\,dx\int h\,dx\,;$$

(ii) Έστω $Sx=2x\,(\mathrm{mod}\ 1)$. Δείξτε ότι για κάθε $f,g,h\in L^\infty(\mu)$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int f\cdot S^n g\cdot S^{2n}h\,dx=\int f\,dx\int g\,dx\int h\,dx.$$

(**4**) Έστω $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ εργοδικό δυναμικό σύστημα και $f\in L^2(\mu)$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x\in X$ το διπλό όριο

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}f(T^{m+n}x)\cdot\overline{f(T^m x)}$$

υπάρχει και είναι μη αρνητικός πραγματικός.

Προσπαθήστε επίσης να δείξετε το ίδιο χωρίς την υπόθεση εργοδικότητας.

(**5**) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία φυσικών ώστε $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}e(a_n t)=0$ για κάθε $t\in(0,1)$.

(i) Δείξτε ότι για κάθε εργοδικό δυναμικό σύστημα $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ και $f\in L^2(\mu)$ έχουμε

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T^{a_n}f\to^{L^2(\mu)}\int f\,d\mu.$$

(ii) Δείξτε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι καλή για επαναφορά.
