ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2015
Παράδοση: Τρίτη 24 Μαρτίου.

(**1**) Δείξτε ότι ο δυικός χώρος $(c_0)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_1.

(**2**) (i) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι υπάρχει **μη** φραγμένος γραμμικός τελεστής $T\colon X \to X$ ο οποίος είναι $1-1$ και επί.

(ii) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ απειροδιάστατος χώρος *Banach*. Δείξτε ότι υπάρχει πλήρης νόρμα στον χώρο X η οποία δεν είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.

(Υπόδειξη: $\|x\|' = \|Tx\|$, T όπως στο (i).)

(**3**) Δώστε μία δεύτερη απόδειξη του ερωτήματος 5 (i) του φυλλαδίου 2 χρησιμοποιώντας την αρχή ομοιόμορφου φράγματος. (Υπόδειξη: Για $k \in \mathbb{N}$ ορίστε $T_k x = \xi_k$, όπου $x = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$.)

(**4**) Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σε χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(x_n)| < \infty$$

για κάθε $F \in X^*$. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά C ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F(x_n)| \leq C\,\|F\|$$

για κάθε $F \in X^*$. (Υπόδειξη: Για $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{\pm 1\}$, ορίστε $T_{m,\varepsilon_i} F = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n F(x_n)$.)

(**5**) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος *Banach* και $T\colon X \to X$ φραγμένος τελεστής ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\| < \infty$ ($T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$). Για $y \in X$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό $S_y(x) = y + Tx$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ ώστε $S_y(x_0) = x_0$.

(Υπόδειξη: Για την ύπαρξη θεωρείστε το $x_0 = y + \sum_{n=1}^{\infty} T^n x$ για κατάλληλο x.)

(**6**) Έστω $K \in [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $M = \|K\|_\infty$. Ορίζουμε τον τελεστή $T\colon C[0,1] \to C[0,1]$ με τύπο

$$(Tf)(t) = \int_0^t K(s,t) f(s)\,ds, \quad t \in [0,1],$$

όπου $f \in C[0,1]$. (Πάρτε ως δεδομένο ότι $Tf \in C[0,1]$.)

(i) Για $n = 1, 2, \dots$ δείξτε ότι ο τελεστής T^n είναι φραγμένος και $\|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$.

(Υπόδειξη: Δείξτε επαγωγικά ότι $|(T^n f)(t)| \leq \frac{M^n}{n!} \|f\|_\infty t^n$ για κάθε $t \in [0,1]$.)

(ii) Αν $g \in C[0,1]$ δείξτε ότι υπάρχει μοναδική $f \in C[0,1]$ ώστε $f(t) = g(t) + \int_0^t K(s,t) f(s)\,ds$ για κάθε $t \in [0,1]$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε την άσκηση 5 για κατάλληλο τελεστή.)
