Εισαγωγή στην Εργοδική Θεωρία

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2024

(**1**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{B}_0$ άλγεβρα υποσυνόλων του X η οποία παράγει την $\mathcal{B}$. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A_0 \in \mathcal{B}_0$ ώστε $\mu(A \triangle A_0) \leq \varepsilon$.

(**2**) Έστω $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ όπου $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *Borel*-μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_i(x + k) = f_i(x) \pmod 1$, $i = 1, 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^2$. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $T\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ με τύπο $Tx = f(x) \pmod 1$ είναι καλά ορισμένος και *Borel*-μετρήσιμος.

(Για το μετρήσιμο, ισοδύναμα, δείξτε ότι ο $T\colon [0, 1)^2 \to [0, 1)^2$ με τύπο $Tx = (\{f_1(x)\}, \{f_2(x)\})$ είναι *Borel*-μετρήσιμος.)

(**3**) (**i**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T, S\colon X \to X$ μετρήσιμοι μετασχηματισμοί που διατηρούν το μέτρο μ. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $T \circ S\colon X \to X$ είναι επίσης μετρήσιμος και διατηρεί το μέτρο μ.

(**ii**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και σύνολο $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ ώστε $T^{-1}A = A$. Δείξτε ότι και η τετράδα $(A, \mathcal{B}_A, \mu_A, T_A)$ όπου $\mathcal{B}_A = \{B \cap A, B \in \mathcal{B}\}$, T_A ο περιορισμός του T στο A, και $\mu_A(B) = \mu(B \cap A)/\mu(A)$ για $B \in \mathcal{B}_A$, είναι δυναμικό σύστημα.

(**4**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα και $f \in L^\infty(\mu)$ τέτοια ώστε $f(Tx) = f(x)$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g\colon X \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $g(x) = f(x)$ σχεδόν παντού και $g(Tx) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

(**5**) Έστω μ, ν *Borel*-μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{T}$ (ή στο $[0, 1)$ αν προτιμάτε).

(**i**) Εάν $\int f\, d\mu = \int f\, d\nu$ για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$, δείξτε ότι $\mu = \nu$ (δηλαδή $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε *Borel* υποσύνολο A του $\mathbb{T}$).

(**ii**) Εάν $\int e^{2\pi ikt} d\mu = \int e^{2\pi ikt} d\nu$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι $\mu = \nu$.

(**6**) Έστω $(\mathbb{T}, \mathcal{B}_\mathbb{T}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και μ συνεχές μέτρο, δηλαδή, $\mu(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{T}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ οι μετασχηματισμοί $x \mapsto nx \pmod 1$ διατηρούν το μέτρο μ. Δείξτε ότι το $\mu = m_\mathbb{T}$.[1]

---

[1] Ένα πολύ δημοφιλές ανοιχτό ερώτημα, το οποίο έχουν προσπαθήσει να λύσουν στρατιές μαθηματικών τις τελευταίες δεκαετίες, είναι αν το συμπέρασμα ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι οι δύο μετασχηματισμοί $x \mapsto 2x \pmod 1$ και $x \mapsto 3x \pmod 1$ διατηρούν το συνεχές μέτρο μ.