ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3 (15/10/10)

Να μου επιστρέφετε τις ασκήσεις 4, 5, 6, 7, 8 μέχρι την Τετάρτη 27 Οκτωβρίου.

Δώρο: +1 μονάδα (από σύνολο 100 του τελικού σας βαθμού) για την άσκηση 2. Μπορείτε να την φέρετε μέχρι τις 10 Δεκεμβρίου.

(**1**) Είναι γνωστό (θεώρημα *Dirichlet*) ότι για κάθε άρρητο x υπάρχουν άπειροι ρητοί p/q (p, q είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε $|x - p/q| \leq 1/q^2$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0, 1]$ υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί p/q (p, q είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε $|x - p/q| \leq 1/(q^2(\log q)^2)$.
Υπόδειξη: Κάντε χρήση της Άσκησης 7 (ii) από το Φυλλάδιο 1.

(**2**)$^{\spadesuit}$ (**i**) Δείξτε ότι το ανοιχτό μοναδιαίο τετράγωνο δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων.

(**ii**) Δείξτε ότι κάθε παραλληλόγραμμο μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων και ενός συνόλου μέτρου 0.

(**3**) Έστω $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στροφή.

(**i**) Χρησιμοποιήστε το δεύτερο μέρος της προηγούμενης άσκησης για να δείξετε ότι $m(I) = m(R(I))$ για κάθε παραλληλόγραμμο I.

(**ii**) Συμπεράνετε ότι $m(E) = m(R(E))$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}^2$.

(**4**)* (**i**) Έαν $\mathcal{N}$ είναι το μη μετρήσιμο σύνολο που κατασκευάσαμε στο μάθημα, δείξτε ότι κάθε υποσύνολο του $\mathcal{N}$ με θετικό εξωτερικό μέτρο είναι μη μετρήσιμο. Κάντε το ίδιο και για το σύνολο $[0, 1] \setminus \mathcal{N}$.

(**ii**) Χρησιμοποιήστε το πρώτο μέρος για να δείξετε ότι κάθε υποσύνολο των πραγματικών με θετικό εξωτερικό μέτρο περιέχει κάποιο μη μετρήσιμο σύνολο.

(**5**)* Έαν $\mathcal{N}$ είναι το μη μετρήσιμο σύνολο που κατασκευάσαμε στο μάθημα, δείξτε ότι $m_*([0, 1]\setminus\mathcal{N}) = 1$ (Χρησιμοποιήστε το πρώτο μέρος της προηγούμενης άσκησης.). Συμπεράνετε ότι υπάρχουν $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ και $m_*(E_1 \cup E_2) \neq m_*(E_1) + m_*(E_2)$.

(6)* Κατασκευάστε (μη μετρήσιμα) υποσύνολα $E_1, E_2, \dots$ του $[0,1]$ τέτοια ώστε $E_{n+1} \subset E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $m_*(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n\to\infty} m_*(E_n)$.

(7)* **(i)** Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το σύνολο $f^{-1}((-\infty, r))$ είναι μετρήσιμο για κάθε $r \in \mathbb{Q}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η f είναι μετρήσιμη ;

(ii) Έστω $f_t\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$, συνεχείς συναρτήσεις. Είναι η συνάρτηση $\sup_{t\in[0,1]} f_t$ πάντα συνεχής; Μετρήσιμη;

(8)* **(i)** Έστω $f_n\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) \ \text{ υπάρχει ή είναι } \pm\infty\}$$

είναι μετρήσιμο.

(ii) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}\colon f'(x) \ \text{ υπάρχει ή είναι } \pm\infty\}$$

είναι μετρήσιμο και η συνάρτηση $f'\colon E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

(9) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε κάθε συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ που ταυτίζετε με την f σχεδόν παντού είναι παντού ασυνεχής.
Υπόδειξη: Κάντε χρήση της Άσκησης 9 από το Φυλλάδιο 2.

(10) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Είναι γνωστό ότι έαν η f είναι συνεχής τότε είναι γραμμική. Στόχος αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το ίδιο με την ποιό ασθενή υπόθεση ότι η f είναι μετρήσιμη.

(i) Δείξτε ότι αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0, τότε η f είναι συνεχής στο 0, και συνεπώς γραμμική.

(ii) Δείξτε ότι έαν η f είναι μετρήσιμη τότε είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0 (Κάντε χρήση της Άσκησης 6 (ii) από το Φυλλάδιο 2.). Συμπεράνετε ότι η f είναι γραμμική.