

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων-Χειμερινό Εξάμηνο 2018

Παράδοση: Παρασκευή 26 Οκτωβρίου (κάθε μέρα καθυστέρησης -10%).  
Παραδώστε τις ασκήσεις 4, 5, 6, 7, 8 και όσοι μπορούν την 2 αλλιώς την 1.

---

(1) Είναι γνωστό (θεώρημα *Dirichlet*) ότι για κάθε άρρητο  $x$  υπάρχουν άπειροι ρητοί  $p/q$  ( $p, q$  είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε  $|x - p/q| \leq 1/q^2$ . Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε  $x \in [0, 1]$  υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος ρητοί  $p/q$  ( $p, q$  είναι σχετικά πρώτοι) τέτοιοι ώστε  $|x - p/q| \leq 1/(q^2(\log q)^2)$ .

**Υπόδειξη:** Αποδείξτε και κάντε χρήση της Άσκησης 6 (ii) από το Φυλλάδιο 1.

---

(2)<sup>▲</sup> (i) Δείξτε ότι το ανοιχτό μοναδιαίο τετράγωνο δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων.

(ii) Δείξτε ότι κάθε παραλληλόγραμμο μπορεί να γραφεί ως ένωση μη επικαλυπτόμενων κλειστών δίσκων και ενός συνόλου μέτρου 0.

---

(3) Έστω  $R: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  στροφή.

(i) Χρησιμοποιήστε το δεύτερο μέρος της προηγούμενης άσκησης για να δείξετε ότι  $m(I) = m(R(I))$  για κάθε παραλληλόγραμμο  $I$ .

(ii) Συμπεράνετε ότι  $m(E) = m(R(E))$  για κάθε μετρήσιμο  $E \subset \mathbb{R}^2$ .

---

(4) Έαν  $V$  είναι το σύνολο *Vitali*, δείξτε ότι  $m_*([0, 1] \setminus V) = 1$ . Συμπεράνετε ότι εάν  $E_1 = V$  και  $E_2 = [0, 1] \setminus V$ , τότε  $m_*(E_1 \cup E_2) < m_*(E_1) + m_*(E_2)$ .

---

(5) (i) Έαν  $E_1, E_2, \dots$  είναι υποσύνολα του  $[0, 1]$  τέτοια ώστε  $E_n \subset E_{n+1}$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , δείξτε ότι  $m_*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_*(E_n)$ .

(ii) Κατασκευάστε (μη μετρήσιμα) υποσύνολα  $E_1, E_2, \dots$  του  $[0, 1]$  τέτοια ώστε  $E_{n+1} \subset E_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $m_*(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} m_*(E_n)$ .

---

(6) Κατασκευάστε διαμέριση  $E_1, E_2, \dots$  του  $[0, 1]$  και  $s_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ , ώστε  $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k + s_k)$ .

---

(7) (i) Έστω  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε το σύνολο  $f^{-1}((-\infty, r))$  είναι μετρήσιμο για κάθε  $r \in \mathbb{Q}$ . Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η  $f$  είναι μετρήσιμη;

(ii) Έστω  $f_t: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, t \in [0, 1]$ , συνεχείς συναρτήσεις. Είναι η συνάρτηση  $\sup_{t \in [0, 1]} f_t$  πάντα συνεχής; Μετρήσιμη;

(iii) Έστω  $f_t: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, t \in [0, 1]$ , μετρήσιμες συναρτήσεις. Είναι η συνάρτηση  $\sup_{t \in [0, 1]} f_t$  πάντα μετρήσιμη;

---

---

(8) (i) Έστω  $f_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}^d: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ υπάρχει ή είναι } \pm \infty\}$$

είναι μετρήσιμο.

(ii) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E = \{x \in \mathbb{R}: f'(x) \text{ υπάρχει ή είναι } \pm \infty\}$$

είναι μετρήσιμο και η συνάρτηση  $f': E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  είναι μετρήσιμη.

---

(9) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε κάθε συνάρτηση  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  που ταυτίζεται με την  $f$  σχεδόν παντού είναι παντού ασυνεχής.

**Υπόδειξη:** Κάντε χρήση της Άσκησης 9 από το Φυλλάδιο 2.

---

(10) Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Είναι γνωστό ότι εάν η  $f$  είναι συνεχής τότε είναι γραμμική. Στόχος αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε το ίδιο με την ποιό ασθενή υπόθεση ότι η  $f$  είναι μετρήσιμη.

(i) Δείξτε ότι αν η  $f$  είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0, τότε η  $f$  είναι συνεχής στο 0, και συνεπώς γραμμική.

(ii) Δείξτε ότι εάν η  $f$  είναι μετρήσιμη τότε είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0 (Κάντε χρήση της Άσκησης 6 (ii) από το Φυλλάδιο 2.). Συμπεράνετε ότι η  $f$  είναι γραμμική.

---