Συναρτησιακή Ανάλυση

Διαγώνισμα Εξεταστικής Ιουνίου 2021
Διάρκεια 2.5 ώρες. Καλή επιτυχία!

(**1**) (2 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι ο c_{00} είναι πυκνός, όχι όμως κλειστός υπόχωρος του $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

(*ii*) Υπάρχει πλήρης νόρμα $\|\cdot\|$ στον ℓ_∞ ώστε ο c_{00} να είναι κλειστός υπόχωρος του $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$;

(**2**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει μη κενό διάστημα (a, b) και $M > 0$ ώστε:

(*i*) Για κάθε $x \in (a, b)$ υπάρχουν $x_n \in (a, b) \setminus \{x\}$ με $x_n \to x$ και $|f(x_n)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) Ισχύει ότι $|f(x)| \leq M$ για όλα τα x σε ένα πυκνό υποσύνολο του (a, b).

(**3**) (2 μονάδες) Έστω X ο χώρος όλων των πολυωνύμων $p\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ και X_n ο χώρος των πολυωνύμων $p\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ βαθμού το πολύ n.

(*i*) Δείξτε ότι το γραμμικό συναρτησοειδές με τύπο $F(p) = p(1) - p'(1)$ είναι φραγμένο στο χώρο $(X_n, \|\cdot\|_\infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, **δεν** είναι όμως φραγμένο στο χώρο $(X, \|\cdot\|_\infty)$.

(*ii*) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon (X, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(p) = p(1) - p'(1)$ για κάθε $p \in X_n$.

(**4**) (3 μονάδες) Έστω H χώρος *Hilbert*, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική βάση, και $T\colon H \to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$.

(*i*) Δείξτε ότι η παρακάτω σειρά συγκλίνει και έχουμε

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, Te_n, \quad x \in H.$$

(*ii*) Για $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τους τελεστές $T_N\colon H \to H$ με τύπο

$$T_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \, Te_n, \quad x \in H.$$

Δείξτε ότι $\lim_{N\to\infty} \|T - T_N\| = 0$.

(*iii*) Δείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο *Hilbert* υπάρχει **μη** φραγμένος γραμμικός τελεστής και ορθοκανονική βάση $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty$.

(**5**) (2 μονάδες) (*i*) Δείξτε ότι υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ ώστε

$$F(x) \leq -\liminf_{n\to\infty}(x_n)$$

για κάθε $x = (x_n) \in \ell_\infty$.

(*ii*) Δείξτε ότι **δεν** υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ ώστε

$$F(x) \leq \liminf_{n\to\infty}(x_n)$$

για κάθε $x = (x_n) \in \ell_\infty$.
