

Συναρτησιακή Ανάλυση

Διαγώνισμα Εξεταστικής Σεπτεμβρίου 2021

Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!

(1) (1.5 μονάδες) Δείξτε ότι ένας πλήρης μετρικός χώρος χωρίς μεμονωμένα στοιχεία έχει υπεραριθμίσια το πλήθος στοιχεία.

(2) (3 μονάδες) (i) Δώστε παράδειγμα μη τετριμμένου γραμμικού χώρου στον οποίο όλες οι νόρμες είναι πλήρεις.

(ii) Δώστε παράδειγμα γραμμικού χώρου στον οποίο καμία νόρμα δεν είναι πλήρης.

(iii) Δώστε παράδειγμα γραμμικού χώρου ο οποίος έχει πλήρη και μη πλήρη νόρμα.

(3) (2 μονάδες) Έστω $T: (C[0, 1], \|\cdot\|_2) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_2)$ γραμμικός τελεστής με τύπο

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

(i) Δείξτε ότι ο T είναι ένα προς ένα και ότι δεν είναι επί.

(ii) Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος και $\|T\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) (2.5 μονάδες) Έστω H χώρος Hilbert και E ορθοκανονικό σύνολο.

(i) Δείξτε ότι το E είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.

(ii) Εάν το E είναι πεπερασμένο, δείξτε ότι το σύνολο $Y = \text{span}(E)$ είναι κλειστό.

(iii) Εάν το E είναι άπειρο, δείξτε ότι το σύνολο $Y = \text{span}(E)$ **δεν** είναι κλειστό.

(5) (2 μονάδες) (i) Δώστε παράδειγμα **μη** φραγμένου γραμμικού συναρτησοειδούς στον $\ell_2(\mathbb{N})$.

(ii) Έστω $f: \ell_\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, τέτοιο ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ με μη αρνητικούς όρους. Δείξτε ότι το f είναι φραγμένο.
