ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Παράδοση: Τρίτη 9 Οκτωβρίου (κάθε μέρα καθυστέρησης -10%).
Παραδώστε λυμένες τις ασκήσεις 1, 2, 4, 5, 8, 9.

(**1**) (**i**) Δείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι G_δ (δηλαδή αριθμήσιμη τομή ανοιχτών) και κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι F_σ (δηλαδή αριθμήσιμη ένωση κλειστών).

(**ii**) Δείξτε ότι το σύνολο των ρητών είναι F_σ αλλά όχι G_δ (μπορείτε να κάνετε χρήση του θεωρήματος *Baire*).

(**2**) Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$.

(**i**) Δείξτε ότι $m_*(E) = \inf\{m_*(O)\colon O$ ανοιχτό $E \subset O\}$.

(**ii**) Δείξτε ότι υπάρχει G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ το οποίο περιέχει το E και έχει το ίδιο εξωτερικό μέτρο με το E.

(**3**) Δείξτε ότι κάθε αριθμήσιμη ένωση ευθειών στο επίπεδο έχει εξωτερικό μέτρο 0.

(**4**) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με εξωτερικό μέτρο 0. Δείξτε ότι το σύνολο $E^2 = \{x^2\colon x \in E\}$ έχει επίσης εξωτερικό μέτρο 0.

(**5**) Έστω $E \subset R$ με εξωτερικό μέτρο 0.

(**i**) Δείξτε ότι το συμπλήρωμα του E είναι πυκνό στους πραγματικούς.

(**ii**) Δείξτε ότι για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ έχουμε $m_*(E \cup A) = m_*(A) = m_*(A \setminus E)$.

(**6**) Έαν $E_k \subset \mathbb{R}^d$, $k = 1, 2 \ldots$, ορίζουμε

$$\limsup_k(E_k) = \{x \in \mathbb{R}^d\colon x \in E_k \text{ για άπειρα } k \in \mathbb{N}\}.$$

(**i**) Δείξτε ότι $\limsup_k(E_k) = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k\geq n} E_k$.

(**ii**) Εάν $\sum_{k=1}^\infty m_*(E_k) < \infty$, δείξτε ότι $m_*(\limsup_k(E_k)) = 0$.

(**iii**) Δώστε παράδειγμα συνόλων $E_k \subset \mathbb{R}$, $k = 1, 2 \ldots$, τέτοια ώστε $\sum_{k=1}^\infty m_*(E_k) = \infty$ αλλά $\limsup_k(E_k) = \emptyset$.

(**7**) Έαν $E \subset \mathbb{R}$, ορίζουμε

$$J_*(E) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{N} |I_j| \colon E \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j,\ I_j \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N} \Big\}.$$

(**i**) Δείξτε ότι $J_*(E) = J_*(\overline{E})$.

(**ii**) Δείξτε ότι $m_*(E) \leq J_*(E)$ και δώστε παράδειγμα όπου $m_*(E) < J_*(E)$.

(**8**) Για κάθε $\delta \in (0,1)$ κατασκευάζουμε ένα σύνολο C_δ, τύπου $Cantor$, αφαιρώντας από κάθε διάστημα που παραμένει στο k βήμα διάστημα μήκους $\delta 3^{-k}$. Να δειχθεί ότι το C_δ είναι τέλειο σύνολο (δηλαδή κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία), δεν περιέχει κανένα διάστημα, και $m_*(C_\delta) = 1 - \delta > 0$

(**9**) Έστω C το σύνολο $Cantor$.

(**i**) Είναι το $C \cap \mathbb{Q}$ πυκνό στο C;

(**ii**)$^\spadesuit$ Δείξτε ότι $C + C = [0,2]$, δηλαδή κάθε αριθμός στο $[0,2]$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο αριθμών στο C.
