ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2015
Παράδοση: Τρίτη 12 Μαΐου.

(**1**) Έστω X γραμμικός χώρος με νόρμα $\|\cdot\|$ η οποία ικανοποιεί τον κανόνα παραλληλογράμμου. Δείξτε ότι η νόρμα προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή, υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$ για κάθε $x\in X$.

(Υπόδειξη: Ορίστε $\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$. Αρχικά δείξτε ότι $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$. Έπειτα δείξτε ότι $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$ για λ ακέραιο, ρητό, και τέλος πραγματικό.)

(**2**) Έστω X γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\{e_i, i\in I\}$ ορθοκανονικό σύνολο. Δείξτε ότι για κάθε $x\in X$ το σύνολο $\{i\in I\colon \langle x,e_i\rangle\neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

(**3**) Έστω H χώρος *Hilbert* και K κυρτό και κλειστό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι για κάθε $x\in X$ υπάρχει μοναδικό $y\in K$ ώστε $\|x-y\|=d(x,K)$. Ισχύει υποχρεωτικά ότι $x-y\perp K$;

(**4**) Έστω X γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική βάση του X. Δείξτε ότι για κάθε $x,y\in X$ έχουμε ότι

$$\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_n\rangle\,\langle y,e_n\rangle.$$

(**5**) Έστω H χώρος *Hilbert* και $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορθοκανονική ακολουθία.

(**i**) Εάν $\langle w,v_n\rangle=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ συνεπάγεται ότι $w=0$, να δειχθεί ότι η $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, είναι ορθοκανονική βάση του H (δηλαδή η γραμμική θήκη των v_n είναι πυκνή στον H).

(**ii**) Εάν η $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση του H και

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n-v_n\|^2<1$$

να δειχθεί ότι και η $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ορθοκανονική βάση του H.

(**6**) Έστω H χώρος *Hilbert* και $T\colon H\to H$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T\|\leq 1$. Δείξτε ότι για κάθε $v\in H$ έχουμε

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}T^n v=Pv$$

όπου P η ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο $I=\{v\in H\colon Tv=v\}$
