Εισαγωγή στην Εργοδική Θεωρία

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2024

(**1**) (*i*) Δείξτε ότι για υπεραριθμήσιμα το πλήθος $x \in [0,1]$ η ακολουθία $(2^n x)$ **δεν** είναι πυκνή (mod 1) στο $[0,1)$.

(*ii*) Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ η ακολουθία $(2^n x)$ είναι ισοκατανεμημένη (mod 1).

(*iii*) Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x, y \in [0,1]$ η ακολουθία $(2^n x, 2^n y)$ είναι ισοκατανεμημένη (mod 1).

(**2**) Για $x \in [0,1)$ έστω $a_1(x), a_2(x), \dots$ οι συντελεστές στο ανάπτυγμα του x σε συνεχή κλάσματα. Δείξτε ότι για (*Lebesgue*) σχεδόν κάθε $x \in [0,1)$ ο αρμονικός μέσος όρος της ακολουθίας $(a_n(x))$, δηλαδή το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1(x)} + \ldots + \frac{1}{a_n(x)}},$$

υπάρχει. Εκφράστε το όριο ως σειρά αριθμών.

(**3**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ *εργοδικό* δυναμικό σύστημα και f μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\int_X f^- d\mu < +\infty$ και $\int_X f^+ d\mu = +\infty$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n x) = +\infty.$$

(**4**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ εργοδικό δυναμικό σύστημα και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$. Το εργοδικό θεώρημα δίνει ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\Lambda_x = \{n \in \mathbb{N} \colon T^n x \in A\}$ έχει πυκνότητα $\mu(A)$. Είναι σωστό ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ το σύνολο Λ_x έχει φραγμένα κενά;

(**5**) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ δυναμικό σύστημα, $f \in L^1(\mu)$, και $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in X$ το παρακάτω όριο υπάρχει

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{in\alpha} f(T^n x).$$

(**6**) (*i*) Έστω α άρρητος. Δείξτε ότι για κάθε δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ και $f \in L^2(\mu)$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left(e^{2\pi i n^2 \alpha} \int \bar{f} \cdot T^n f \, d\mu \right) = 0.$$

(*ii*) Χρησιμοποιήστε το (*i*) για να δείξετε ότι εάν ο α είναι άρρητος, τότε το σύνολο

$$R = \left\{ n \in \mathbb{N} \colon \{n^2 \alpha\} \in [1/2, 3/4] \right\}$$

είναι σύνολο επαναφοράς.
