ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4 (29/10/10)

Να μου επιστρέφετε μέχρι την Παρασκευή 5 Νοεμβρίου οποιεσδήποτε πέντε από τις ασκήσεις 1-9.

Δώρο: +1 μονάδα (από σύνολο 100 του τελικού σας βαθμού) για την άσκηση 10. **Μπορείτε να την φέρετε μέχρι τις 10 Δεκεμβρίου.**

(**1**) (**i**) Έστω $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $f_n(x)/c_n \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(**ii**) Έστω $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών ακεραίων τέτοια ώστε $f_n(x)/c_n \to 0$ σχεδόν παντού.
Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι υπάρχουν c_n με $m(\{x\colon |f_n(x)|/c_n > 1/n\}) \leq 1/2^n$.

(**2**) (**i**) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $m(E) < +\infty$, και $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις με $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty$ για κάθε $x \in E$. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subset E$ με $m(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in F_\varepsilon} |f_n(x)| < +\infty$. (Με άλλα λόγια, κάθε κατά σημείο φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων είναι 'σχεδόν' ομοιόμορφα φραγμένη.)

(**ii**) Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ με $m(\mathbb{R}^d \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $\lim_{|x|\to\infty, x\in F_\varepsilon} f(x) = 0$. (Με άλλα λόγια, κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση 'σχεδόν' συγκλίνει στο μηδέν.)

(**3**) (**i**) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, αλλά $\int_1^\infty |f|^p \, dx = +\infty$ για κάθε $p > 0$.

(**ii**) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_1^\infty f^p \, dx < +\infty$ για κάθε $p > 0$, αλλά $\limsup_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(**4**) (**i**) Έστω $E_1, \ldots, E_N$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$. Εάν $\sum_{n=1}^N m(E_n) > N - 1$, δείξτε ότι $m(\bigcap_{n=1}^N E_n) > 0$.

(**ii**) Έστω $E_1, \ldots, E_N$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με το ίδιο μέτρο $= c$. Δείξτε ότι υπάρχουν διαφορετικά i, j τέτοια ώστε $m(E_i \cap E_j) \geq c^2 - c/N$.

(**5**) Έστω $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
(**i**) Εάν $\int_E f \, dx = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.

(**ii**) Εάν $\int_E f \, dx = 0$ για κάθε $E \subset [0,1]$ με $m(E) = 1/3$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού.
Υπόδειξη: Κάντε χρήση της άσκησης 5 από το φυλλάδιο 2.

(**6**) Έστω $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k\, m(\{x\colon |f(x)| > 2^k\}) < +\infty$.

(**7**) Έστω $f\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που ικανοποιεί: για κάθε $t \in [0,1]$ η $f(t,x)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς x, η μερική παράγωγος $\partial f(t,x)/\partial t$ ορίζεται για κάθε $t, x \in [0,1]$, και $\sup_{t\in[0,1]} |\partial f(t,x)/\partial t| \leq g(x)$ όπου $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Δείξτε ότι η συνάρτηση $x \to \partial f(t,x)/\partial t$ είναι μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη για κάθε $t \in [0,1]$, η συνάρτηση $t \to \int_0^1 f(t,x)\; dx$ είναι παραγωγίσιμη, και

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 f(t,x)\; dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\; dx.$$

(**8**) Για $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$ με δεκαδικό ανάπτυγμα $x = a_0.a_1a_2a_3\ldots$ ορίζουμε

$$A_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ εάν } a_n \text{ είναι περιττός} \\ -1 \text{ εάν } a_n \text{ είναι άρτιος.} \end{cases}$$

(Η συνάρτηση $x \to A_n(x)$ είναι καλά ορισμένη σχεδόν παντού, και μετρήσιμη.)

Δείξτε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\cdot A_n(x)\; dx = 0.$$

Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα όταν $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

(**9**) (**i**) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n\colon E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, μετρήσιμες συναρτήσεις. Εάν $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n|\; dx < +\infty$, δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει απόλυτα σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(**ii**) Έστω $r_1, r_2, \ldots$ μία οποιαδήποτε αρίθμηση των ρητών στο $[0,1]$, και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία με $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n|x - r_n|^{-1/2}$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$.

(**iii**) Εάν $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}|x - r_n|^{-1/2}$ (r_n όπως πριν), δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, αλλά η f^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα $(a,b) \subset [0,1]$.

(**10**)$^{\spadesuit}$ Έστω $T\colon [0,1] \to [0,1]$ ένας μετασχηματισμός ο οποίος διατηρεί το μέτρο *Lebesgue*, δηλαδή, εάν $E \subset [0,1]$ είναι μετρήσιμο τότε και το $T(E)$ είναι μετρήσιμο και $m(T(E)) = m(E)$.

Δείξτε ότι για κάθε $E \subset [0,1]$ μετρήσιμο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$m(E \cap T^n(E)) \geq 0.99 \cdot (m(E))^2.$$

(Με T^n συμβολίζουμε την σύνθεση του T με τον εαυτό του n φορές, δηλαδή, $T^2 = T \circ T, T^3 = T \circ T \circ T$ κτλ.)