ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Εαρινό Εξάμηνο 2015
Παράδοση: Τετάρτη 17 Ιουνίου.

(**1**) Έστω μ το μέτρο *Lebesgue* στο $[0,1]$ και $Y = \{f \in L^1(\mu)\colon \int_0^1 x f(x)\, dx = 0\}$.

(i) Δείξτε ότι ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του $L^1(\mu)$.

(ii) Δείξτε ότι $\|f - 1\|_{L^1(\mu)} > \frac{1}{2}$ για κάθε $f \in Y$.

(iii) Δείξτε ότι $d(1, Y) = \frac{1}{2}$.

(*Υπόδειξη.* $f_n = 1 - \frac{n^2}{2n-1} \cdot \mathbf{1}_{[1-\frac{1}{n},1]}$)

(**2**) (i) Έστω $f_n \in C[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f_n \to^w 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ και $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(ii) Έστω $x_n = (\xi_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $x_n \to^w 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_2 < \infty$ και $\xi_{nk} \to 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

(**3**) Έστω X χώρος με νόρμα και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία *Cauchy* ώστε $x_n \to^w 0$. Δείξτε ότι $\|x_n\| \to 0$.

(**4**) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι η απεικόνιση $x \mapsto \|x\|$ δεν είναι w-συνεχής σε κανένα σημείο του X.

(**5**) (i) Δείξτε ότι $ex(B_{\ell_2}) = \{x \in \ell_2 \colon \|x\|_2 = 1\}$.

(ii) Δείξτε ότι $ex(B_{\ell_1}) = \{e_n, -e_n, n \in \mathbb{N}\}$.

(iii) Τι αναπαράσταση παίρνουμε εφαρμόζοντας την ολοκληρωτική μορφή του θεωρήματος *Krein-Milman* στους χώρους ℓ_1 και ℓ_2;

(**6**) Έστω λ το μέτρο *Lebesgue* στο $[0,1]$.

(i) Δείξτε ότι

$$\mu_n = \frac{\delta_0 + \delta_{\frac{1}{n}} + \cdots + \delta_{\frac{n-1}{n}}}{n} \to^{w^*} \lambda.$$

(ii) Αν α άρρητος δείξτε ότι ($\{t\}$ είναι το κλασματικό μέρος του t)

$$\nu_n = \frac{\delta_0 + \delta_{\{\alpha\}} + \cdots + \delta_{\{(n-1)\alpha\}}}{n} \to^{w^*} \lambda.$$

(iii) Δείξτε ότι οι ακολουθίες $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχουν ασθενώς συγκλίνουσες υποακολουθίες.
