ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

Πρόοδος-Χειμερινό Εξάμηνο 2012, Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 2 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2.5 μονάδες) (**i**) Δείξτε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $0, z, w \in \mathbb{C}$ είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν

$$|z|^2 = |w|^2 = 2\Re(z\bar{w}).$$

(**ii**) Έστω $\zeta_1, \ldots, \zeta_{10}$ οι δέκατες ρίζες της μονάδας. Δείξτε ότι

$$(2-\zeta_1)(2-\zeta_2)\cdots(2-\zeta_{10}) = 1023.$$

(**2**) (2.5 μονάδες) (**i**) Για ποια $z \in \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση $f(z) = \bar{z}$ συνεχής; Παραγωγίσιμη;

(**ii**) Βρείτε για ποιά $a, b \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $u(x,y) = ax^3 + by^3$ είναι το πραγματικό μέρος κάποιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(**3**) (2.5 μονάδες) Έστω C ο κύκλος $C = \left\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = \frac{3}{2}\right\}$ θετικά προσανατολισμένος.

(**i**) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο C.

(**ii**) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+z^2}\, dz.$$

(**4**) (2.5 μονάδες) (**i**) Διατυπώστε το θεώρημα *Liouville* και αποδείξτε το χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις *Cauchy*.

(**ii**) Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες (ολόμορφες) συναρτήσεις $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ που ικανοποιούν

$$|f(z)| \le e^{\Re z} \quad \text{για κάθε} \quad z \in \mathbb{C}.$$

(**5**) (2.5 μονάδες) (**i**) Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^3}\, dz$$

όπου C_R είναι η κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα $[-R, R] \subset \mathbb{R}$ και το άνω ημικύκλιο κύκλου κέντρου 0 και ακτίνας $R > 1$.

(**ii**) Υπολογίστε το πραγματικό ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx.$$