ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ(Μεταπτυχιακό)

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2018
Διάρκεια: 3 ώρες
Καλή Επιτυχία!

(**1**) (2 Μονάδες) Απαντήστε ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ και δώστε μία σύντομη επεξήγηση (2-3 σειρές).

(i) Υπάρχει μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}$ ώστε $m(E) < \infty$ και $m(E \cap I) > 0$ για κάθε μη τετριμμένο διάστημα I.

(ii) Υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ ώστε $m_*(E \cap I) = \frac{1}{2}|I|$ για κάθε μη τετριμμένο φραγμένο διάστημα I.

(iii) Εάν $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $m(|f_n| \geq \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού.

(iv) Εάν $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες και $m(|f_n| \geq \frac{1}{n^2}) \leq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού.

(**2**) (2 Μονάδες) (i) Εάν $E \subset \mathbb{R}$ και $c > 0$, δείξτε ότι $m_*(cE) = c\, m_*(E)$.

(ii) Εάν $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και $c > 0$, δείξτε ότι

$$\int f(cx)\, dx = \frac{1}{c} \int f(x)\, dx.$$

(**3**) (1.5 Μονάδες) (i) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, στέλνει μετρήσιμα υποσύνολα του $[0, +\infty)$ σε μετρήσιμα σύνολα.

(ii) Έστω $E \subset [0, +\infty)$ **μη** μετρήσιμο. Δείξτε ότι το $E^2 = \{x^2, x \in E\}$ είναι **μη** μετρήσιμο. Ισχύει το ίδιο εάν $E \subset \mathbb{R}$ είναι **μη** μετρήσιμο;

(**4**) (2 Μονάδες) (i) Εάν $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} x\, m(|f| \geq x) = 0$.

(ii) Εάν $a > 0$, δείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} x^{1+a} m(|f| \geq x) = +\infty$ για κάποια $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη.

(**5**) (2 Μονάδες) (i) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. Εάν η f είναι συνεχής, μπορούμε να συμπεράνουμε πως η σειρά συγκλίνει για κάθε $x > 0$;

(ii) Έστω $E \subset \mathbb{R}$ μετρήσιμο τέτοιο ώστε $m(E) < \infty$. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $n^2 x \in E$ για πεπερασμένα μόνο $n \in \mathbb{N}$.

(**6**) (1.5 Μονάδες) Υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος, ξένα ανά δύο, μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με θετικό μέτρο;
