ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

Τελικό-Εαρινό εξάμηνο 2022

Διάρκεια 5 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2 Μονάδες) Έστω Y γραμμικός υπόχωρος του $L^\infty[0,1]$ ο οποίος είναι κλειστός με την $L^2[0,1]$-νόρμα. Δείξτε ότι

(i) Υπάρχει $C>0$ τέτοιο ώστε $\|f\|_{L^\infty[0,1]} \leq C\,\|f\|_{L^2[0,1]}$ για κάθε $f \in Y$.

(ii) Ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης.

Υπόδειξη: Εαν $f_1,\ldots,f_n$ ορθοκανονικό σύνολο στον Y, δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει ότι $(f_1(x))^2+\cdots+(f_n(x))^2 \leq C\sqrt{(f_1(x))^2+\cdots+(f_n(x))^2}$

(**2**) (3 Μονάδες) Έστω $(a_{i,j})$ ακολουθία πραγματικών τέτοια ώστε $\sum_{i,j\in\mathbb{N}}|a_{i,j}|^2<\infty$. Ορίζουμε το γραμμικό τελεστή $T\colon \ell^2(\mathbb{N})\to\ell^2(\mathbb{N})$ με τύπο

$$(Tx)_i=\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\,x_j,\quad i\in\mathbb{N},$$

για $x:=(x_j)_{j\in\mathbb{N}}\in\ell^2(\mathbb{N})$. Δείξτε ότι

(i) Η ακολουθία $a_{i,j}:=\frac{1}{(i+j)^2}$, $i,j\in\mathbb{N}$, ικανοποιεί την υπόθεση.

(ii) Ο T είναι φραγμένος και δώστε ένα άνω φράγμα για τη νόρμα του.

(iii) Ο T είναι συμπαγής.

(**3**) (2 Μονάδες) Έστω $(X,\|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα.

(i) Δείξτε ότι για κάθε $x\in X$ υπάρχει $f\in X^*$ τέτοιο ώστε $\|f\|=1$ και $f(x)=\|x\|$.

(ii) Εαν η ακολουθία (x_n) είναι $\|\cdot\|$-*Cauchy* και $x_n\to^w 0$, δείξτε ότι $x_n\to^{\|\cdot\|}0$.

(**4**) (2 Μονάδες) (i) Έστω (f_n) ακολουθία στον $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$. Δείξτε ότι $f_n\to^w 0$ αν και μόνο αν $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty<+\infty$ και $f_n(x)\to 0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

(ii) Εαν T συμπαγής τελεστής στον χώρο *Hilbert* H και $x_n\to^w 0$, δείξτε ότι $\|Tx_n\|\to 0$.

(**5**) (2 Μονάδες) (i) Δείξτε ότι τα ακραία σημεία της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ είναι οι σταθερές συναρήσεις $f=1$ και $f=-1$.

(ii) Δείξτε ότι ο $(C[0,1],\|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με το δυικό χώρο κάποιου χώρου με νόρμα. ($f\in C[0,1]$ εάν $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.)
