

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (Μεταπτυχιακό)

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Παράδοση: Τρίτη 16 Οκτωβρίου (κάθε μέρα καθυστέρησης -10%).
Παραδώστε τις ασκήσεις 3, 5, 6, 7, 8 και όσοι μπορούν την 9 αλλιώς την 4.

(1) (i) Έαν A είναι οι ρητοί στο $[0, 1]$ και B οι άρρητοι στο $[1, 2]$, δείξτε ότι το σύνολο $A \cup B$ είναι Borel αλλά δεν είναι G_δ ούτε F_σ .

(ii) Ισχύει ότι κάθε Borel υποσύνολο του \mathbb{R}^d διαφέρει από κάποιο F_σ σε σύνολο μέτρου 0;

(2) Έστω E υποσύνολο του \mathbb{R}^d τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο E' με $E \subset E'$ και $m_*(E' \setminus E) \leq \varepsilon$. Είναι το E υποχρεωτικά μετρήσιμο;

(3) Να δειχθεί ότι ένα υποσύνολο E του \mathbb{R}^d είναι μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο O του \mathbb{R}^d έχουμε

$$m(O) = m_*(O \cap E) + m_*(O \cap E^c).$$

(Εξετάστε πρώτα την περίπτωση όπου $m_*(E) < \infty$.)

(4) Έστω E το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο $[0, 1]$ οι οποίοι περιέχουν άπειρες φορές τα ψηφία 2018 (με αυτή τη σειρά) στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα. Δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο και υπολογίστε το μέτρο του.

(5) Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} με $m(E) = 1$. Υπάρχει πάντα μετρήσιμο $E' \subset E$ με $m(E') = 1/3$; Υπάρχει πάντα συμπαγές $K \subset E$ με $m(K) = 1/3$;

(6) (i) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $m_*(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ υπάρχει (μη τετριμμένο) διάστημα I τέτοιο ώστε $m_*(E \cap I) \geq \lambda \cdot m_*(I)$.

(ii) Έστω A, B μετρήσιμα υποσύνολα του \mathbb{R} με θετικό μέτρο. Να δειχθεί ότι το σύνολο $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ περιέχει κάποιο (μη τετριμμένο) διάστημα.

Υπόδειξη: Κάντε χρήση του (i) για λ κοντά στο 1.

(7) (i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κατασκευάστε ανοιχτό $O_n \subset \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει τους ρητούς και $m(O_n) \leq 1/n$.

(ii) Εάν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, δείξτε ότι $m(A) = 0$ και ότι το συμπλήρωμα του A είναι πρώτης κατηγορίας (δηλαδή μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων που δεν περιέχουν κανένα μη τετριμμένο διάστημα.). Συμπεράνετε ότι το \mathbb{R} είναι ένωση δύο 'μικρών' συνόλων.

(8) (i) Ναδειχθεί ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στέλνει F_σ σύνολα σε F_σ σύνολα.

(ii) Ναδειχθεί ότι κάθε *Lipschitz* συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στέλνει σύνολα μέτρου 0 σε σύνολα μέτρου 0.

(iii) Ναδειχθεί ότι κάθε *Lipschitz* συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ στέλνει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

(9)[♣] Κατασκευάστε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0, 1]$ τέτοιο ώστε για κάθε μη τετριμμένο διάστημα $I \subset [0, 1]$ έχουμε $m(I \cap E) > 0$ και $m(I \cap E^c) > 0$.

Υπόδειξη: Ξεκινήστε με ένα σύνολο C_δ τύπου *Cantor* (άσκηση 8 του πρώτου φυλλαδίου) για κάποιο $\delta \in (0, 1)$. Σε κάθε διάστημα έξω από το C_δ βάλτε κάποια άλλα σύνολα παρόμοιου τύπου. Συνεχίστε έτσι...
