ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό Διαγώνισμα-Ιούνιος 2014-Διδάσκων:Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια τρεις ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2 Μονάδες) (**i**) Έστω $T\colon \ell_\infty \to C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ τελεστής με τύπο

$$T((\xi_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x^k.$$

Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(Θεωρούμε την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στους αντίστοιχους χώρους.)

(**ii**) Έστω $T\colon C^1[0,1] \to C[0,1]$ τελεστής με τύπο

$$Tf = f'.$$

Δείξτε ότι ο T *δεν* είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(**2**) (3 Μονάδες) Έστω $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$,...

(**i**) Είναι η ακολουθία (e_n) βάση *Hamel* του c_0;

(**ii**) Δείξτε ότι η ακολουθία (e_n) είναι βάση *Schauder* του c_0.

(**iii**) Δείξτε ότι για κάθε $f \in (c_0)^*$ υπάρχει $(a_n) \in l_1$ ώστε $f((\xi_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$.

(**iv**) Δείξτε ότι για κάθε $f \in (c_0)^*$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0$.

(**3**) (2.5 Μονάδες) Έστω $(b_n) \in \ell_\infty$ και (u_n) ορθοκανονική ακολουθία σε χώρο *Hilbert* H.

(**i**) Δείξτε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνει.

(**ii**) Δείξτε ότι για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, u_n\rangle u_n$ συγκλίνει και ορίζει έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $T\colon H \to H$ με τύπο $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x, u_n\rangle u_n$.

(**4**) (2 Μονάδες) (**i**) Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $f_n\colon \ell^2 \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές με τύπο $f_n((\xi_k)) = a_1\xi_1 + \cdots + a_n\xi_n$. Δείξτε ότι το f_n είναι φραγμένο και $\|f_n\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$.

(**ii**) Έστω (a_k) φραγμένη ακολουθία πραγματικών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$ συγκλίνει για κάθε $(\xi_k) \in \ell_2$. Δείξτε ότι $(a_k) \in \ell_2$.

(**5**) (2 Μονάδες) Έστω X γραμμικός χώρος και $x_0, y_0 \in X$.

(**i**) Αν $f(x_0) = f(y_0)$ για κάθε $f \in X^*$, δείξτε ότι $x_0 = y_0$.

(**ii**) Αν τα x_0, y_0 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δείξτε ότι για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ υπάρχει $f \in X^*$ ώστε $f(x_0) = a$ και $f(y_0) = b$.
