ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Τελικό Διαγώνισμα-Χειμερινό Εξάμηνο 2012, Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2 μονάδες) (**i**) Βρείτε όλες τις ολόμορφες $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

(**ii**) Βρείτε όλες τις ολόμορφες $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f'\big(\frac{1}{n}\big) = f\big(\frac{1}{n}\big)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(**2**) (2 μονάδες) (**i**) Βρείτε το ανάπτυγμα *Laurent* της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ με κέντρο το 0 στο χωρίο $0 < |z| < 2$ και στο χωρίο $|z| > 2$.

(**ii**) Βρείτε όλες τις πιθανές τιμές του ολοκληρώματος

$$\int_{C_R} \frac{1}{z(z-2)}\,dz$$

όπου C_R ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας R ($R \neq 2$).

(**3**) (2 μονάδες) (**i**) Ταξινομήστε τις ιδιομορφίες της συνάρτησης $f(z) = \frac{\sin(\pi/z)}{z-2}$.

(**ii**) Έστω C ο θετικά προσανατολισμένος κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_C \frac{\sin(\pi/z)}{z-2}\,dz.$$

(Κάντε την αλλαγή μεταβλητής $w = 1/z$.)

(**4**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(2012)}(0) = 0$.

(**i**) Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(z) = f(z)/z^{2013}$ έχει αιρόμενη (επουσιώδη) ιδιομορφία στο 0.

(**ii**) Εάν επιπλέον $|f(z)| \leq 1$ για $|z| = 1$, δείξτε ότι $|f(z)| \leq |z|^{2013}$ για $|z| \leq 1$.

(**5**) (2 μονάδες) (**i**) Έστω $f(z) = f_1(z)/(z-z_0)^m$, $g(z) = g_1(z)/(z-z_0)^m$, όπου $f_1, g_1\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφες και $g_1(z_0) \neq 0$ ($m \in \mathbb{N}$). Δείξτε ότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}.$$

(**ii**) Έστω f, g συναρτήσεις με πόλο τάξης m στο σημείο z_0. Δείξτε ότι

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \in \mathbb{C}.$$

Ποια είναι η τιμή του $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ εάν οι f, g έχουν πόλο διαφορετικής τάξης;

(**6**) (2.5 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι $|e^{iz}\sin(z)| \leq 1$ για z στο άνω ημιεπίπεδο.

(**ii**) Έστω C_R η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ και το άνω ημικύκλιο κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας $R > 1$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{C_R} \frac{e^{\pi i z}\sin(\pi z)}{z^2+1}\,dz.$$

(**iii**) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi i x}\sin x}{x^2+1}\,dx.$$