

ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Πρόοδος-Εαρινό Εξάμηνο 2024

Επιτρέπεται μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(1) (5 μονάδες) Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $T: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ με τύπο

$$T(x, y) = (kx + \alpha, ly + \beta) \pmod{1}.$$

- (i) Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός T είναι *Borel*-μετρήσιμος και διατηρεί το μέτρο $m_{\mathbb{T}^2}$.
- (ii) Δείξτε ότι εάν $k = l = 1$ και $\alpha = -\beta$, το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ **δεν** είναι εργοδικό.
- (iii) Δείξτε ότι εάν $k = -1$ και $\alpha = 0$, το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ **δεν** είναι εργοδικό.
- (iv) Δείξτε ότι εάν $k = l = 2$, το δυναμικό σύστημα $(X, \mathcal{B}, m_{\mathbb{T}^2}, T)$ είναι εργοδικό.
- (v) Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x, y \in [0, 1]$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\{2^n x\} \in [1/3, 1/2)$ και $\{2^n y\} \in [1/5, 1/4)$.
-

(2) (2 μονάδες) (i) Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu, T), (Y, \mathcal{D}, \nu, S)$ δυναμικά συστήματα και $A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{D}$ με $\mu(A) \cdot \nu(B) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(A \cap T^{-n}A) \cdot \nu(B \cap S^{-n}B) > 0.$$

(ii) Έστω $K, \Lambda \subset \mathbb{N}$ με $\bar{d}(K) \cdot \bar{d}(\Lambda) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\bar{d}(K \cap (K - n)) \cdot \bar{d}(\Lambda \cap (\Lambda - 2024n)) > 0.$$

(3) (2 μονάδες) Έστω (X, \mathcal{B}, μ, T) εργοδικό δυναμικό σύστημα και $f \in L^\infty(\mu)$ η οποία παίρνει πραγματικές τιμές.

- (i) Εάν $f(Tx) \geq f(x)$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.
- (ii) Εάν $f(T^2x) + f(x) \geq 2f(Tx)$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι η f είναι σταθερή σχεδόν παντού.
-

(4) (2 μονάδες) Έστω $\mathbb{N} = A \cup B$ διαμέριση των φυσικών. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα σύνολα A, B είναι σύνολο επαναφοράς.
