ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Τελικό διαγώνισμα-Χειμερινό Εξάμηνο 2014
Διδάσκων: Νίκος Φραντζικινάκης

Επιτρέπεται μόνο μία σελίδα με σημειώσεις. Διάρκεια 3 ώρες. Καλή επιτυχία!!

(**1**) (2 μονάδες) Δείξτε ότι μία συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων (f_n) τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ σχεδόν παντού.

(**2**) (1.5 μονάδες) Υπολογίστε (με απόδειξη) το *Lebesgue* ολοκλήρωμα $\int_0^1 f\,dx$ της συνάρτησης $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Είναι η f *Riemann*-ολοκληρώσιμη;

(**3**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Lebesgue*-ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $\int_0^a f\,dx = 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ σχεδόν παντού.

(**4**) (1.5 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Lebesgue*-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f(x+n)$ συγκλίνει.

(**5**) (2 μονάδες) Έστω $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Lebesgue*-ολοκληρώσιμη συνάρτηση.
(**i**) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \int_{|f|\geq n} |f|\,dx = 0$.
(**ii**) Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n\,m(\{|f| \geq n\}) = 0$.
(**iii**) Υπάρχει συνεχής $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί $\lim_{n\to\infty} n\,m(\{|f| \geq n\}) = 0$ όμως η f δεν είναι *Lebesgue*-ολοκληρώσιμη;

(**6**) (2.5 μονάδες) Έστω $f_n\colon \mathbb{R} \to [-a,a]$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int f_m \cdot f_n\,dx = 0$ για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$ και $\int f_n^2\,dx = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(**i**) Δείξτε ότι $\int (\sum_{n=1}^N f_n)^2\,dx = N$ για $N \in \mathbb{N}$ και συμπεράνετε ότι $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_n \to^{L^2} 0$.
(**ii**) Δείξτε ότι $\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N^2} f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.
(**iii**) Δείξτε ότι $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.