ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5 (19/11/10)

Να μου επιστρέψετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις μέχρι την Παρασκευή 3 Δεκεμβρίου.

Δώρο: +1 μονάδα (από σύνολο 100 του τελικού σας βαθμού) για την άσκηση 10. **Μπορείτε να την φέρετε μέχρι τις 10 Δεκεμβρίου.**

(**1**) Λέμε ότι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n \colon E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει κατά μέτρο σε μία συνάρτηση f (και γράφουμε $f_n \to^m f$) εάν για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x \in E \colon |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

(**i**) Έστω $m(E) < +\infty$. Δείξτε ότι εάν $f_n \to f$ σχεδόν παντού ή $f_n \to^{L^1} f$, τότε $f_n \to^m f$.

(**ii**) Δείξτε ότι εάν $f_n \to^m f$ τότε δεν έπεται υποχρεωτικά ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει όμως υποακολουθία f_{n_k} τέτοια ώστε $f_{n_k} \to f$ σχεδόν παντού. Συμπεράνετε ότι κατά μέτρο όριο μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(**2**) (**i**) Έστω $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $T \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ αντιστρέψιμη απεικόνιση, και $T^{-1} \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *Lipschitz* απεικόνιση με *Lipschitz* σταθερά L. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ T$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(T(x))|\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx$$

για κάποια σταθερά $C > 0$ η οποία εξαρτάται μόνο από το d και το L.
Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για $f = \mathbf{1}_E$.

(**ii**) Έστω $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $T \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f \circ T$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(T(x))\, dx = |\det(T)|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

Υπόδειξη: Εάν $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, αυτό είναι γνώστο από την κλασσική θεωρία ολοκλήρωσης. Προσεγγίστε την f στον L^1 με $g \in C^2(\mathbb{R}^d)$.

(**3**) (**i**) Έστω $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ομοιόμορφα φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_0^1 f_n(x) \cdot f_m(x)\, dx = 0$ για κάθε $n \neq m$. Δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in [0,1].$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι $\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^{N^2} f_n(x) \right|^2 dx = 0$.

(**ii**) Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία διαφορετικών ακεραίων. Δείξτε ότι

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\cos(2\pi a_n x)=0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x\in[0,1].$$

(**4**) (**i**) Έστω $p,q\in[1,+\infty]$ με $1/p+1/q=1$. Εάν $\|f_n-f\|_{L^p}\to 0$ και $\|g_n-g\|_{L^q}\to 0$, δείξτε ότι $\|f_ng_n-fg\|_{L^1}\to 0$.

(**ii**) Έστω $r,s,t\in[1,+\infty]$ με $r\leq s\leq t$. Δείξτε ότι $\|f\|_{L^s}\leq\|f\|_{L^r}^{\theta}\cdot\|f\|_{L^t}^{1-\theta}$ όπου το θ ικανοποιεί $\frac{1}{s}=\frac{\theta}{r}+\frac{1-\theta}{t}$. Συμπεράνετε ότι $L^r\cap L^t\subset L^s$.
Υπόδειξη: Κάντε χρήση της ανισότητας *Holder*.

(**5**) (**i**) Εάν $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι $\|f\|_{L^p[0,1]}\leq\|f\|_{L^q[0,1]}$ για κάθε $p,q\in[1,+\infty]$ με $p\leq q$.

(**ii**) Εάν $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δείξτε ότι $\lim_{p\to+\infty}\|f\|_{L^p[0,1]}=\|f\|_{L^\infty[0,1]}$.

(**6**) Έστω $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(I) Υπάρχει θετική σταθερά c_1 τέτοια ώστε $\|f\|_{L^p[0,1]}\leq c_1 p$ για κάθε $p\in\mathbb{N}$.

(II) Υπάρχει θετική σταθερά c_2 τέτοια ώστε $\left\|e^{c_2 f}\right\|_{L^1[0,1]}<+\infty$.

(**7**) Έστω $A\subset\mathbb{R}^{d_1}$ και $B\subset\mathbb{R}^{d_2}$ με θετικό εξωτερικό μέτρο. Δείξτε ότι το σύνολο $A\times B$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$ αν και μόνο αν τα A και B είναι μετρήσιμα. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $m_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}}(A\times B)=m_{\mathbb{R}^{d_1}}(A)\cdot m_{\mathbb{R}^{d_2}}(B)$.

(**8**) (**i**) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Εάν σχεδόν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε $m(\{y\colon(x,y)\in E\})=0$, δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $y\in\mathbb{R}$ έχουμε $m(\{x\colon(x,y)\in E\})=0$.

(**ii**) Έστω E *Borel* υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ το σύνολο $E_x=\{y\colon(x,y)\in E\}$ είναι *Borel* υποσύνολο του $\mathbb{R}$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι το σύνολο των E που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι σ-άλγεβρα.

(**9**) (**i**) Έστω $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη. Εάν η συνάρτηση $f(x)-f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο μοναδιαίο τετράγωνο, δείξτε ότι $f\in L^1([0,1])$.

(**ii**) Έστω $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη με περίοδο 1, δηλαδή, $f(t+1)=f(t)$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Εάν

$$\int_0^1|f(x+t)-f(x)|\,dx\leq 1$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι $f\in L^1([0,1])$.

(**10**)$^\spadesuit$ Λέμε ένα κλειστό παραλληλόγραμμο 'καλό' εάν οι πλευρές του είναι παράλληλες στους καρτεσιανούς άξονες και τουλάχιστον μία από αυτές έχει ακέραιο μήκος. Δείξτε ότι εάν κάποιο κλειστό παραλληλόγραμο μπορεί να καλυφθεί με 'καλά', μη επικαλυπτόμενα παραλληλόγραμμα, τότε είναι και το ίδιο 'καλό'.

Υπόδειξη: Αρχικά βρείτε μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_a^b f(x)\ dx = 0$ αν και μόνο αν $b - a \in \mathbb{Z}$.