

(1) (i) Έστω  $T: \ell_\infty \rightarrow C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  τελεστής με τύπο

$$T((\xi_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k x^k.$$

Δείξτε ότι ο  $T$  είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(Θεωρούμε την νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  στους αντίστοιχους χώρους.)

(ii) Έστω  $T: C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  τελεστής με τύπο

$$Tf = f'.$$

Δείξτε ότι ο  $T$  δεν είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(Θεωρούμε την νόρμα  $\|\cdot\|_\infty$  στους αντίστοιχους χώρους.)

---

(2) Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο  $C[0, 1]$  με νόρμα  $\|f\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ . Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές  $F: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ως εξής

$$F(f) = \int_0^1 t \cdot f(t) dt.$$

Δείξτε ότι το  $F$  είναι φραγμένο και ότι  $\|F\| = 1/\sqrt{3}$ .

---

(3) Έστω  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  χώροι με νόρμα και  $T: X \rightarrow Y$  γραμμικός τελεστής ώστε η ακολουθία  $(\|Tx_n\|_Y)$  είναι φραγμένη εαν  $x_n \rightarrow^{\|\cdot\|_X} 0$ . Δείξτε ότι ο  $T$  είναι φραγμένος.

---

(4) Δείξτε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  υπάρχει σταθερά  $C$  (εξαρτάται από το  $n$  μόνο) ώστε για κάθε πολυώνυμο  $P: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  βαθμού το πολύ  $n$  έχουμε  $\|P'\|_\infty \leq C \|P\|_\infty$ .

---

(5) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει μη κενό διάστημα  $(a, b)$  ώστε η  $f$  είναι φραγμένη σε ένα πυκνό υποσύνολο του  $(a, b)$ .

---

(6) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  απείρως παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  υπάρχει  $n_x \in \mathbb{N}$  ώστε  $f^{(n_x)}(x) = 0$ .

(i) Δείξτε ότι για κάθε (μη τετριμμένο) διάστημα  $I \subset \mathbb{R}$  υπάρχει (μη τετριμμένο) υποδιάστημα  $J \subset I$  ώστε ο περιορισμός της  $f$  στο  $J$  είναι πολυώνυμο.

(ii)\* Δείξτε ότι η  $f$  είναι πολυώνυμο.

---